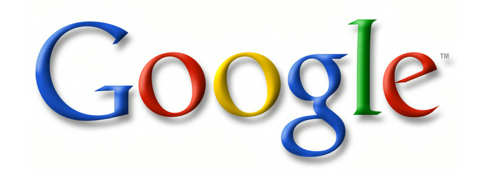
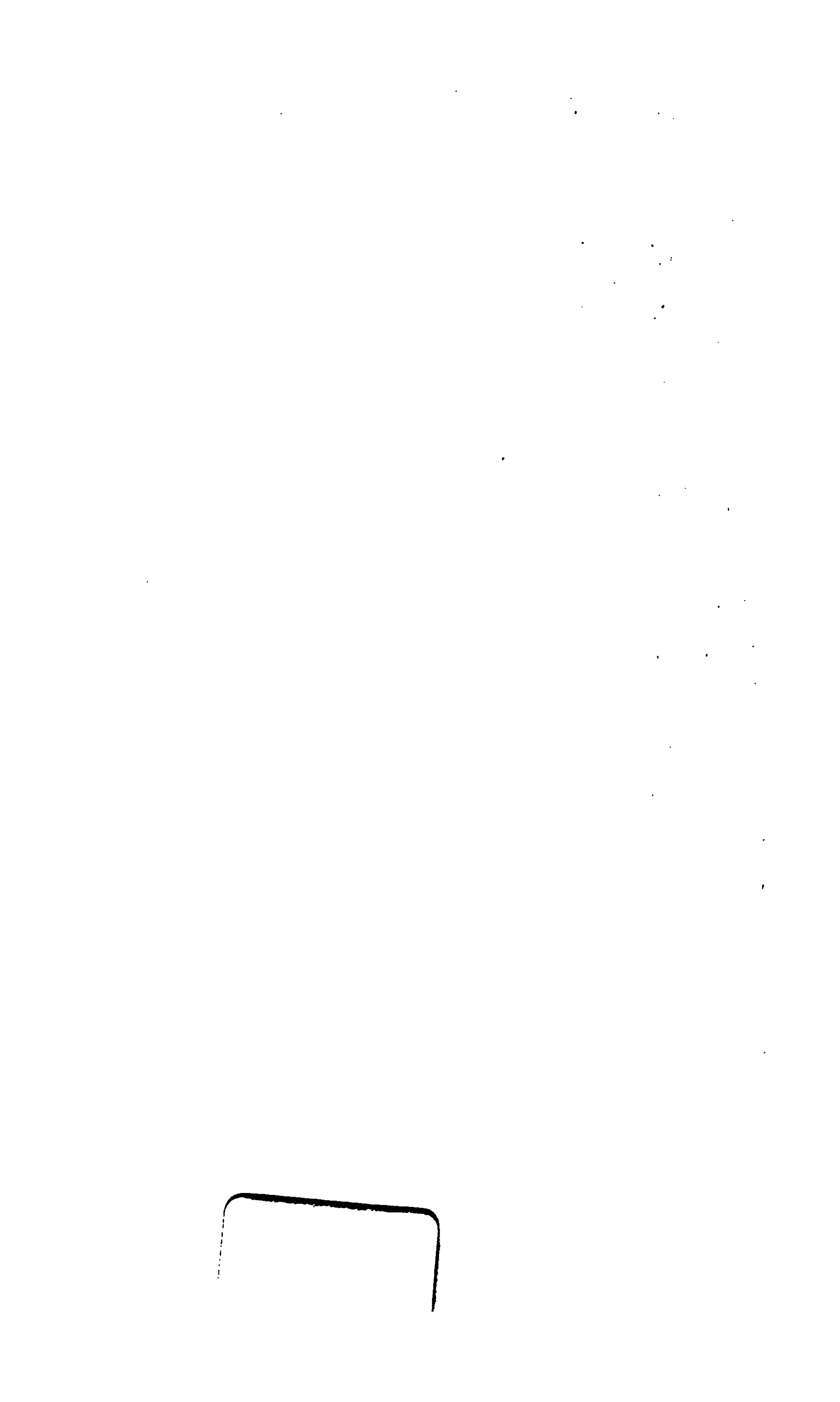
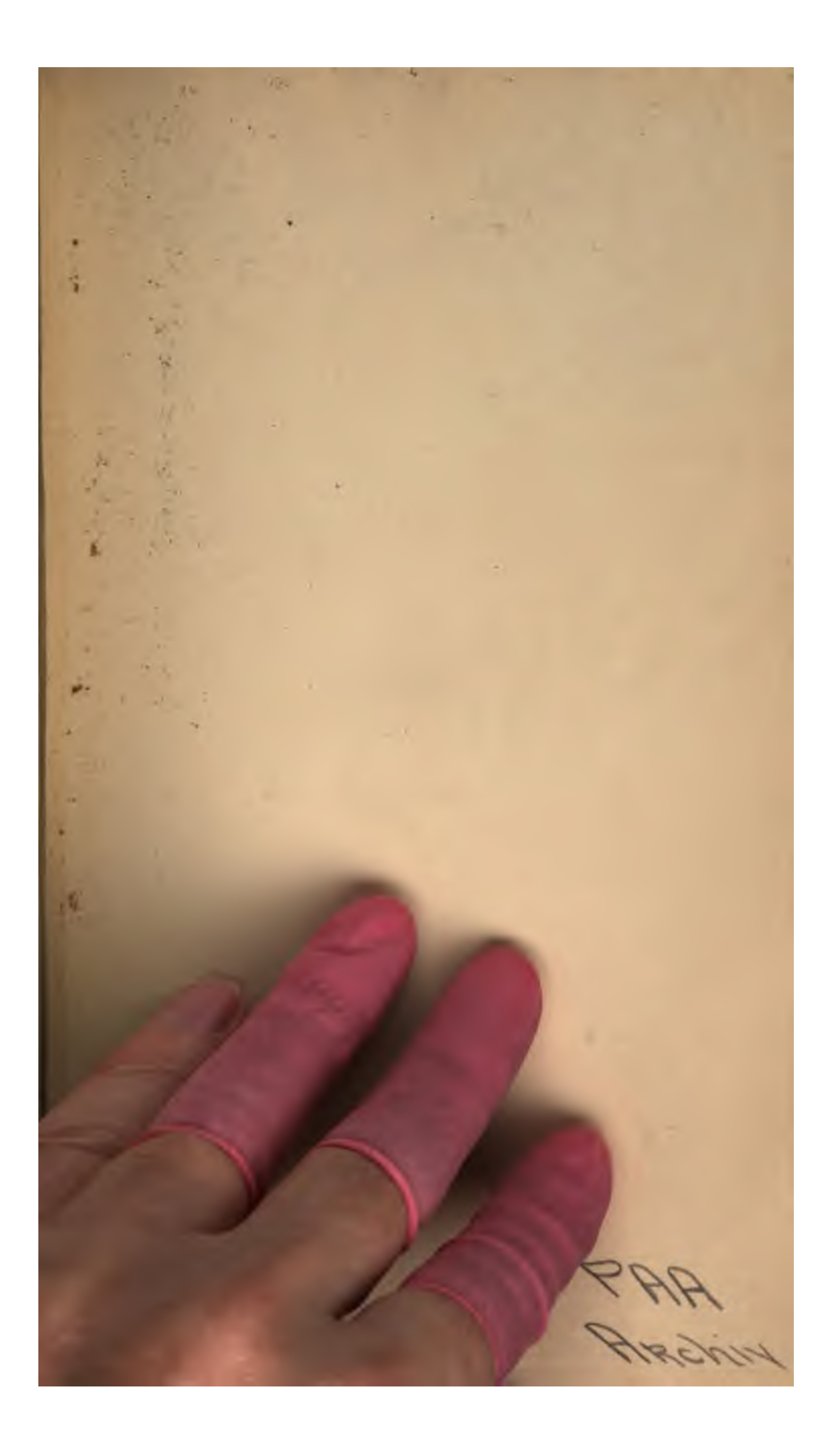



Google



NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06274646 0




PAA
Archiv



Archiv

der

Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Herausgegeben

von

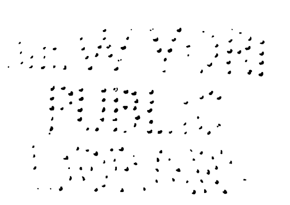
Johann August Grunert,
Professor zu Greifswald.

Achtundzwanzigster Theil.

Mit zehn lithographirten Tafeln.

Greifswald.
C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,
Th. Kunike.

1857.



Inhaltsverzeichniss des achtundzwanzigsten Theils.

Arithmetik.

Geometrie.

Trigonometrie.

Nr. der Abhandlung. | Heft. | Seite.

Geodäsie.

Mechanik.

Praktische Mechanik.

Physik.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Literarische Berichte *).

*) Jede einzelne Nummer der Literarischen Berichte ist für sich besonders paginirt von Seite 1 an.

I.

Ueber die Krümmung der von Ebenen gebildeten Schnitte des dreiaxigen Ellipsoids.

Von

dem Herausgeber.

Bekanntlich hat man verschiedene allgemeine Untersuchungen über die Krümmung der von Ebenen gebildeten Schnitte der krummen Flächen angestellt, und eine grössere Anzahl merkwürdiger, dieselbe betreffender Sätze gefunden. Auf besondere Arten der Flächen sind diese Sätze aber nur wenig angewandt worden, und man besitzt z. B., so viel ich weiss, noch keine allgemeinen Ausdrücke für die Coordinaten der Mittelpunkte und die Halbmesser der Krümmungskreise der Normalschnitte des allgemeinen dreiaxigen Ellipsoids und anderer Flächen des zweiten Grades, denen die grössten und kleinsten Krümmungshalbmesser entsprechen. Man weiss ferner, dass die Summe der reciproken Krümmungshalbmesser jeder zwei auf einander senkrecht stehenden Normalschnitte einer beliebigen krummen Fläche eine constante Grösse ist, aber den Werth dieser Constanten für die vorhergenannten und andere krumme Flächen kennt man, so viel ich weiss, noch nicht. Jedenfalls ist dies ein Mangel, der um so grösser ist, je merkwürdiger und eleganter die in Rede stehenden Ausdrücke sich für viele besondere krumme Flächen gestalten. Die Art und Weise, wie man bisher die allgemeinen Untersuchungen über die Krümmung der von Ebenen gebildeten Schnitte der Flächen unter Anwendung einer nicht geringen Anzahl verschiedener Coordinaten-Verwandlungen geführt hat, ist aber in der That auch zu speciellen Anwendungen wenig geeignet, was auch wohl vorzugsweise der Grund sein mag, dass dergleichen Anwen-

dungen bis jetzt nur wenig gemacht worden sind*). Ich halte daher eine ganz neue Behandlung dieses wichtigen und interessanten Gegenstandes für nothwendig, wenn dieselbe geeignet sein soll, Anwendungen auf besondere Fälle mit Leichtigkeit zu vermitteln und zu gestatten, und hoffe eine aus diesem Gesichtspunkte angestellte derartige sehr allgemeine Untersuchung bald veröffentlichen zu können im Stande zu sein. Für jetzt will ich mich begnügen, in dieser Abhandlung die Krümmung der von Ebenen gebildeten Schnitte des allgemeinen dreiaxigen Ellipsoids nach einer besonderen, so viel als möglich elementar gehaltenen Methode zu untersuchen, und hoffe, dass die Leser des Archivs über die Merkwürdigkeit und Eleganz der neuen Ausdrücke, welche aus derselben in ziemlich grosser Anzahl sich ergeben haben, mit mir einerlei Meinung sein werden. Dass diese Untersuchung eine unmittelbare Anwendung in bekannter Weise auf die allgemeinen dreiaxigen Hyperboloide gestattet, versteht sich von selbst, und bedarf hier kaum noch einer besonderen Bemerkung; und wie dieselbe für die Paraboloide anzustellen sein dürfte, wird gleichfalls mit Leichtigkeit ersichtlich sein.

I.

Die Krümmungskreise der Schnitte des Ellipsoids im Allgemeinen.

Wir gründen hier die Bestimmung der Krümmungskreise der Schnitte des Ellipsoids im Allgemeinen auf das Princip, dass der Mittelpunkt des Krümmungskreises einer beliebigen Curve in einem bestimmten Punkte derselben der Durchschnittspunkt der Normale der Curve in diesem Punkte mit einer, einem diesem Punkte unendlich nahe liegenden Punkte der Curve entsprechenden Normalen derselben ist, wonach man also eigentlich den Mittelpunkt des Krümmungskreises einer Curve in einem bestimmten Punkte derselben als die Gränze oder den Gränzpunkt aufzufassen hat, welchem die Durchschnittspunkte der Normale der Curve in dem in Rede stehenden Punkte derselben mit den dieser Normale benachbarten Normalen der Curve sich immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade nähern, wenn man die Punkte der Curve, denen die letzteren Normalen entsprechen, dem Punkte der Curve, welchem die erstere Normale entspricht, immer näher und näher rücken lässt.

*) Selbst die Darstellung von Moigno in den Leçons de calcul diff. et int. T. I. Leçons XXXIII et XXXIV lässt, bei aller Verdienstlichkeit, noch Manches zu wünschen übrig.

Die Gleichung des beliebigen, hier zur Betrachtung kommenden Ellipsoids sei im Allgemeinen

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1,$$

und ein beliebiger Punkt in seiner Oberfläche sei (uvw), so dass also auch

$$\left(\frac{u}{a}\right)^2+\left(\frac{v}{b}\right)^2+\left(\frac{w}{c}\right)^2=1$$

ist. Die Gleichung der Berührungsebene des Ellipsoids in dem Punkte (uvw) ist nach den Lehren der analytischen Geometrie:

$$\frac{u}{a^2}(x-u)+\frac{v}{b^2}(y-v)+\frac{w}{c^2}(z-w)=0,$$

oder

$$\frac{ux}{a^2}+\frac{vy}{b^2}+\frac{wz}{c^2}=1.$$

Die Gleichung der Ebene eines beliebigen durch den Punkt (uvw) gelegten Schnitts des Ellipsoids sei

$$A(x-u)+B(y-v)+C(z-w)=0.$$

Aus den beiden Gleichungen

$$A(x-u)+B(y-v)+C(z-w)=0,$$

$$\frac{u}{a^2}(x-u)+\frac{v}{b^2}(y-v)+\frac{w}{c^2}(z-w)=0$$

folgt, wenn G einen gewissen Factor bezeichnet:

$$x-u=G\left(B\frac{w}{c^2}-C\frac{v}{b^2}\right),$$

$$y-v=G\left(C\frac{u}{a^2}-A\frac{w}{c^2}\right),$$

$$z-w=G\left(A\frac{v}{b^2}-B\frac{u}{a^2}\right);$$

also sind

$$\frac{x-u}{B\frac{w}{c^2}-C\frac{v}{b^2}}=\frac{y-v}{C\frac{u}{a^2}-A\frac{w}{c^2}}=\frac{z-w}{A\frac{v}{b^2}-B\frac{u}{a^2}}$$

die Gleichungen der Durchschnittslinie der Ebene des Schnitts

mit der Berührungsebene des Ellipsoids in dem Punkte (uvw), folglich die Gleichungen der Berührenden der Curve, in welcher die Oberfläche des Ellipsoids von der durch die Gleichung

$$A(x-u)+B(y-v)+C(z-w)=0$$

charakterisirten Ebene geschnitten wird, im dem Punkte (uvw), wobei wir bemerken, dass von nun an diese Curve der Kürze wegen immer selbst der Schnitt genannt werden soll.

Ist nun

$$A'(x-u)+B'(y-v)+C'(z-w)=0$$

die Gleichung der Normalebene des Schnitts in dem Punkte (uvw), welche auf der Berührenden des Schnitts in diesem Punkte senkrecht steht, so ist nach den Lehren der analytischen Geometrie:

$$\frac{A'}{B\frac{w}{c^2}-C\frac{v}{b^2}}=\frac{B'}{C\frac{u}{a^2}-A\frac{w}{c^2}}=\frac{C'}{A\frac{v}{b^2}-B\frac{u}{a^2}},$$

und folglich

$$(B\frac{w}{c^2}-C\frac{v}{b^2})(x-u)+(C\frac{u}{a^2}-A\frac{w}{c^2})(y-v)+(A\frac{v}{b^2}-B\frac{u}{a^2})(z-w)=0$$

die Gleichung der Normalebene des Schnitts in dem Punkte (uvw).

Aus den Gleichungen

$$A(x-u)+B(y-v)+C(z-w)=0,$$

$$(B\frac{w}{c^2}-C\frac{v}{b^2})(x-u)+(C\frac{u}{a^2}-A\frac{w}{c^2})(y-v)+(A\frac{v}{b^2}-B\frac{u}{a^2})(z-w)=0$$

folgt, wenn G' einen gewissen Factor bezeichnet:

$$x-u=G'\{B(A\frac{v}{b^2}-B\frac{u}{a^2})-C(C\frac{u}{a^2}-A\frac{w}{c^2})\},$$

$$y-v=G'\{C(B\frac{w}{c^2}-C\frac{v}{b^2})-A(A\frac{v}{b^2}-B\frac{u}{a^2})\},$$

$$z-w=G'\{A(C\frac{u}{a^2}-A\frac{w}{c^2})-B(B\frac{w}{c^2}-C\frac{v}{b^2})\}$$

oder:

$$x-u=G'\{A(A\frac{u}{a^2}+B\frac{v}{b^2}+C\frac{w}{c^2})-(A^2+B^2+C^2)\frac{u}{a^2}\},$$

$$y-v=G'\{B(A\frac{u}{a^2}+B\frac{v}{b^2}+C\frac{w}{c^2})-(A^2+B^2+C^2)\frac{v}{b^2}\},$$

$$z-w=G'\{C(A\frac{u}{a^2}+B\frac{v}{b^2}+C\frac{w}{c^2})-(A^2+B^2+C^2)\frac{w}{c^2}\}.$$

Folglich sind

$$\frac{x-u}{A(A\frac{u}{a^2}+B\frac{v}{b^2}+C\frac{w}{c^2})-(A^2+B^2+C^2)\frac{u}{a^2}}$$

$$=\frac{y-v}{B(A\frac{u}{a^2}+B\frac{v}{b^2}+C\frac{w}{c^2})-(A^2+B^2+C^2)\frac{v}{b^2}}$$

$$=\frac{z-w}{C(A\frac{u}{a^2}+B\frac{v}{b^2}+C\frac{w}{c^2})-(A^2+B^2+C^2)\frac{w}{c^2}}$$

die Gleichungen der Durchschnittslinie der Ebene des Schnitts mit seiner Normalebene in dem Punkte (uvw), also die Gleichungen der Normale des Schnitts in diesem Punkte.

Für einen zweiten Punkt $(u_1v_1w_1)$ des Schnitts, wo also

$$A(u-u_1)+B(v-v_1)+C(w-w_1)=0,$$

$$\left(\frac{u_1}{a}\right)^2+\left(\frac{v_1}{b}\right)^2+\left(\frac{w_1}{c}\right)^2=1$$

ist, sind folglich die Gleichungen der Normale des Schnitts:

$$\frac{x-u_1}{A(A\frac{u_1}{a^2}+B\frac{v_1}{b^2}+C\frac{w_1}{c^2})-(A^2+B^2+C^2)\frac{u_1}{a^2}}$$

$$=\frac{y-v_1}{B(A\frac{u_1}{a^2}+B\frac{v_1}{b^2}+C\frac{w_1}{c^2})-(A^2+B^2+C^2)\frac{v_1}{b^2}}$$

$$=\frac{z-w_1}{C(A\frac{u_1}{a^2}+B\frac{v_1}{b^2}+C\frac{w_1}{c^2})-(A^2+B^2+C^2)\frac{w_1}{c^2}}.$$

Setzen wir

$$U=A(A\frac{u}{a^2}+B\frac{v}{b^2}+C\frac{w}{c^2})-(A^2+B^2+C^2)\frac{u}{a^2},$$

$$V=B(A\frac{u}{a^2}+B\frac{v}{b^2}+C\frac{w}{c^2})-(A^2+B^2+C^2)\frac{v}{b^2},$$

$$W=C(A\frac{u}{a^2}+B\frac{v}{b^2}+C\frac{w}{c^2})-(A^2+B^2+C^2)\frac{w}{c^2}$$

und

$$U_1=A(A\frac{u_1}{a^2}+B\frac{v_1}{b^2}+C\frac{w_1}{c^2})-(A^2+B^2+C^2)\frac{u_1}{a^2},$$

$$V_1=B(A\frac{u_1}{a^2}+B\frac{v_1}{b^2}+C\frac{w_1}{c^2})-(A^2+B^2+C^2)\frac{v_1}{b^2},$$

$$W_1=C(A\frac{u_1}{a^2}+B\frac{v_1}{b^2}+C\frac{w_1}{c^2})-(A^2+B^2+C^2)\frac{w_1}{c^2};$$

so sind

$$\frac{x-u}{U}=\frac{y-v}{V}=\frac{z-w}{W},$$

$$\frac{x-u_1}{U_1}=\frac{y-v_1}{V_1}=\frac{z-w_1}{W_1}$$

oder

$$\frac{x-u}{U}=\frac{y-v}{V}=\frac{z-w}{W},$$

$$\frac{x-u-(u_1-u)}{U_1}=\frac{y-v-(v_1-v)}{V_1}=\frac{z-w-(w_1-w)}{W_1}$$

die Gleichungen der beiden in Rede stehenden Normalen, und wenn x, y, z die Coordinaten des Durchschnittpunkts derselben bezeichnen, so müssen diese Coordinaten aus den vorstehenden Gleichungen bestimmt werden, wozu wir jetzt übergehen wollen.

Aus diesen Gleichungen erhält man zuvörderst leicht die folgenden:

$$(V-V_1)(x-u)-(U-U_1)(y-v)=U_1(v_1-v)-V_1(u_1-u),$$

$$(W-W_1)(y-v)-(V-V_1)(z-w)=V_1(w_1-w)-W_1(v_1-v),$$

$$(U-U_1)(z-w)-(W-W_1)(x-u)=W_1(u_1-u)-U_1(w_1-w);$$

also, wenn man für $x-u$, $y-v$, $z-w$ nach und nach ihre aus den Gleichungen

$$\frac{x-u}{U}=\frac{y-v}{V}=\frac{z-w}{W}$$

sich ergebenden Werthe einführt:

$$(UV_1-VU_1)(x-u)=U\{V_1(u_1-u)-U_1(v_1-v)\},$$
$$(VW_1-WV_1)(x-u)=U\{W_1(v_1-v)-V_1(w_1-w)\},$$
$$(WU_1-UW_1)(x-u)=U\{U_1(w_1-w)-W_1(u_1-u)\};$$

$$(UV_1-VU_1)(y-v)=V\{V_1(u_1-u)-U_1(v_1-v)\},$$
$$(VW_1-WV_1)(y-v)=V\{W_1(v_1-v)-V_1(w_1-w)\},$$
$$(WU_1-UW_1)(y-v)=V\{U_1(w_1-w)-W_1(u_1-u)\};$$

$$(UV_1-VU_1)(z-w)=W\{V_1(u_1-u)-U_1(v_1-v)\},$$
$$(VW_1-WV_1)(z-w)=W\{W_1(v_1-v)-V_1(w_1-w)\},$$
$$(WU_1-UW_1)(z-w)=W\{U_1(w_1-w)-W_1(u_1-u)\}.$$

Von den verschiedenen hieraus sich ergebenden Formeln wollen wir die folgenden unseren ferneren Untersuchungen zu Grunde legen:

$$\frac{x-u}{U}=\frac{y-v}{V}=\frac{z-w}{W}=\frac{V_1(u_1-u)-U_1(v_1-v)}{UV_1-VU_1}.$$

Um nun die Coordinaten des Mittelpunkts des Krümmungskreises des Schnitts in dem Punkte (uvw) zu finden, kommt es darauf an, die Gränze zu ermitteln, welcher der Bruch

$$\frac{V_1(u_1-u)-U_1(v_1-v)}{UV_1-VU_1}$$

sich immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade nähert, wenn man den Punkt $(u_1v_1w_1)$ in dem Schnitte dem Punkte (uvw) immer näher und näher rücken lässt. Denn bezeichnet man diese Gränze durch

$$\mathrm{Lim}\,\frac{V_1(u_1-u)-U_1(v_1-v)}{UV_1-VU_1}$$

und die Coordinaten des Mittelpunkts des in Rede stehenden Krümmungskreises durch X, Y, Z, so ist offenbar:

$$\frac{X-u}{U}=\frac{Y-v}{V}=\frac{Z-w}{W}=\text{Lim}\,\frac{V_1(u_1-u)-U_1(v_1-v)}{UV_1-VU_1}.$$

Um aber die Gränze

$$\text{Lim}\,\frac{V_1(u_1-u)-U_1(v_1-v)}{UV_1-VU_1}$$

zu finden, bringe man den Bruch

$$\frac{V_1(u_1-u)-U_1(v_1-v)}{UV_1-VU_1}$$

auf die Form

$$\frac{V-U\dfrac{v_1-v}{u_1-u}+(V_1-V)-(U_1-U)\dfrac{v_1-v}{u_1-u}}{U\dfrac{V_1-V}{u_1-u}-V\dfrac{U_1-U}{u_1-u}};$$

dann ist offenbar

$$\text{Lim}\,\frac{V_1(u_1-u)-U_1(v_1-v)}{UV_1-VU_1}$$

$$=\frac{V-U\,\text{Lim}\dfrac{v_1-v}{u_1-u}+\text{Lim}(V_1-V)-\text{Lim}(U_1-U).\,\text{Lim}\dfrac{v_1-v}{u_1-u}}{U\text{Lim}\dfrac{V_1-V}{u_1-u}-V\,\text{Lim}\dfrac{U_1-U}{u_1-u}}.$$

Bekanntlich ist nun nach dem Obigen

$$A(u_1-u)+B(v_1-v)+C(w_1-w)=0$$

und

$$\left(\frac{u_1}{a}\right)^2+\left(\frac{v_1}{b}\right)^2+\left(\frac{w_1}{c}\right)^2=1,\quad \left(\frac{u}{a}\right)^2+\left(\frac{v}{b}\right)^2+\left(\frac{w}{c}\right)^2=1;$$

also:

$$\frac{u_1+u}{a^2}(u_1-u)+\frac{v_1+v}{b^2}(v_1-v)+\frac{w_1+w}{c^2}(w_1-w)=0;$$

folglich, wenn G'' einen gewissen Factor bezeichnet:

$$u_1-u=G''\left\{\frac{B(w_1+w)}{c^2}-\frac{C(v_1+v)}{b^2}\right\},$$

$$v_1-v=G''\left\{\frac{C(u_1+u)}{a^2}-\frac{A(w_1+w)}{c^2}\right\},$$

$$w_1-w=G''\left\{\frac{A(v_1+v)}{b^2}-\frac{B(u_1+u)}{a^2}\right\};$$

woraus sich sogleich

$$\frac{v_1-v}{u_1-u}=\frac{\frac{C(u_1+u)}{a^2}-\frac{A(w_1+w)}{c^2}}{\frac{B(w_1+w)}{c^2}-\frac{C(v_1+v)}{b^2}},\quad \frac{w_1-w}{u_1-u}=\frac{\frac{A(v_1+v)}{b^2}-\frac{B(u_1+u)}{a^2}}{\frac{B(w_1+w)}{c^2}-\frac{C(v_1+v)}{b^2}}$$

ergiebt. Lässt man aber den Punkt $(u_1v_1w_1)$ dem Punkte (uvw) in dem Schnitte immer näher und näher rücken, so fallen die Coordinaten u_1, v_1, w_1 immer genauer und genauer beziehungsweise mit den Coordinaten u, v, w zusammen, so dass sich also die Grössen u_1+u, v_1+v, w_1+w immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade den Gränzen $2u$, $2v$, $2w$ nähern, nach dem Vorhergehenden folglich offenbar

$$\operatorname{Lim}\frac{v_1-v}{u_1-u}=\frac{\frac{Cu}{a^2}-\frac{Aw}{c^2}}{\frac{Bw}{c^2}-\frac{Cv}{b^2}},\quad \operatorname{Lim}\frac{w_1-w}{u_1-u}=\frac{\frac{Av}{b^2}-\frac{Bu}{a^2}}{\frac{Bw}{c^2}-\frac{Cv}{b^2}}$$

ist. Wenn nun aber der Punkt $(u_1v_1w_1)$ in dem Schnitte dem Punkte (uvw) immer näher und näher rückt, so fallen offenbar auch die Grössen U_1, V_1 beziehungsweise immer genauer und genauer mit den Grössen U, V zusammen, so dass also augenscheinlich

$$\operatorname{Lim}(U_1-U)=0,\quad \operatorname{Lim}(V_1-V)=0;$$

folglich nach dem Obigen

$$\operatorname{Lim}\frac{V_1(u_1-u)-U_1(v_1-v)}{UV_1-VU_1}=\frac{V-U\operatorname{Lim}\frac{v_1-v}{u_1-u}}{U\operatorname{Lim}\frac{V_1-V}{u_1-u}-V\operatorname{Lim}\frac{U_1-U}{u_1-u}}$$

ist. Ferner hat man nach dem Obigen offenbar die Formeln:

$$\frac{U_1-U}{u_1-u}=A\left(\frac{A}{a^2}+\frac{B}{b^2}\cdot\frac{v_1-v}{u_1-u}+\frac{C}{c^2}\cdot\frac{w_1-w}{u_1-u}\right)-\frac{A^2+B^2+C^2}{a^2},$$

$$\frac{V_1-V}{u_1-u}=B\left(\frac{A}{a^2}+\frac{B}{b^2}\cdot\frac{v_1-v}{u_1-u}+\frac{C}{c^2}\cdot\frac{w_1-w}{u_1-u}\right)-\frac{A^2+B^2+C^2}{b^2}\cdot\frac{v_1-v}{u_1-u};$$

also:

$$\text{Lim}\frac{U_1-U}{u_1-u}=A\left(\frac{A}{a^2}+\frac{B}{b^2}\cdot\text{Lim}\frac{v_1-v}{u_1-u}+\frac{C}{c^2}\cdot\text{Lim}\frac{w_1-w}{u_1-u}\right)$$
$$-\frac{A^2+B^2+C^2}{a^2},$$

$$\text{Lim}\frac{V_1-V}{u_1-u}=B\left(\frac{A}{a^2}+\frac{B}{b^2}\cdot\text{Lim}\frac{v_1-v}{u_1-u}+\frac{C}{c^2}\cdot\text{Lim}\frac{w_1-w}{u_1-u}\right)$$
$$-\frac{A^2+B^2+C^2}{b^2}\text{Lim}\frac{v_1-v}{u_1-u};$$

woraus sich, in Verbindung mit dem Vorhergehenden, auf ganz unzweideutige Weise ergiebt, dass man

$$\text{Lim}\frac{V_1(u_1-u)-U_1(v_1-v)}{UV_1-VU_1}=\frac{V(u_1-u)-U(v_1-v)}{U(V_1-V)-V(U_1-U)},$$

und folglich auch

$$\frac{X-u}{U}=\frac{Y-v}{V}=\frac{Z-w}{W}=\frac{V(u_1-u)-U(v_1-v)}{U(V_1-V)-V(U_1-U)}$$

setzen kann, wenn man nur in dem letzten Bruche überall

$$u_1-u=\frac{Bw}{c^2}-\frac{Cv}{b^2},$$

$$v_1-v=\frac{Cu}{a^2}-\frac{Aw}{c^2},$$

$$w_1-w=\frac{Av}{b^2}-\frac{Bu}{a^2}$$

setzt. Entwickeln wir nun aber unter dieser Voraussetzung den in Rede stehenden Bruch weiter, so erhalten wir zuvörderst ohne alle Schwierigkeit:

$$V(u_1-u)-U(v_1-v)$$
$$=C\left\{(A^2+B^2+C^2)\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)-\left(\frac{Au}{a^2}+\frac{Bv}{b^2}+\frac{Cw}{c^2}\right)^2\right\}$$

und ferner, am leichtesten, wenn wir

$$U=B\left(\frac{Av}{b^2}-\frac{Bu}{a^2}\right)-C\left(\frac{Cu}{a^2}-\frac{Aw}{c^2}\right),$$

$$V=C\left(\frac{Bw}{c^2}-\frac{Cv}{b^2}\right)-A\left(\frac{Av}{b^2}-\frac{Bu}{a^2}\right),$$

$$W=A\left(\frac{Cu}{a^2}-\frac{Aw}{c^2}\right)-B\left(\frac{Bw}{c^2}-\frac{Cv}{b^2}\right)$$

und

$$\begin{aligned}
U_1 &= B\left(\frac{Av_1}{b^2}-\frac{Bu_1}{a^2}\right)-C\left(\frac{Cu_1}{a^2}-\frac{Aw_1}{c^2}\right),\\
V_1 &= C\left(\frac{Bw_1}{c^2}-\frac{Cv_1}{b^2}\right)-A\left(\frac{Av_1}{b^2}-\frac{Bu_1}{a^2}\right),\\
W_1 &= A\left(\frac{Cu_1}{a^2}-\frac{Aw_1}{c^2}\right)-B\left(\frac{Bw_1}{c^2}-\frac{Cv_1}{b^2}\right)
\end{aligned}$$

setzen:

$$U(V_1-V)-V(U_1-U)$$

$$=C(A^2+B^2+C^2)\left\{\frac{1}{a^2}\left(\frac{Bw}{c^2}-\frac{Cv}{b^2}\right)^2+\frac{1}{b^2}\left(\frac{Cu}{a^2}-\frac{Aw}{c^2}\right)^2+\frac{1}{c^2}\left(\frac{Av}{b^2}-\frac{Bu}{a^2}\right)^2\right\},$$

bei welcher Entwickelung man die identische Gleichung

$$A\left(\frac{Bw}{c^2}-\frac{Cv}{b^2}\right)+B\left(\frac{Cu}{a^2}-\frac{Aw}{c^2}\right)+C\left(\frac{Av}{b^2}-\frac{Bu}{a^2}\right)=0$$

zu beachten hat. Also ist nach dem Obigen:

$$\frac{X-u}{U}=\frac{Y-v}{V}=\frac{Z-w}{W}$$

$$=\frac{(A^2+B^2+C^2)\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)-\left(\frac{Au}{a^2}+\frac{Bv}{b^2}+\frac{Cw}{c^2}\right)^2}{(A^2+B^2+C^2)\left\{\frac{1}{a^2}\left(\frac{Bw}{c^2}-\frac{Cv}{b^2}\right)^2+\frac{1}{b^2}\left(\frac{Cu}{a^2}-\frac{Aw}{c^2}\right)^2+\frac{1}{c^2}\left(\frac{Av}{b^2}-\frac{Bu}{a^2}\right)^2\right\}},$$

wodurch die Coordinaten des Mittelpunkts des Krümmungskreises des Schnitts in dem Punkte (uvw) bestimmt sind.

Bezeichnet R den Halbmesser des Krümmungskreises des Schnitts in dem Punkte (uvw), welcher die Entfernung der Punkte (uvw) und (XYZ) von einander ist, so ist

$$R^2=(X-u)^2+(Y-v)^2+(Z-w)^2,$$

also, weil, wie man mittelst leichter Rechnung findet,

$$U^2+V^2+W^2$$

$$=(A^2+B^2+C^2)\left\{(A^2+B^2+C^2)\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)-\left(\frac{Au}{a^2}+\frac{Bv}{b^2}+\frac{Cw}{c^2}\right)^2\right\}$$

ist:

Weil in diesem Falle

$$U = -(A^2+B^2+C^2)\frac{u}{a^2},$$

$$V = -(A^2+B^2+C^2)\frac{v}{b^2},$$

$$W = -(A^2+B^2+C^2)\frac{w}{c^2}$$

ist, so ist auch:

$$X-u = -\frac{u}{a^2}\cdot\frac{(A^2+B^2+C^2)\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)}{\frac{1}{a^2}\left(\frac{Bw}{c^2}-\frac{Cv}{b^2}\right)^2+\frac{1}{b^2}\left(\frac{Cu}{a^2}-\frac{Aw}{c^2}\right)^2+\frac{1}{c^2}\left(\frac{Av}{b^2}-\frac{Bu}{a^2}\right)^2},$$

$$Y-v = -\frac{v}{b^2}\cdot\frac{(A^2+B^2+C^2)\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)}{\frac{1}{a^2}\left(\frac{Bw}{c^2}-\frac{Cv}{b^2}\right)^2+\frac{1}{b^2}\left(\frac{Cu}{a^2}-\frac{Aw}{c^2}\right)^2+\frac{1}{c^2}\left(\frac{Av}{b^2}-\frac{Bu}{a^2}\right)^2},$$

$$Z-w = -\frac{w}{c^2}\cdot\frac{(A^2+B^2+C^2)\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)}{\frac{1}{a^2}\left(\frac{Bw}{c^2}-\frac{Cv}{b^2}\right)^2+\frac{1}{b^2}\left(\frac{Cu}{a^2}-\frac{Aw}{c^2}\right)^2+\frac{1}{c^2}\left(\frac{Av}{b^2}-\frac{Bu}{a^2}\right)^2}.$$

Für jeden beliebigen durch den Punkt (uvw) gelegten Schnitt des Ellipsoids erhält man nach dem Obigen auch leicht die folgenden bemerkenswerthen Ausdrücke:

$$\frac{X-u}{U} = \frac{Y-v}{V} = \frac{Z-w}{W}$$

$$= \frac{R(A^2+B^2+C^2)^{-\frac{1}{2}}}{\left\{(A^2+B^2+C^2)\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)-\left(\frac{Au}{a^2}+\frac{Bv}{b^2}+\frac{Cw}{c^2}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}},$$

und für die Normalschnitte:

$$R=\frac{\left\{(A^2+B^2+C^2)\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)-\left(\frac{Au}{a^2}+\frac{Bv}{b^2}+\frac{Cw}{c^2}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\left\{\frac{1}{a^2}\left(\frac{Bw}{c^2}-\frac{Cv}{b^2}\right)^2+\frac{1}{b^2}\left(\frac{Cu}{a^2}-\frac{Aw}{c^2}\right)^2+\frac{1}{c^2}\left(\frac{Av}{b^2}-\frac{Bu}{a^2}\right)^2\right\}\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Weil nach dem Obigen

$$\frac{u}{a^2}(x-u)+\frac{v}{b^2}(y-v)+\frac{w}{c^2}(z-w)=0$$

die Gleichung der Berührungsebene des Ellipsoids in dem Punkte (uvw) ist, so ist nach den Lehren der analytischen Geometrie die Normale des Ellipsoids in demselben Punkte durch die Gleichungen

$$\frac{x-u}{\frac{u}{a^2}}=\frac{y-v}{\frac{v}{b^2}}=\frac{z-w}{\frac{w}{c^2}}$$

charakterisirt; und soll nun der durch die Gleichung

$$A(x-u)+B(y-v)+C(z-w)=0$$

charakterisirte Schnitt durch diese Normale gehen, also ein Normalschnitt sein, so muss offenbar

$$\frac{Au}{a^2}+\frac{Bv}{b^2}+\frac{Cw}{c^2}=0$$

sein.

Also ist nach dem Obigen für die Normalschnitte:

$$\frac{X-u}{U}=\frac{Y-v}{V}=\frac{Z-w}{W}$$

$$=\frac{\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}}{\frac{1}{a^2}\left(\frac{Bw}{c^2}-\frac{Cv}{b^2}\right)^2+\frac{1}{b^2}\left(\frac{Cu}{a^2}-\frac{Aw}{c^2}\right)^2+\frac{1}{c^2}\left(\frac{Av}{b^2}-\frac{Bu}{a^2}\right)^2}$$

und

$$R=\frac{(A^2+B^2+C^2)\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{a^2}\left(\frac{Bw}{c^2}-\frac{Cv}{b^2}\right)^2+\frac{1}{b^2}\left(\frac{Cu}{a^2}-\frac{Aw}{c^2}\right)^2+\frac{1}{c^2}\left(\frac{Av}{b^2}-\frac{Bu}{a^2}\right)^2}.$$

Weil in diesem Falle

$$U=-(A^2+B^2+C^2)\frac{u}{a^2},$$

$$V=-(A^2+B^2+C^2)\frac{v}{b^2},$$

$$W=-(A^2+B^2+C^2)\frac{w}{c^2}$$

ist, so ist auch:

$$X-u=-\frac{u}{a^2}\cdot\frac{(A^2+B^2+C^2)\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)}{\frac{1}{a^2}\left(\frac{Bw}{c^2}-\frac{Cv}{b^2}\right)^2+\frac{1}{b^2}\left(\frac{Cu}{a^2}-\frac{Aw}{c^2}\right)^2+\frac{1}{c^2}\left(\frac{Av}{b^2}-\frac{Bu}{a^2}\right)^2},$$

$$Y-v=-\frac{v}{b^2}\cdot\frac{(A^2+B^2+C^2)\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)}{\frac{1}{a^2}\left(\frac{Bw}{c^2}-\frac{Cv}{b^2}\right)^2+\frac{1}{b^2}\left(\frac{Cu}{a^2}-\frac{Aw}{c^2}\right)^2+\frac{1}{c^2}\left(\frac{Av}{b^2}-\frac{Bu}{a^2}\right)^2},$$

$$Z-w=-\frac{w}{c^2}\cdot\frac{(A^2+B^2+C^2)\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)}{\frac{1}{a^2}\left(\frac{Bw}{c^2}-\frac{Cv}{b^2}\right)^2+\frac{1}{b^2}\left(\frac{Cu}{a^2}-\frac{Aw}{c^2}\right)^2+\frac{1}{c^2}\left(\frac{Av}{b^2}-\frac{Bu}{a^2}\right)^2}.$$

Für jeden beliebigen durch den Punkt (uvw) gelegten Schnitt des Ellipsoids erhält man nach dem Obigen auch leicht die folgenden bemerkenswerthen Ausdrücke:

$$\frac{X-u}{U}=\frac{Y-v}{V}=\frac{Z-w}{W}$$

$$=\frac{R(A^2+B^2+C^2)^{-\frac{1}{2}}}{\left\{(A^2+B^2+C^2)\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)-\left(\frac{Au}{a^2}+\frac{Bv}{b^2}+\frac{Cw}{c^2}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}},$$

und für die Normalschnitte:

$$X-u=-\frac{u}{a^2}\cdot\frac{R}{\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}}},$$

$$Y-v=-\frac{v}{b^2}\cdot\frac{R}{\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}}},$$

$$Z-w=-\frac{w}{c^2}\cdot\frac{R}{\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}}};$$

so dass also in diesem Falle

$$\frac{R\frac{u}{a^2}}{X-u}=\frac{R\frac{v}{b^2}}{Y-v}=\frac{R\frac{w}{c^2}}{Z-w}=-\sqrt{\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}}$$

ist.

Mit Rücksicht auf die Gleichung

$$\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}+\frac{w^2}{c^2}=1$$

findet man auch leicht, dass

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{Bw}{c^2}-\frac{Cv}{b^2}\right)^2+\frac{1}{b^2}\left(\frac{Cu}{a^2}-\frac{Aw}{c^2}\right)^2+\frac{1}{c^2}\left(\frac{Av}{b^2}-\frac{Bu}{a^2}\right)^2$$

$$=\frac{A^2a^2+B^2b^2+C^2c^2-(Au+Bv+Cw)^2}{a^2b^2c^2}$$

ist, und kann daher auch diesen letzteren Ausdruck für den ersteren in die obigen Formeln einführen, wenn dies in gewissen Fällen zwekmässig und vortheilhaft sein sollte.

II.

Krümmungskreise der Normalschnitte.

Durch den Punkt (uvw) wollen wir uns jetzt eine beliebige gerade Linie gezogen denken, deren Gleichungen

$$\frac{x-u}{\cos\theta}=\frac{y-v}{\cos\omega}=\frac{z-w}{\cos\overline{\omega}}$$

sein mögen, und wollen annehmen, dass die Lage der Ebene des

Normalschnitts, deren Gleichung nach dem Vorhergehenden bekanntlich

$$A(x-u)+B(y-v)+C(z-w)=0$$

ist, durch diese gerade Linie und die Normale des Ellipsoids in dem Punkte (uvw) bestimmt sei. Dann haben wir die beiden Gleichungen

$$A\cos\theta+B\cos\omega+C\cos\overline{\omega}=0,$$

$$\frac{Au}{a^2}+\frac{Bv}{b^2}+\frac{Cw}{c^2}=0;$$

und sind also offenbar berechtigt

$$A=\frac{v}{b^2}\cos\overline{\omega}-\frac{w}{c^2}\cos\omega,$$

$$B=\frac{w}{c^2}\cos\theta-\frac{u}{a^2}\cos\overline{\omega},$$

$$C=\frac{u}{a^2}\cos\omega-\frac{v}{b^2}\cos\theta$$

zu setzen.

Mit Rücksicht auf die Gleichung

$$\cos\theta^2+\cos\omega^2+\cos\overline{\omega}^2=1$$

folgt hieraus leicht:

$$A^2+B^2+C^2=\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}-\left(\frac{u}{a^2}\cos\theta+\frac{v}{b^2}\cos\omega+\frac{w}{c^2}\cos\overline{\omega}\right)^2,$$

und ferner ist:

$$\frac{Bw}{c^2}-\frac{Cv}{b^2}=\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)\cos\theta-\frac{u}{a^2}\left(\frac{u}{a^2}\cos\theta+\frac{v}{b^2}\cos\omega+\frac{w}{c^2}\cos\overline{\omega}\right),$$

$$\frac{Cu}{a^2}-\frac{Aw}{c^2}=\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)\cos\omega-\frac{v}{b^2}\left(\frac{u}{a^2}\cos\theta+\frac{v}{b^2}\cos\omega+\frac{w}{c^2}\cos\overline{\omega}\right),$$

$$\frac{Av}{b^2}-\frac{Bu}{a^2}=\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)\cos\overline{\omega}-\frac{w}{c^2}\left(\frac{u}{a^2}\cos\theta+\frac{v}{b^2}\cos\omega+\frac{w}{c^2}\cos\overline{\omega}\right);$$

nimmt man aber die durch die Gleichungen

$$\frac{x-u}{\cos\theta}=\frac{y-v}{\cos\omega}=\frac{z-w}{\cos\overline{\omega}}$$

charakterisirte gerade Linie in der durch den Punkt (uvw) gehenden Berührungsebene des Ellipsoids an, deren Gleichung bekanntlich

$$\frac{u}{a^2}(x-u)+\frac{v}{b^2}(y-v)+\frac{w}{c^2}(z-w)=0$$

ist, so ist

$$\frac{u}{a^2}\cos\theta+\frac{v}{b^2}\cos\omega+\frac{w}{c^2}\cos\overline{\omega}=0,$$

und folglich unter dieser Voraussetzung nach dem Obigen:

$$A^2+B^2+C^2=\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}$$

und

$$\frac{Bw}{c^2}-\frac{Cv}{b^2}=\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)\cos\theta,$$

$$\frac{Cv}{a^2}-\frac{Aw}{c^2}=\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)\cos\omega,$$

$$\frac{Av}{b^2}-\frac{Bu}{a^2}=\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)\cos\overline{\omega}.$$

Also ist unter der gemachten Voraussetzung

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{Bw}{c^2}-\frac{Cv}{b^2}\right)^2+\frac{1}{b^2}\left(\frac{Cv}{a^2}-\frac{Aw}{c^2}\right)^2+\frac{1}{c^2}\left(\frac{Av}{b^2}-\frac{Bu}{a^2}\right)^2$$

$$=\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)^2\left(\frac{\cos\theta^2}{a^2}+\frac{\cos\omega^2}{b^2}+\frac{\cos\overline{\omega}^2}{c^2}\right),$$

und folglich nach I. für den Normalschnitt:

$$X-u=-\frac{\frac{u}{a^2}}{\frac{\cos\theta^2}{a^2}+\frac{\cos\omega^2}{b^2}+\frac{\cos\overline{\omega}^2}{c^2}},$$

$$Y-v=-\frac{\frac{v}{b^2}}{\frac{\cos\theta^2}{a^2}+\frac{\cos\omega^2}{b^2}+\frac{\cos\overline{\omega}^2}{c^2}},$$

$$Z-w=-\frac{\frac{w}{c^2}}{\frac{\cos\theta^2}{a^2}+\frac{\cos\omega^2}{b^2}+\frac{\cos\overline{\omega}^2}{c^2}}$$

und

$$R=\frac{\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{\cos\theta^2}{a^2}+\frac{\cos\omega^2}{b^2}+\frac{\cos\overline{\omega}^2}{c^2}}.$$

Wir wollen nun zwei Normalschnitte betrachten, welche durch die beiden, durch die Gleichungen

$$\frac{x-u}{\cos\theta}=\frac{y-v}{\cos\omega}=\frac{z-w}{\cos\overline{\omega}},$$

$$\frac{x-u}{\cos\theta_1}=\frac{y-v}{\cos\omega_1}=\frac{z-w}{\cos\overline{\omega}_1}$$

charakterisirten, in der dem Punkte (uvw) entsprechenden Berührungsebene des Ellipsoids liegenden geraden Linien gelegt sind. Den 180° nicht übersteigenden Winkel, welchen die beiden Theile dieser Geraden, denen die Winkel θ, ω, $\overline{\omega}$ und θ_1, ω_1, $\overline{\omega}_1$ entsprechen, mit einander einschliessen, bezeichnen wir durch Ω_1, und die Coordinaten der Mittelpunkte der Krümmungskreise und die Krümmungshalbmesser der beiden Normalschnitte sollen respective durch X, Y, Z; X_1, Y_1, Z_1 und R, R_1 bezeichnet werden. Dann haben wir die folgenden Gleichungen:

$$\frac{u}{a^2}\cos\theta+\frac{v}{b^2}\cos\omega+\frac{w}{c^2}\cos\overline{\omega}=0,$$

$$\frac{u}{a^2}\cos\theta_1+\frac{v}{b^2}\cos\omega_1+\frac{w}{c^2}\cos\overline{\omega}_1=0$$

und

$$\cos\theta\cos\theta_1+\cos\omega\cos\omega_1+\cos\overline{\omega}\cos\overline{\omega}_1=\cos\Omega_1.$$

Setzen wir

$$\cos\theta_1=\cos\theta\cos\Omega_1+L,$$

$$\cos\omega_1=\cos\omega\cos\Omega_1+M,$$

$$\cos\overline{\omega}_1=\cos\overline{\omega}\cos\Omega_1+N;$$

multipliciren diese Gleichungen nach der Reihe mit $\frac{u}{a^2}$, $\frac{v}{b^2}$, $\frac{w}{c^2}$ und addiren sie dann zu einander, so erhalten wir nach dem Obigen die Gleichung:

$$\frac{u}{a^2}L+\frac{v}{b^2}M+\frac{w}{c^2}N=0,$$

Multipliciren wir ferner die drei obigen Gleichungen nach der Reihe mit $\cos\theta$, $\cos\omega$, $\cos\bar{\omega}$ und addiren sie dann wieder zu einander, so erhalten wir die Gleichung

$$L\cos\theta + M\cos\omega + N\cos\bar{\omega} = 0.$$

Weil aber

$$L = \cos\theta_1 - \cos\theta\cos\Omega_1,$$

$$M = \cos\omega_1 - \cos\omega\cos\Omega_1,$$

$$N = \cos\bar{\omega}_1 - \cos\bar{\omega}\cos\Omega_1$$

ist, so erhalten wir, wenn wir diese Gleichungen quadriren und dann zu einander addiren, mittelst des Obigen leicht die Gleichung:

$$L^2 + M^2 + N^2 = \sin\Omega_1{}^2.$$

Aus den beiden Gleichungen

$$\frac{u}{a^2}L + \frac{v}{b^2}M + \frac{w}{c^2}N = 0,$$

$$L\cos\theta + M\cos\omega + N\cos\bar{\omega} = 0$$

erhalten wir, wenn G_1 einen gewissen Factor bezeichnet:

$$L = G_1\left(\frac{v}{b^2}\cos\bar{\omega} - \frac{w}{c^2}\cos\omega\right),$$

$$M = G_1\left(\frac{w}{c^2}\cos\theta - \frac{u}{a^2}\cos\bar{\omega}\right),$$

$$N = G_1\left(\frac{u}{a^2}\cos\omega - \frac{v}{b^2}\cos\theta\right);$$

also, wenn man diese Ausdrücke in die Gleichung

$$L^2 + M^2 + N^2 = \sin\Omega_1{}^2$$

einführt:

$$G_1 = \frac{\sin\Omega_1}{\sqrt{\left(\frac{u}{a^2}\cos\omega - \frac{v}{b^2}\cos\theta\right)^2 + \left(\frac{v}{b^2}\cos\bar{\omega} - \frac{w}{c^2}\cos\omega\right)^2 + \left(\frac{w}{c^2}\cos\theta - \frac{u}{a^2}\cos\bar{\omega}\right)^2}},$$

oder, weil, wie man leicht findet,

$$\left(\frac{u}{a^2}\cos\omega-\frac{v}{b^2}\cos\theta\right)^2+\left(\frac{v}{b^2}\cos\overline{\omega}-\frac{w}{c^2}\cos\omega\right)^2+\left(\frac{w}{c^2}\cos\theta-\frac{u}{a^2}\cos\overline{\omega}\right)^2$$

$$=\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}-\left(\frac{u}{a^2}\cos\theta+\frac{v}{b^2}\cos\omega+\frac{w}{c^2}\cos\overline{\omega}\right)^2$$

$$=\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}$$

ist,

$$G_1=\pm\frac{\sin\Omega_1}{\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}}};$$

und setzt man also der Kürze wegen:

$$F=\frac{\frac{v}{b^2}\cos\overline{\omega}-\frac{w}{c^2}\cos\omega}{\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}}},$$

$$H=\frac{\frac{w}{c^2}\cos\theta-\frac{u}{a^2}\cos\overline{\omega}}{\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}}},$$

$$J=\frac{\frac{u}{a^2}\cos\omega-\frac{v}{b^2}\cos\theta}{\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}}};$$

so ist:

$$L=\pm F\sin\Omega_1,\quad M=\pm H\sin\Omega_1,\quad N=\pm J\sin\Omega_1;$$

folglich nach dem Obigen:

$$\cos\theta_1=\cos\theta\cos\Omega_1\pm F\sin\Omega_1,$$
$$\cos\omega_1=\cos\omega\cos\Omega_1\pm H\sin\Omega_1,$$
$$\cos\overline{\omega}_1=\cos\overline{\omega}\cos\Omega_1\pm J\sin\Omega_1.$$

Also ist

$$\frac{\cos\theta_1{}^2}{a^2}+\frac{\cos\omega_1{}^2}{b^2}+\frac{\cos\overline{\omega}_1{}^2}{c^2}=\left(\frac{\cos\theta^2}{a^2}+\frac{\cos\omega^2}{b^2}+\frac{\cos\overline{\omega}^2}{c^2}\right)\cos\Omega_1{}^2$$
$$\pm\left(\frac{F\cos\theta}{a^2}+\frac{H\cos\omega}{b^2}+\frac{J\cos\overline{\omega}}{c^2}\right)\sin 2\Omega_1$$
$$+\left(\frac{F^2}{a^2}+\frac{H^2}{b^2}+\frac{J^2}{c^2}\right)\sin\Omega_1{}^2$$

und, wie man sogleich übersieht:

$$\frac{F\cos\theta}{a^2}+\frac{H\cos\omega}{b^2}+\frac{J\cos\varpi}{c^2}=$$

$$-\frac{\frac{u}{a^2}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\cos\omega\cos\varpi+\frac{v}{b^2}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)\cos\varpi\cos\theta+\frac{w}{c^2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\cos\theta\cos\omega}{\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Wenn man aus den beiden Gleichungen

$$\frac{u}{a^2}\cos\theta+\frac{v}{b^2}\cos\omega+\frac{w}{c^2}\cos\varpi=0,$$

$$\cos\theta^2+\cos\omega^2+\cos\varpi^2=1$$

nach und nach $\cos\theta$, $\cos\omega$, $\cos\varpi$ eliminirt, so erhält man die folgenden Gleichungen:

$$\frac{u^2}{a^4}(\cos\omega^2+\cos\varpi^2)+\left(\frac{v}{b^2}\cos\omega+\frac{w}{c^2}\cos\varpi\right)^2=\frac{u^2}{a^4},$$

$$\frac{v^2}{b^4}(\cos\varpi^2+\cos\theta^2)+\left(\frac{w}{c^2}\cos\varpi+\frac{u}{a^2}\cos\theta\right)^2=\frac{v^2}{b^4},$$

$$\frac{w^2}{c^4}(\cos\theta^2+\cos\omega^2)+\left(\frac{u}{a^2}\cos\theta+\frac{v}{b^2}\cos\omega\right)^2=\frac{w^2}{c^4};$$

also, wie man sogleich übersieht:

$$\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)(\cos\omega^2+\cos\varpi^2)-\left(\frac{v}{b^2}\cos\varpi-\frac{w}{c^2}\cos\omega\right)^2=\frac{u^2}{a^4},$$

$$\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)(\cos\varpi^2+\cos\theta^2)-\left(\frac{w}{c^2}\cos\theta-\frac{u}{a^2}\cos\varpi\right)^2=\frac{v^2}{b^4},$$

$$\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)(\cos\theta^2+\cos\omega^2)-\left(\frac{u}{a^2}\cos\omega-\frac{v}{b^2}\cos\theta\right)^2=\frac{w^2}{c^4};$$

folglich

$$\left(\frac{v}{b^2}\cos\varpi-\frac{w}{c^2}\cos\omega\right)^2=\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)\sin\theta^2-\frac{u^2}{a^4},$$

$$\left(\frac{w}{c^2}\cos\theta-\frac{u}{a^2}\cos\varpi\right)^2=\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)\sin\omega^2-\frac{v^2}{b^4},$$

$$\left(\frac{u}{a^2}\cos\omega-\frac{v}{b^2}\cos\theta\right)^2=\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)\sin\varpi^2-\frac{w^2}{c^4}.$$

Weil nun

$$\frac{F^2}{a^2}+\frac{H^2}{b^2}+\frac{J^2}{c^2}$$

$$=\frac{\frac{1}{a^2}(\frac{v}{b^2}\cos\overline{\omega}-\frac{w}{c^2}\cos\omega)^2+\frac{1}{b^2}(\frac{w}{c^2}\cos\theta-\frac{u}{a^2}\cos\overline{\omega})^2+\frac{1}{c^2}(\frac{u}{a^2}\cos\omega-\frac{v}{b^2}\cos\theta)^2}{\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}}$$

ist, so findet man mittelst der vorstehenden Relationen sogleich:

$$\frac{F^2}{a^2}+\frac{H^2}{b^2}+\frac{J^2}{c^2}=\frac{\sin\theta^2}{a^2}+\frac{\sin\omega^2}{b^2}+\frac{\sin\overline{\omega}^2}{c^2}-\frac{\frac{u^2}{a^6}+\frac{v^2}{b^6}+\frac{w^2}{c^6}}{\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}}$$

oder

$$\frac{F^2}{a^2}+\frac{H^2}{b^2}+\frac{J^2}{c^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\left(\frac{\cos\theta^2}{a^2}+\frac{\cos\omega^2}{b^2}+\frac{\cos\overline{\omega}^2}{c^2}\right)-\frac{\frac{u^2}{a^6}+\frac{v^2}{b^6}+\frac{w^2}{c^6}}{\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}}.$$

Bezeichnet man das von dem Anfange der Coordinaten auf die Berührungsebene des Ellipsoids in dem Punkte (uvw), deren Gleichung bekanntlich

$$\frac{u}{a^2}(x-u)+\frac{v}{b^2}(y-v)+\frac{w}{c^2}(z-w)=0$$

ist, gefällte Perpendikel durch P, so ist nach den Lehren der analytischen Geometrie:

$$\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}=\frac{1}{P^2},\quad \left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{P};$$

und weil nun bekanntlich

$$R=\frac{\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{\cos\theta^2}{a^2}+\frac{\cos\omega^2}{b^2}+\frac{\cos\overline{\omega}^2}{c^2}},\quad R_1=\frac{\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{\cos\theta_1{}^2}{a^2}+\frac{\cos\omega_1{}^2}{b^2}+\frac{\cos\overline{\omega}_1{}^2}{c^2}}$$

ist, so ist:

$$\frac{\cos\theta^2}{a^2}+\frac{\cos\omega^2}{b^2}+\frac{\cos\overline{\omega}^2}{c^2}=\frac{1}{PR},\quad \frac{\cos\theta_1{}^2}{a^2}+\frac{\cos\omega_1{}^2}{b^2}+\frac{\cos\overline{\omega}_1{}^2}{c^2}=\frac{1}{PR_1};$$

also nach dem Obigen:

$$X-u=-\frac{u}{a^2}PR,\quad Y-v=-\frac{v}{b^2}PR,\quad Z-w=-\frac{w}{c^2}PR$$

und

$$X_1-u=-\frac{u}{a^2}PR_1,\quad Y_1-v=-\frac{v}{b^2}PR_1,\quad Z_1-w=-\frac{w}{c^2}PR_1.$$

Ferner ist nach dem Obigen:

$$\frac{F^2}{a^2}+\frac{H^2}{b^2}+\frac{J^2}{c^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{1}{PR}-\left(\frac{u^2}{a^6}+\frac{v^2}{b^6}+\frac{w^2}{c^6}\right)P^2,$$

und folglich:

$$\frac{1}{PR_1}=\frac{\cos\Omega_1^2}{PR}\pm\left(\frac{F\cos\theta}{a^2}+\frac{H\cos\omega}{b^2}+\frac{J\cos\overline{\omega}}{c^2}\right)\sin 2\Omega_1$$
$$+\left\{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{1}{PR}-\left(\frac{u^2}{a^6}+\frac{v^2}{b^6}+\frac{w^2}{c^6}\right)P^2\right\}\sin\Omega_1^2$$

oder:

$$\frac{1}{PR_1}=\frac{\cos 2\Omega_1}{PR}\pm\left(\frac{F\cos\theta}{a^2}+\frac{H\cos\omega}{b^2}+\frac{J\cos\overline{\omega}}{c^2}\right)\sin 2\Omega_1$$
$$+\left\{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\left(\frac{u^2}{a^6}+\frac{v^2}{b^6}+\frac{w^2}{c^6}\right)P^2\right\}\sin\Omega_1^2,$$

oder auch:

$$\frac{1}{P}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{\cos 2\Omega_1}{R}\right)=\pm\left(\frac{F\cos\theta}{a^2}+\frac{H\cos\omega}{b^2}+\frac{J\cos\overline{\omega}}{c^2}\right)\sin 2\Omega_1$$
$$+\left\{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\left(\frac{u^2}{a^6}+\frac{v^2}{b^6}+\frac{w^2}{c^6}\right)P^2\right\}\sin\Omega_1^2.$$

Wenn die beiden Normalschnitte auf einander senkrecht stehen, also $\Omega_1=90^0$ ist, so ergiebt sich hieraus die Gleichung:

$$\frac{1}{P}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}\right)=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\left(\frac{u^2}{a^6}+\frac{v^2}{b^6}+\frac{w^2}{c^6}\right)P^2,$$

also

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}=P\left\{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\left(\frac{u^2}{a^6}+\frac{v^2}{b^6}+\frac{w^2}{c^6}\right)P^2\right\},$$

woraus man sieht, dass die Summe der reciproken Krümmungshalbmesser jeder zwei auf einander senkrecht stehenden Normalschnitte für jeden Punkt des Ellipsoids eine constante Grösse ist, deren Werth die vorhergehende Formel angiebt.

Leicht erhält man aus dem Vorhergehenden auch für zwei auf einander senkrecht stehende Normalschnitte:

$$\frac{1}{R}=\frac{\frac{\cos\theta^2}{a^2}+\frac{\cos\omega^2}{b^2}+\frac{\cos\varpi^2}{c^2}}{\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{1}{R_1}=\frac{\frac{\sin\theta^2}{a^2}+\frac{\sin\omega^2}{b^2}+\frac{\sin\varpi^2}{c^2}}{\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}}}-\frac{\frac{u^2}{a^6}+\frac{v^2}{b^6}+\frac{w^2}{c^6}}{\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)^{\frac{3}{2}}};$$

also:

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}=\frac{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}{\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}}}-\frac{\frac{u^2}{a^6}+\frac{v^2}{b^6}+\frac{w^2}{c^6}}{\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}=\frac{\frac{\cos 2\theta}{a^2}+\frac{\cos 2\omega}{b^2}+\frac{\cos 2\varpi}{c^2}}{\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}}}+\frac{\frac{u^2}{a^6}+\frac{v^2}{b^6}+\frac{w^2}{c^6}}{\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)^{\frac{3}{2}}};$$

welche Ausdrücke jedenfalls sehr merkwürdig sind.

Mit Rücksicht auf die Gleichung

$$\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}+\frac{w^2}{c^2}=1$$

findet man auch leicht:

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{v}{b^2}\cos\varpi-\frac{w}{c^2}\cos\omega\right)^2+\frac{1}{b^2}\left(\frac{w}{c^2}\cos\theta-\frac{u}{a^2}\cos\varpi\right)^2+\frac{1}{c^2}\left(\frac{u}{a^2}\cos\omega-\frac{v}{b^2}\cos\theta\right)^2$$

$$=\frac{a^2\cos\theta^2+b^2\cos\omega^2+c^2\cos\varpi^2-(u\cos\theta+v\cos\omega+w\cos\varpi)^2}{a^2b^2c^2},$$

und folglich nach dem Obigen:

$$\frac{F^2}{a^2}+\frac{H^2}{b^2}+\frac{J^2}{c^2}$$

$$=\frac{a^2\cos\theta^2+b^2\cos\omega^2+c^2\cos\varpi^2-(u\cos\theta+v\cos\omega+w\cos\varpi)^2}{a^2b^2c^2\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)};$$

daher kann man die Krümmungshalbmesser zweier auf einander

senkrecht stehender Normalschnitte auch auf folgende Art ausdrücken:

$$R=\frac{\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{\cos\theta^2}{a^2}+\frac{\cos\omega^2}{b^2}+\frac{\cos\overline{\omega}^2}{c^2}},$$

$$R_1=\frac{a^2b^2c^2\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}}}{a^2\cos\theta^2+b^2\cos\omega^2+c^2\cos\overline{\omega}^2-(u\cos\theta+v\cos\omega+w\cos\overline{\omega})^2}.$$

Weil nach dem Obigen

$$\frac{1}{X-u}+\frac{1}{X_1-u}=-\frac{a^2}{u}\cdot\frac{1}{P}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}\right),$$

$$\frac{1}{Y-v}+\frac{1}{Y_1-v}=-\frac{b^2}{v}\cdot\frac{1}{P}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}\right),$$

$$\frac{1}{Z-w}+\frac{1}{Z_1-w}=-\frac{c^2}{w}\cdot\frac{1}{P}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}\right)$$

ist, so sind in jedem Punkte des Ellipsoids für die auf einander senkrecht stehenden Normalschnitte auch die Summen

$$\frac{1}{X-u}+\frac{1}{X_1-u},\quad \frac{1}{Y-v}+\frac{1}{Y_1-v},\quad \frac{1}{Z-w}+\frac{1}{Z_1-w}$$

constante Grössen.

Aus den obigen Formeln noch manche andere bemerkenswerthe Relationen abzuleiten, würde nicht schwer sein, wobei ich jedoch jetzt nicht länger verweilen will.

III.

Normalschnitte der grössten und kleinsten Krümmung.

Für einen beliebigen Normalschnitt ist nach II.

$$R=\frac{\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{\cos\theta^2}{a^2}+\frac{\cos\omega^2}{b^2}+\frac{\cos\overline{\omega}^2}{c^2}},$$

wo für jeden Punkt des Ellipsoids der Zähler des Bruchs auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens constant und nur der Nenner dieses Bruchs veränderlich ist. Will man also die Normal-

schnitte bestimmen, denen die grössten und kleinsten Krümmungshalbmesser entsprechen, so wird es bloss auf die Betrachtung des Nenners des obigen Bruchs ankommen, indem der Krümmungshalbmesser ein Maximum oder ein Minimum sein wird, jenachdem dieser Nenner ein Minimum oder ein Maximum ist.

Wir wollen der Kürze wegen

$$U=\frac{\cos\theta^2}{a^2}+\frac{\cos\omega^2}{b^2}+\frac{\cos\overline{\omega}^2}{c^2}$$

setzen, und diese Grösse nun differentiiren. Da wir zwischen den Winkeln θ, ω, $\overline{\omega}$ bekanntlich die zwei Gleichungen

$$\frac{u}{a^2}\cos\theta+\frac{v}{b^2}\cos\omega+\frac{w}{c^2}\cos\overline{\omega}=0,$$

$$\cos\theta^2+\cos\omega^2+\cos\overline{\omega}^2=1$$

haben, so können wir nur einen der drei in Rede stehenden Winkel, etwa θ, als unabhängige veränderliche Grösse betrachten; und differentiiren wir nun die beiden vorstehenden Gleichungen in Bezug auf diese veränderliche Grösse, so erhalten wir die beiden Gleichungen:

$$\frac{v}{b^2}\cdot\frac{\partial\cos\omega}{\partial\theta}+\frac{w}{c^2}\cdot\frac{\partial\cos\overline{\omega}}{\partial\theta}=\frac{u}{a^2}\sin\theta,$$

$$\cos\omega\frac{\partial\cos\omega}{\partial\theta}+\cos\overline{\omega}\frac{\partial\cos\overline{\omega}}{\partial\theta}=\sin\theta\cos\theta;$$

aus denen

$$\frac{\partial\cos\omega}{\partial\theta}=-\sin\theta\frac{\frac{w}{c^2}\cos\theta-\frac{u}{a^2}\cos\overline{\omega}}{\frac{v}{b^2}\cos\overline{\omega}-\frac{w}{c^2}\cos\omega},$$

$$\frac{\partial\cos\overline{\omega}}{\partial\theta}=-\sin\theta\frac{\frac{u}{a^2}\cos\omega-\frac{v}{b^2}\cos\theta}{\frac{v}{b^2}\cos\overline{\omega}-\frac{w}{c^2}\cos\omega}$$

folgt. Führt man aber diese Ausdrücke in

$$\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial U}{\partial\theta}=-\frac{\sin\theta}{a^2}\cos\theta+\frac{\cos\omega}{b^2}\cdot\frac{\partial\cos\omega}{\partial\theta}+\frac{\cos\overline{\omega}}{c^2}\cdot\frac{\partial\cos\overline{\omega}}{\partial\theta}$$

ein, so erhält man:

$$\frac{\partial U}{\partial \theta}$$

$$=\sin\theta\frac{\frac{u}{a^2}(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2})\cos\omega\cos\overline{\omega}+\frac{v}{b^2}(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2})\cos\overline{\omega}\cos\theta+\frac{w}{c^2}(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2})\cos\theta\cos\omega}{\frac{v}{b^2}\cos\overline{\omega}-\frac{w}{c^2}\cos\omega}$$

Soll also dieser Differentialquotient, wie es das Maximum und Minimum erfordern, verschwinden, so muss

$$\frac{u}{a^2}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\cos\omega\cos\overline{\omega}+\frac{v}{b^2}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)\cos\overline{\omega}\cos\theta+\frac{w}{c^2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\cos\theta\cos\omega$$
$$=0$$

sein, und zur Bestimmung der Winkel θ, ω, $\overline{\omega}$ haben wir also die drei Gleichungen:

$$\frac{u}{a^2}\cos\theta+\frac{v}{b^2}\cos\omega+\frac{w}{c^2}\cos\overline{\omega}=0,$$

$$\frac{u}{a^2}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\cos\omega\cos\overline{\omega}+\frac{v}{b^2}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)\cos\overline{\omega}\cos\theta+\frac{w}{c^2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\cos\theta\cos\omega$$
$$=0,$$

$$\cos\theta^2+\cos\omega^2+\cos\overline{\omega}^2=1$$

oder

$$\frac{u}{a^2}\cos\theta+\frac{v}{b^2}\cos\omega+\frac{w}{c^2}\cos\overline{\omega}=0,$$

$$\frac{\frac{u}{a^2}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)}{\cos\theta}+\frac{\frac{v}{b^2}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)}{\cos\omega}+\frac{\frac{w}{c^2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)}{\cos\overline{\omega}}=0,$$

$$\cos\theta^2+\cos\omega^2+\cos\overline{\omega}^2=1.$$

Für einen auf dem durch die Winkel θ, ω, $\overline{\omega}$ senkrecht stehenden Normalschnitt haben wir die Gleichungen:

$$\frac{u}{a^2}\cos\theta_1+\frac{v}{b^2}\cos\omega_1+\frac{w}{c^2}\cos\overline{\omega}_1=0,$$

$$\cos\theta\cos\theta_1+\cos\omega\cos\omega_1+\cos\overline{\omega}\cos\overline{\omega}_1=0,$$

$$\cos\theta_1{}^2+\cos\omega_1{}^2+\cos\overline{\omega}_1{}^2=1.$$

Wegen der beiden ersten dieser Gleichungen ist, wenn G_1' einen gewissen Factor bezeichnet:

$$\cos\theta_1 = G_1'\left(\frac{v}{b^2}\cos\overline{\omega} - \frac{w}{c^2}\cos\omega\right),$$

$$\cos\omega_1 = G_1'\left(\frac{w}{c^2}\cos\theta - \frac{u}{a^2}\cos\overline{\omega}\right),$$

$$\cos\overline{\omega}_1 = G_1'\left(\frac{u}{a^2}\cos\omega - \frac{v}{b^2}\cos\theta\right);$$

folglich:

$$\frac{u}{a^2}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\cos\omega_1\cos\overline{\omega}_1 + \frac{v}{b^2}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)\cos\overline{\omega}_1\cos\theta_1$$
$$+\frac{w}{c^2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\cos\theta_1\cos\omega_1$$

$$=G_1'^2\left\{\begin{array}{l}\frac{u}{a^2}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\left(\frac{w}{c^2}\cos\theta-\frac{u}{a^2}\cos\overline{\omega}\right)\left(\frac{u}{a^2}\cos\omega-\frac{v}{b^2}\cos\theta\right)\\ +\frac{v}{b^2}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)\left(\frac{u}{a^2}\cos\omega-\frac{v}{b^2}\cos\theta\right)\left(\frac{v}{b^2}\cos\overline{\omega}-\frac{w}{c^2}\cos\omega\right)\\ +\frac{w}{c^2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{v}{b^2}\cos\overline{\omega}-\frac{w}{c^2}\cos\omega\right)\left(\frac{w}{c^2}\cos\theta-\frac{u}{a^2}\cos\overline{\omega}\right)\end{array}\right\}.$$

Entwickelt man nun, nach Ausscheidung des Factors $G_1'^2$, die Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens, so erhält man für dieselbe zuvörderst den folgenden Ausdruck:

$$-\frac{u}{a^2}\cdot\frac{v}{b^2}\cdot\frac{w}{c^2}\left\{\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\cos\theta^2+\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)\cos\omega^2+\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\cos\overline{\omega}^2\right\}$$

$$+\frac{u}{a^2}\left\{-\frac{u^2}{a^4}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)+\frac{v^2}{b^4}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)+\frac{w^2}{c^4}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\right\}\cos\omega\cos\overline{\omega}$$

$$+\frac{v}{b^2}\left\{\frac{u^2}{a^4}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)-\frac{v^2}{b^4}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)+\frac{w^2}{c^4}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\right\}\cos\overline{\omega}\cos\theta$$

$$+\frac{w}{c^2}\left\{\frac{u^2}{a^4}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)+\frac{v^2}{b^4}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)-\frac{w^2}{c^4}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\right\}\cos\theta\cos\omega;$$

und weil nun

$$\cos\theta^2 = 1-(\cos\omega^2+\cos\overline{\omega}^2),$$
$$\cos\omega^2 = 1-(\cos\overline{\omega}^2+\cos\theta^2),$$
$$\cos\overline{\omega}^2 = 1-(\cos\theta^2+\cos\omega^2)$$

und

$$\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)+\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)+\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)=0$$

ist, so wird vorstehender Ausdruck unserer zu entwickelnden Grösse:

$$\frac{u}{a^2}\cdot\frac{v}{b^2}\cdot\frac{w}{c^2}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)(\cos\omega^2+\cos\overline{\omega}^2)$$

$$+\frac{u}{a^2}\cdot\frac{v}{b^2}\cdot\frac{w}{c^2}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)(\cos\overline{\omega}^2+\cos\theta^2)$$

$$+\frac{u}{a^2}\cdot\frac{v}{b^2}\cdot\frac{w}{c^2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)(\cos\theta^2+\cos\omega^2)$$

$$+\frac{u}{a^2}\left\{-\frac{u^2}{a^4}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)+\frac{v^2}{b^4}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)+\frac{w^2}{c^4}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\right\}\cos\omega\cos\overline{\omega}$$

$$+\frac{v}{b^2}\left\{\frac{u^2}{a^4}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)-\frac{v^2}{b^4}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)+\frac{w^2}{c^4}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\right\}\cos\overline{\omega}\cos\theta$$

$$+\frac{w}{c^2}\left\{\frac{u^2}{a^4}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)+\frac{v^2}{b^4}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)-\frac{w^2}{c^4}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\right\}\cos\theta\cos\omega.$$

Diesen Ausdruck bringt man aber durch weitere Entwickelung leicht auf die folgende Form:

$$\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\frac{u}{a^2}\left(\frac{v}{b^2}\cos\overline{\omega}+\frac{w}{c^2}\cos\omega\right)\left(\frac{u}{a^2}\cos\theta+\frac{v}{b^2}\cos\omega+\frac{w}{c^2}\cos\overline{\omega}\right)$$

$$+\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)\frac{v}{b^2}\left(\frac{w}{c^2}\cos\theta+\frac{u}{a^2}\cos\overline{\omega}\right)\left(\frac{u}{a^2}\cos\theta+\frac{v}{b^2}\cos\omega+\frac{w}{c^2}\cos\overline{\omega}\right)$$

$$+\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\frac{w}{c^2}\left(\frac{u}{a^2}\cos\omega+\frac{v}{b^2}\cos\theta\right)\left(\frac{u}{a^2}\cos\theta+\frac{v}{b^2}\cos\omega+\frac{w}{c^2}\cos\overline{\omega}\right)$$

$$-\frac{u^2}{a^4}\left\{\frac{u}{a^2}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\cos\omega\cos\overline{\omega}+\frac{v}{b^2}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)\cos\overline{\omega}\cos\theta + \frac{w}{c^2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\cos\theta\cos\omega\right\}$$

$$-\frac{v^2}{b^4}\left\{\frac{u}{a^2}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\cos\omega\cos\overline{\omega}+\frac{v}{b^2}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)\cos\overline{\omega}\cos\theta + \frac{w}{c^2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\cos\theta\cos\omega\right\}$$

$$-\frac{w^2}{c^4}\left\{\frac{u}{a^2}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\cos\omega\cos\overline{\omega}+\frac{v}{b^2}\left(\frac{1}{c^3}-\frac{1}{a^2}\right)\cos\overline{\omega}\cos\theta + \frac{w}{c^2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\cos\theta\cos\omega\right\},$$

woraus man, weil

$$\frac{u}{a^2}\cos\theta+\frac{v}{b^2}\cos\omega+\frac{w}{c^2}\cos\bar{\omega}=0,$$

$$\frac{u}{a^2}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\cos\omega\cos\bar{\omega}+\frac{v}{b^2}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)\cos\bar{\omega}\cos\theta+\frac{w}{c^2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\cos\theta\cos\omega$$
$$=0$$

ist, sieht, dass dieser Ausdruck verschwindet, und daher nach dem Obigen

$$\frac{u}{a^2}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\cos\omega_1\cos\bar{\omega}_1+\frac{v}{b^2}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)\cos\bar{\omega}_1\cos\theta_1$$
$$+\frac{w}{c^2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\cos\theta_1\cos\omega_1=0$$

ist.

Hieraus ergiebt sich also, dass die Gleichungen

$$\frac{u}{a^2}\cos\theta+\frac{v}{b^2}\cos\omega+\frac{w}{c^2}\cos\bar{\omega}=0,$$

$$\frac{\frac{u}{a^2}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)}{\cos\theta}+\frac{\frac{v}{b^2}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)}{\cos\omega}+\frac{\frac{w}{c^2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)}{\cos\bar{\omega}}=0,$$

$$\cos\theta^2+\cos\omega^2+\cos\bar{\omega}^2=1$$

und

$$\frac{u}{a^2}\cos\theta_1+\frac{v}{b^2}\cos\omega_1+\frac{w}{c^2}\cos\bar{\omega}_1=0,$$

$$\frac{\frac{u}{a^2}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)}{\cos\theta_1}+\frac{\frac{v}{b^2}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)}{\cos\omega_1}+\frac{\frac{w}{c^2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)}{\cos\bar{\omega}_1}=0,$$

$$\cos\theta^2_1+\cos\omega_1{}^2+\cos\bar{\omega}_1{}^2=1,$$

so wie

$$\cos\theta\cos\theta_1+\cos\omega\cos\omega_1+\cos\bar{\omega}\cos\bar{\omega}_1=0,$$

immer zusammen bestehen. Wenn also ein Normalschnitt in Bezug auf den Krümmungshalbmesser den Fall eines Maximums oder Minimums darbietet, so gilt dies immer auch für den darauf senkrecht stehenden Normalschnitt. Diese beiden auf einander senkrecht stehenden Normalschnitte, welche in Beziehung auf die Krümmungshalbmesser Maxima oder Minima darbieten, wollen

wir im Folgenden für jeden Punkt (uvw) des Ellipsoids **Hauptschnitte** nennen.

Für die beiden Hauptschnitte ist unter Voraussetzung der obigen Gleichungen:

$$R=\frac{\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{\cos\theta^2}{a^2}+\frac{\cos\omega^2}{b^2}+\frac{\cos\bar{\omega}^2}{c^2}},\quad R_1=\frac{\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{\cos\theta_1{}^2}{a^2}+\frac{\cos\omega_1{}^2}{b^2}+\frac{\cos\bar{\omega}_1{}^2}{c^2}}.$$

Weil nach dem Obigen

$$\cos\theta_1=G_1'\left(\frac{v}{b^2}\cos\bar{\omega}-\frac{w}{c^2}\cos\omega\right),$$

$$\cos\omega_1=G_1'\left(\frac{w}{c^2}\cos\theta-\frac{u}{a^2}\cos\bar{\omega}\right),$$

$$\cos\bar{\omega}_1=G_1'\left(\frac{u}{a^2}\cos\omega-\frac{v}{b^2}\cos\theta\right)$$

und

$$\cos\theta_1{}^2+\cos\omega_1{}^2+\cos\bar{\omega}_1{}^2=1$$

ist, so ist

$$G_1'^2=\frac{1}{\left(\frac{u}{a^2}\cos\omega-\frac{v}{b^2}\cos\theta\right)^2+\left(\frac{v}{b^2}\cos\bar{\omega}-\frac{w}{c^2}\cos\omega\right)^2+\left(\frac{w}{c^2}\cos\theta-\frac{u}{a^2}\cos\bar{\omega}\right)^2}$$

und folglich, wie man, mit Rücksicht auf die Gleichung

$$\frac{u}{a^2}\cos\theta+\frac{v}{b^2}\cos\omega+\frac{w}{c^2}\cos\bar{\omega}=0,$$

sogleich übersieht:

$$G_1'^2=\frac{1}{\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}}.$$

Ferner ist

$$\frac{\cos\theta_1{}^2}{a^2}+\frac{\cos\omega_1{}^2}{b^2}+\frac{\cos\bar{\omega}_1{}^2}{c^2}$$

$$=G_1'^2\left\{\frac{1}{a^2}\left(\frac{v}{b^2}\cos\bar{\omega}-\frac{w}{c^2}\cos\omega\right)^2+\frac{1}{b^2}\left(\frac{w}{c^2}\cos\theta-\frac{u}{a^2}\cos\bar{\omega}\right)^2\right.$$

$$\left.+\frac{1}{c^2}\left(\frac{u}{a^2}\cos\omega-\frac{v}{b^2}\cos\theta\right)^2\right\},$$

folglich nach II.:

$$\frac{\cos\theta_1^2}{a^2}+\frac{\cos\omega_1^2}{b^2}+\frac{\cos\varpi_1^2}{c^2}$$

$$=\frac{G_1'^2}{a^2b^2c^2}\{a^2\cos\theta^2+b^2\cos\omega^2+c^2\cos\varpi^2-(u\cos\theta+v\cos\omega+w\cos\varpi)^2\},$$

also nach dem Obigen:

$$R_1=\frac{a^2b^2c^2\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)^{\frac{3}{2}}}{a^2\cos\theta^2+b^2\cos\omega^2+c^2\cos\varpi^2-(u\cos\theta+v\cos\omega+w\cos\varpi)^2}.$$

Aus den beiden Gleichungen

$$\frac{u}{a^2}\cos\theta+\frac{v}{b^2}\cos\omega+\frac{w}{c^2}\cos\varpi=0,$$

$$\frac{u}{a^2}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\cos\omega\cos\varpi+\frac{v}{b^2}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)\cos\varpi\cos\theta$$
$$+\frac{w}{c^2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\cos\theta\cos\omega=0$$

erhält man, wenn G_1'' einen gewissen Factor bezeichnet:

$$\frac{u}{a^2}=G_1''\cos\theta\left\{\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\cos\omega^2-\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)\cos\varpi^2\right\},$$

$$\frac{v}{b^2}=G_1''\cos\omega\left\{\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\cos\varpi^2-\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\cos\theta^2\right\},$$

$$\frac{w}{c^2}=G_1''\cos\varpi\left\{\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)\cos\theta^2-\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\cos\omega^2\right\};$$

also, wenn man

$$\cos\omega^2+\cos\varpi^2=1-\cos\theta^2,$$
$$\cos\varpi^2+\cos\theta^2=1-\cos\omega^2,$$
$$\cos\theta^2+\cos\omega^2=1-\cos\varpi^2$$

setzt:

$$\frac{u}{a^2}=G_1''\cos\theta\left\{\frac{1}{a^2}-\left(\frac{\cos\theta^2}{a^2}+\frac{\cos\omega^2}{b^2}+\frac{\cos\varpi^2}{c^2}\right)\right\},$$

$$\frac{v}{b^2}=G_1''\cos\omega\left\{\frac{1}{b^2}-\left(\frac{\cos\theta^2}{a^2}+\frac{\cos\omega^2}{b^2}+\frac{\cos\varpi^2}{c^2}\right)\right\},$$

$$\frac{w}{c^2}=G_1''\cos\varpi\left\{\frac{1}{c^2}-\left(\frac{\cos\theta^2}{a^2}+\frac{\cos\omega^2}{b^2}+\frac{\cos\varpi^2}{c^2}\right)\right\};$$

also:

$$u\cos\theta = G_1''\cos\theta^2\{1 - a^2\left(\frac{\cos\theta^2}{a^2}+\frac{\cos\omega^2}{b^2}+\frac{\cos\bar{\omega}^2}{c^2}\right)\},$$

$$v\cos\omega = G_1''\cos\omega^2\{1 - b^2\left(\frac{\cos\theta^2}{a^2}+\frac{\cos\omega^2}{b^2}+\frac{\cos\bar{\omega}^2}{c^2}\right)\},$$

$$w\cos\bar{\omega} = G_1''\cos\bar{\omega}^2\{1 - c^2\left(\frac{\cos\theta^2}{a^2}+\frac{\cos\omega^2}{b^2}+\frac{\cos\bar{\omega}^2}{c^2}\right)\};$$

folglich:

$$u\cos\theta + v\cos\omega + w\cos\bar{\omega}$$

$$= G_1''\{1 - (a^2\cos\theta^2 + b^2\cos\omega^2 + c^2\cos\bar{\omega}^2)\left(\frac{\cos\theta^2}{a^2}+\frac{\cos\omega^2}{b^2}+\frac{\cos\bar{\omega}^2}{c^2}\right)\}.$$

Weil ferner

$$\frac{u}{a} = G_1'' a\cos\theta\left\{\frac{1}{a^2} - \left(\frac{\cos\theta^2}{a^2}+\frac{\cos\omega^2}{b^2}+\frac{\cos\bar{\omega}^2}{c^2}\right)\right\},$$

$$\frac{v}{b} = G_1'' b\cos\omega\left\{\frac{1}{b^2} - \left(\frac{\cos\theta^2}{a^2}+\frac{\cos\omega^2}{b^2}+\frac{\cos\bar{\omega}^2}{c^2}\right)\right\},$$

$$\frac{w}{c} = G_1'' c\cos\bar{\omega}\left\{\frac{1}{c^2} - \left(\frac{\cos\theta^2}{a^2}+\frac{\cos\omega^2}{b^2}+\frac{\cos\bar{\omega}^2}{c^2}\right)\right\}$$

ist, so erhält man, wenn man diese Gleichungen quadrirt und dann zu einander addirt, mit Rücksicht auf die Gleichungen

$$\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}+\frac{w^2}{c^2}=1, \quad \cos\theta^2+\cos\omega^2+\cos\bar{\omega}^2=1,$$

leicht:

$$G_1''^2 = -\frac{1}{\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{\cos\theta^2}{a^2}+\frac{\cos\omega^2}{b^2}+\frac{\cos\bar{\omega}^2}{c^2}\right)\\ \times\{1-(a^2\cos\theta^2+b^2\cos\omega^2+c^2\cos\bar{\omega}^2)\left(\frac{\cos\theta^2}{a^2}+\frac{\cos\omega^2}{b^2}+\frac{\cos\bar{\omega}^2}{c^2}\right)\}\end{array}\right\}}.$$

Folglich ist nach dem Obigen:

$$(u\cos\theta + v\cos\omega + w\cos\bar{\omega})^2$$

$$= -\frac{1-(a^2\cos\theta^2+b^2\cos\omega^2+c^2\cos\bar{\omega}^2)\left(\frac{\cos\theta^2}{a^2}+\frac{\cos\omega^2}{b^2}+\frac{\cos\bar{\omega}^2}{c^2}\right)}{\frac{\cos\theta^2}{a^2}+\frac{\cos\omega^2}{b^2}+\frac{\cos\bar{\omega}^2}{c^2}}$$

oder

$$(u\cos\theta+v\cos\omega+w\cos\bar{\omega})^2$$

$$=a^2\cos\theta^2+b^2\cos\omega^2+c^2\cos\bar{\omega}^2-\frac{1}{\frac{\cos\theta^2}{a^2}+\frac{\cos\omega^2}{b^2}+\frac{\cos\bar{\omega}^2}{c^2}},$$

welche Gleichung man auch unter der folgenden Form schreiben kann:

$$\frac{1}{\frac{\cos\theta^2}{a^2}+\frac{\cos\omega^2}{b^2}+\frac{\cos\bar{\omega}^2}{c^2}}$$

$$=a^2\cos\theta^2+b^2\cos\omega^2+c^2\cos\bar{\omega}^2-(u\cos\theta+v\cos\omega+w\cos\bar{\omega})^2.$$

Daher hat man nach dem Obigen die beiden folgenden sehr bemerkenswerthen Ausdrücke für die Krümmungshalbmesser der Hauptschnitte:

$$R=\frac{\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{\cos\theta^2}{a^2}+\frac{\cos\omega^2}{b^2}+\frac{\cos\bar{\omega}^2}{c^2}},$$

$$R_1=a^2b^2c^2\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\cos\theta^2}{a^2}+\frac{\cos\omega^2}{b^2}+\frac{\cos\bar{\omega}^2}{c^2}\right).$$

Es ist also

$$RR_1=a^2b^2c^2\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)^2,$$

folglich, wenn P seine aus II. bekannte Bedeutung auch hier behält:

$$RR_1=\frac{a^2b^2c^2}{P^4} \quad \text{oder} \quad RR_1P^4=a^2b^2c^2,$$

oder auch:

$$P=\sqrt[4]{\frac{a^2b^2c^2}{RR_1}},$$

welche sehr bemerkenswerthe Relation, so viel ich weiss, schon Dupin gefunden hat.

Mittelst der beiden Gleichungen:

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}=\frac{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}{\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}}}-\frac{\frac{u^2}{a^6}+\frac{v^2}{b^6}+\frac{w^2}{c^6}}{\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{1}{R}\cdot\frac{1}{R_1}=\frac{\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{b^2}\cdot\frac{1}{c^2}}{\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)^2},$$

kann man die Krümmungshalbmesser der Hauptschnitte in dem Punkte (uvw) bloss durch die Coordinaten dieses Punktes ausdrücken; denn wenn man die beiden vorstehenden Gleichungen nach einem allgemein bekannten Verfahren auflöst, so erhält man die beiden folgenden sehr merkwürdigen Ausdrücke:

$$\frac{2}{R}=\frac{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}{\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}}}-\frac{\frac{u^2}{a^6}+\frac{v^2}{b^6}+\frac{w^2}{c^6}}{\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\pm\sqrt{\left\{\frac{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}{\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}}}-\frac{\frac{u^2}{a^6}+\frac{v^2}{b^6}+\frac{w^2}{c^6}}{\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)^{\frac{3}{2}}}\right\}^2-\frac{4.\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{b^2}\cdot\frac{1}{c^2}}{\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)^2}},$$

$$\frac{2}{R_1}=\frac{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}{\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}}}-\frac{\frac{u^2}{a^6}+\frac{v^2}{b^6}+\frac{w^2}{c^6}}{\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\mp\sqrt{\left\{\frac{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}{\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}}}-\frac{\frac{u^2}{a^6}+\frac{v^2}{b^6}+\frac{w^2}{c^6}}{\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)^{\frac{3}{2}}}\right\}^2-\frac{4.\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{b^2}\cdot\frac{1}{c^2}}{\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)^2}}.$$

Wir wollen nun zunächst auch den zweiten Differentialquotienten von U in Bezug auf θ als unabhängige veränderliche Grösse entwickeln, mit Rücksicht darauf, dass der erste Differentialquotient verschwindet. Nach dem Obigen ist

$$\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial U}{\partial\theta}$$

$$=\sin\theta\frac{\frac{u}{a^2}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\cos\omega\cos\bar{\omega}+\frac{v}{b^2}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)\cos\bar{\omega}\cos\theta+\frac{w}{c^2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\cos\theta\cos\omega}{\frac{v}{b^2}\cos\bar{\omega}-\frac{w}{c^2}\cos\omega}$$

oder

$$-\frac{\frac{v}{b^2}\cos\overline{\omega}-\frac{w}{c^2}\cos\omega}{2\sin\theta}\cdot\frac{\partial U}{\partial\theta}$$

$$=\frac{\cos\theta}{a^2}\left(\frac{v}{b^2}\cos\overline{\omega}-\frac{w}{c^2}\cos\omega\right)+\frac{\cos\omega}{b^2}\left(\frac{w}{c^2}\cos\theta-\frac{u}{a^2}\cos\overline{\omega}\right)$$
$$+\frac{\cos\overline{\omega}}{c^2}\left(\frac{u}{a^2}\cos\omega-\frac{v}{b^2}\cos\theta\right).$$

Der Differentialquotient der Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens ist:

$$-\frac{\sin\theta}{a^2}\left(\frac{v}{b^2}\cos\overline{\omega}-\frac{w}{c^2}\cos\omega\right)+\frac{\cos\theta}{a^2}\left(\frac{v}{b^2}\cdot\frac{\partial\cos\overline{\omega}}{\partial\theta}-\frac{w}{c^2}\cdot\frac{\partial\cos\omega}{\partial\theta}\right)$$
$$+\frac{1}{b^2}\cdot\frac{\partial\cos\omega}{\partial\theta}\left(\frac{w}{c^2}\cos\theta-\frac{u}{a^2}\cos\overline{\omega}\right)-\frac{\cos\omega}{b^2}\left(\frac{w}{c^2}\sin\theta+\frac{u}{a^2}\cdot\frac{\partial\cos\overline{\omega}}{\partial\theta}\right)$$
$$+\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial\cos\overline{\omega}}{\partial\theta}\left(\frac{u}{a^2}\cos\omega-\frac{v}{b^2}\cos\theta\right)+\frac{\cos\overline{\omega}}{c^2}\left(\frac{u}{a^2}\cdot\frac{\partial\cos\omega}{\partial\theta}+\frac{v}{b^2}\sin\theta\right).$$

Nun ist aber nach dem Obigen:

$$\frac{\partial\cos\omega}{\partial\theta}=-\sin\theta\frac{\frac{w}{c^2}\cos\theta-\frac{u}{a^2}\cos\overline{\omega}}{\frac{v}{b^2}\cos\overline{\omega}-\frac{w}{c^2}\cos\omega},\quad \frac{\partial\cos\overline{\omega}}{\partial\theta}=-\sin\theta\frac{\frac{u}{a^2}\cos\omega-\frac{v}{b^2}\cos\theta}{\frac{v}{b^2}\cos\overline{\omega}-\frac{w}{c^2}\cos\omega};$$

also, wie man leicht findet:

$$\frac{v}{b^2}\cdot\frac{\partial\cos\overline{\omega}}{\partial\theta}-\frac{w}{c^2}\cdot\frac{\partial\cos\omega}{\partial\theta}=\frac{\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}}{\frac{v}{b^2}\cos\overline{\omega}-\frac{w}{c^2}\cos\omega}\sin\theta\cos\theta,$$

$$-\frac{w}{c^2}\sin\theta-\frac{u}{a^2}\cdot\frac{\partial\cos\overline{\omega}}{\partial\theta}=\frac{\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}}{\frac{v}{b^2}\cos\overline{\omega}-\frac{w}{c^2}\cos\omega}\sin\theta\cos\omega,$$

$$\frac{u}{a^2}\cdot\frac{\partial\cos\omega}{\partial\theta}+\frac{v}{b^2}\sin\theta=\frac{\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}}{\frac{v}{b^2}\cos\overline{\omega}-\frac{w}{c^2}\cos\omega}\sin\theta\cos\overline{\omega};$$

wobei man die Gleichung

$$\frac{u}{a^2}\cos\theta+\frac{v}{b^2}\cos\omega+\frac{w}{c^2}\cos\varpi=0$$

zu beachten hat; also ist die Summe der drei letzten Theile des obigen Differentialquotienten:

$$\frac{\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}}{\frac{v}{b^2}\cos\varpi-\frac{w}{c^2}\cos\omega}\sin\theta\left(\frac{\cos\theta^2}{a^2}+\frac{\cos\omega^2}{b^2}+\frac{\cos\varpi^2}{c^2}\right).$$

Die Summe der drei ersten Theile ist, wie man sogleich übersieht:

$$-\sin\theta\frac{\frac{1}{a^2}(\frac{v}{b^2}\cos\varpi-\frac{w}{c^2}\cos\omega)^2+\frac{1}{b^2}(\frac{w}{c^2}\cos\theta-\frac{u}{a^2}\cos\varpi)^2+\frac{1}{c^2}(\frac{u}{a^2}\cos\omega-\frac{v}{b^2}\cos\theta)^2}{\frac{v}{b^2}\cos\varpi-\frac{w}{c^2}\cos\omega},$$

also nach II.:

$$-\sin\theta\frac{a^2\cos\theta^2+b^2\cos\omega^2+c^2\cos\varpi^2-(u\cos\theta+v\cos\omega+w\cos\varpi)^2}{a^2b^2c^2\left(\frac{v}{b^2}\cos\varpi-\frac{w}{c^2}\cos\omega\right)},$$

oder, weil nach dem Obigen

$$a^2\cos\theta^2+b^2\cos\omega^2+c^2\cos\varpi^2-(u\cos\theta+v\cos\omega+w\cos\varpi)^2$$

$$=\frac{1}{\frac{\cos\theta^2}{a^2}+\frac{\cos\omega^2}{b^2}+\frac{\cos\varpi^2}{c^2}}$$

ist:

$$-\frac{\sin\theta}{a^2b^2c^2\left(\frac{v}{b^2}\cos\varpi-\frac{w}{c^2}\cos\omega\right)\left(\frac{\cos\theta^2}{a^2}+\frac{\cos\omega^2}{b^2}+\frac{\cos\varpi^2}{c^2}\right)}.$$

Mit Rücksicht darauf, dass der erste Differentialquotient von U verschwindet, ist also:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}=\frac{2\sin\theta^2}{\left(\frac{v}{b^2}\cos\varpi-\frac{w}{c^2}\cos\omega\right)^2}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{a^2b^2c^2\left(\frac{\cos\theta^2}{a^2}+\frac{\cos\omega^2}{b^2}+\frac{\cos\varpi^2}{c^2}\right)}\\-(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4})(\frac{\cos\theta^2}{a^2}+\frac{\cos\omega^2}{b^2}+\frac{\cos\varpi^2}{c^2})\end{array}\right\}.$$

Bezeichnen wir nun den Werth, welchen U erhält, wenn man θ_1, ω_1, ϖ_1 für θ, ω, ϖ setzt, durch U_1, so ist natürlich eben so:

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial \theta_1^2} = \frac{2 \sin\theta_1^2}{(\frac{v}{b^2}\cos\overline{\omega}_1 - \frac{w}{c^2}\cos\omega_1)^2} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{a^2b^2c^2\left(\dfrac{\cos\theta_1^2}{a^2}+\dfrac{\cos\omega_1^2}{b^2}+\dfrac{\cos\overline{\omega}_1^2}{c^2}\right)} \\ -(\dfrac{u^2}{a^4}+\dfrac{v^2}{b^4}+\dfrac{w^2}{c^4})(\dfrac{\cos\theta_1^2}{a^2}+\dfrac{\cos\omega_1^2}{b^2}+\dfrac{\cos\overline{\omega}_1^2}{c^2}) \end{array} \right\}.$$

Weil aber nach dem Obigen

$$R = \frac{\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{\cos\theta^2}{a^2}+\frac{\cos\omega^2}{b^2}+\frac{\cos\overline{\omega}^2}{c^2}} = \frac{1}{P\left(\frac{\cos\theta^2}{a^2}+\frac{\cos\omega^2}{b^2}+\frac{\cos\overline{\omega}^2}{c^2}\right)},$$

$$R_1 = \frac{\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{\cos\theta_1^2}{a^2}+\frac{\cos\omega_1^2}{b^2}+\frac{\cos\overline{\omega}_1^2}{c^2}} = \frac{1}{P\left(\frac{\cos\theta_1^2}{a^2}+\frac{\cos\omega_1^2}{b^2}+\frac{\cos\overline{\omega}_1^2}{c^2}\right)}$$

ist, so ist

$$\frac{\cos\theta^2}{a^2}+\frac{\cos\omega^2}{b^2}+\frac{\cos\overline{\omega}^2}{c^2} = \frac{1}{PR}, \quad \frac{\cos\theta_1^2}{a^2}+\frac{\cos\omega_1^2}{b^2}+\frac{\cos\overline{\omega}_1^2}{c^2} = \frac{1}{PR_1};$$

also

$$\frac{1}{a^2b^2c^2\left(\frac{\cos\theta^2}{a^2}+\frac{\cos\omega^2}{b^2}+\frac{\cos\overline{\omega}^2}{c^2}\right)} = \frac{PR}{a^2b^2c^2},$$

$$\frac{1}{a^2b^2c^2\left(\frac{\cos\theta_1^2}{a^2}+\frac{\cos\omega_1^2}{b^2}+\frac{\cos\overline{\omega}_1^2}{c^2}\right)} = \frac{PR_1}{a^2b^2c^2}.$$

Ferner ist bekanntlich

$$RR_1 = a^2b^2c^2\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)^2 = a^2b^2c^2\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)\cdot\frac{1}{P^2},$$

also:

$$\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4} = \frac{P^2RR_1}{a^2b^2c^2};$$

folglich:

$$\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)\left(\frac{\cos\theta^2}{a^2}+\frac{\cos\omega^2}{b^2}+\frac{\cos\overline{\omega}^2}{c^2}\right) = \frac{PR_1}{a^2b^2c^2},$$

$$\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)\left(\frac{\cos\theta_1^2}{a^2}+\frac{\cos\omega_1^2}{b^2}+\frac{\cos\overline{\omega}_1^2}{c^2}\right) = \frac{PR}{a^2b^2c^2}.$$

Also ist nach dem Obigen:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}=\frac{2\sin\theta^2}{\left(\frac{v}{b^2}\cos\bar{\omega}-\frac{w}{c^2}\cos\omega\right)^2}\cdot\frac{P(R-R_1)}{a^2b^2c^2},$$

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial \theta_1^2}=\frac{2\sin\theta_1^2}{\left(\frac{v}{b^2}\cos\bar{\omega}_1-\frac{w}{c^2}\cos\omega_1\right)^2}\cdot\frac{P(R_1-R)}{a^2b^2c^2}.$$

Hieraus sieht man, dass

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \text{ und } \frac{\partial^2 U_1}{\partial \theta_1^2}$$

immer entgegengesetzte Vorzeichen haben, und dass daher immer der eine der beiden Krümmungshalbmesser ein Maximum, der andere ein Minimum ist. Wenn $R>R_1$ ist, so ist U ein Minimum und U_1 ein Maximum, also R ein Maximum und R_1 ein Minimum. Wenn $R<R_1$ ist, so ist U ein Maximum und U_1 ein Minimum, also R ein Minimum und R_1 ein Maximum. Also ist immer der grössere der Krümmungshalbmesser der beiden Hauptschnitte ein Maximum, der kleinere ein Minimum, wobei man nur nicht unbeachtet zu lassen hat, dass das Maximum und Minimum hier immer in dem aus der Differentialrechnung bekannten Sinne zu nehmen ist. Analytisch kann man das Kriterium des Maximums und Minimums auf folgende Art ausdrücken:

Jenachdem die Grösse

$$\frac{1}{a^2b^2c^2\left(\frac{\cos\theta^2}{a^2}+\frac{\cos\omega^2}{b^2}+\frac{\cos\bar{\omega}^2}{c^2}\right)}$$
$$-\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)\left(\frac{\cos\theta^2}{a^2}+\frac{\cos\omega^2}{b^2}+\frac{\cos\bar{\omega}^2}{c^2}\right)$$

positiv oder negativ ist, ist R ein Maximum und R_1 ein Minimum, oder R ein Minimum und R_1 ein Maximum.

Um nun noch die Lage der Hauptschnitte im Allgemeinen zu bestimmen, ist es nöthig, die drei Gleichungen

$$\frac{u}{a^2}\cos\theta+\frac{v}{b^2}\cos\omega+\frac{w}{c^2}\cos\bar{\omega}=0,$$

$$\frac{u}{a^2}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\cos\omega\cos\bar{\omega}+\frac{v}{b^2}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)\cos\bar{\omega}\cos\theta$$
$$+\frac{w}{c^2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\cos\theta\cos\omega=0,$$

$$\cos\theta^2 + \cos\omega^2 + \cos\overline{\omega}^2 = 1$$

in Bezug auf θ, ω, $\overline{\omega}$ als unbekannte Grössen aufzulösen. Zu dem Ende stelle man die zwei ersten dieser drei Gleichungen auf folgende Art dar:

$$\frac{u}{a^2}\cos\theta + \frac{v}{b^2}\cos\omega + \frac{w}{c^2}\cos\overline{\omega} = 0,$$

$$\frac{w}{c^2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\cos\omega.\cos\theta + \frac{u}{a^2}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\cos\overline{\omega}.\cos\omega$$
$$+\frac{v}{b^2}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)\cos\theta.\cos\overline{\omega} = 0.$$

Dann ist, wenn G_2 einen gewissen Factor bezeichnet:

$$\cos\theta = G_2\left\{\frac{v^2}{b^4}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)\cos\theta - \frac{w}{c^2}\cdot\frac{u}{a^2}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\cos\overline{\omega}\right\},$$

$$\cos\omega = G_2\left\{\frac{w^2}{c^4}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\cos\omega - \frac{u}{a^2}\cdot\frac{v}{b^2}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)\cos\theta\right\},$$

$$\cos\overline{\omega} = G_2\left\{\frac{u^2}{a^4}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\cos\overline{\omega} - \frac{v}{b^2}\cdot\frac{w}{c^2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\cos\omega\right\};$$

also:

$$\left\{1-G_2\frac{v^2}{b^4}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)\right\}\cos\theta = -G_2\frac{w}{c^2}\cdot\frac{u}{a^2}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\cos\overline{\omega},$$

$$\left\{1-G_2\frac{w^2}{c^4}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\right\}\cos\omega = -G_2\frac{u}{a^2}\cdot\frac{v}{b^2}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)\cos\theta,$$

$$\left\{1-G_2\frac{u^2}{a^4}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\right\}\cos\overline{\omega} = -G_2\frac{v}{b^2}\cdot\frac{w}{c^2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\cos\omega.$$

Multiplicirt man auf beiden Seiten der Gleichheitszeichen und hebt auf, was sich aufheben lässt, so erhält man zur Bestimmung von G_2 die folgende Gleichung:

$$G_2{}^3\frac{u^2}{a^4}\cdot\frac{v^2}{b^4}\cdot\frac{w^2}{c^4}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)$$
$$=-\left\{1-G_2\frac{u^2}{a^4}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\right\}\left\{1-G_2\frac{v^2}{b^4}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)\right\}\left\{1-G_2\frac{w^2}{c^4}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\right\},$$

welche aber durch weitere Entwickelung sogleich auf die folgende Form gebracht wird:

$$1-\left\{\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\frac{u^2}{a^4}+\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)\frac{v^2}{b^4}+\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\frac{w^2}{c^4}\right\}G_2$$
$$+\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)\frac{u^2}{a^4}\cdot\frac{v^2}{b^4}\\ +\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\frac{w^2}{c^4}\cdot\frac{u^2}{a^4}\\ +\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\frac{v^2}{b^4}\cdot\frac{w^2}{c^4}\end{array}\right\}G_2^2 = 0.$$

Durch Auflösung dieser Gleichung des zweiten Grades erhält man, wenn der Kürze wegen

$$\mathfrak{A}=\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\frac{u^2}{a^4}+\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)\frac{v^2}{b^4}+\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\frac{w^2}{c^4},$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}= &\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)^2\frac{u^4}{a^8}+\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)^2\frac{v^4}{b^8}+\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)^2\frac{w^4}{c^8}\\ &-2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)\frac{u^2}{a^4}\cdot\frac{v^2}{b^4}\\ &-2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\frac{v^2}{b^4}\cdot\frac{w^2}{c^4}\\ &-2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\frac{w^2}{c^4}\cdot\frac{u^2}{a^4},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}= &\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)\frac{u^2}{a^4}\cdot\frac{v^2}{b^4}\\ &+\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\frac{v^2}{b^4}\cdot\frac{w^2}{c^4}\\ &+\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\frac{w^2}{c^4}\cdot\frac{u^2}{a^4}\end{aligned}$$

gesetzt wird:

$$G_2=\frac{\mathfrak{A}\pm\sqrt{\mathfrak{B}}}{2\mathfrak{C}}.$$

Hat man aber G_2 mittelst dieser Formel gefunden, so lassen sich θ, ω, $\overline{\omega}$ auf verschiedene Arten finden. Denn nach dem Obigen ist z. B.

$$\cos\omega = -\frac{G_2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)\frac{u}{a^2}\cdot\frac{v}{b^2}}{1-G_2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\frac{w^2}{c^4}}\cos\theta,$$

$$\cos\overline{\omega} = -\frac{1-G_2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)\frac{v^2}{b^4}}{G_2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\frac{w}{c^2}\cdot\frac{u}{a^2}}\cos\theta;$$

also, wenn man der Kürze wegen

$$\varkappa = -\frac{G_2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)\frac{u}{a^2}\cdot\frac{v}{b^2}}{1-G_2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\frac{w^2}{c^4}}, \quad \lambda = -\frac{1-G_2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)\frac{v^2}{b^4}}{G_2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\frac{w}{c^2}\cdot\frac{u}{a^2}}$$

setzt:

$$\cos\omega = \varkappa\cos\theta, \quad \cos\overline{\omega} = \lambda\cos\theta;$$

folglich, wegen der Gleichung

$$\cos\theta^2 + \cos\omega^2 + \cos\overline{\omega}^2 = 1,$$

mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$\cos\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\varkappa^2+\lambda^2}},$$

$$\cos\omega = \pm\frac{\varkappa}{\sqrt{1+\varkappa^2+\lambda^2}},$$

$$\cos\overline{\omega} = \pm\frac{\lambda}{\sqrt{1+\varkappa^2+\lambda^2}}.$$

Auch ist nach dem Obigen:

$$\cos\omega = -\frac{G_2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)\frac{u}{a^2}\cdot\frac{v}{b^2}}{1-G_2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\frac{w^2}{c^4}}\cos\theta,$$

$$\cos\overline{\omega} = \frac{G_2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)\frac{u}{a^2}\cdot\frac{v}{b^2}}{1-G_2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\frac{w^2}{c^4}}\cdot\frac{G_2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\frac{v}{b^2}\cdot\frac{w}{c^2}}{1-G_2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\frac{u^2}{a^4}}\cos\theta;$$

also, wenn man

$$\varkappa=-\frac{G_2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)\frac{u}{a^2}\cdot\frac{v}{b^2}}{1-G_2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\frac{w^2}{c^4}},\quad \mu=-\frac{G_2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\frac{v}{b^2}\cdot\frac{w}{c^2}}{1-G_2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\frac{u^2}{a^4}}$$

setzt:

$$\cos\omega=\varkappa\cos\theta,\quad \cos\overline{\omega}=\varkappa\mu\cos\theta;$$

folglich auf ähnliche Art wie vorher, mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$\cos\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\varkappa^2(1+\mu^2)}},$$

$$\cos\omega=\pm\frac{\varkappa}{\sqrt{1+\varkappa^2(1+\mu^2)}},$$

$$\cos\overline{\omega}=\pm\frac{\varkappa\mu}{\sqrt{1+\varkappa^2(1+\mu^2)}},$$

Ob man in diesen und den vorhergehenden Formeln die oberen oder unteren Zeichen nimmt, ist an sich ganz gleichgültig, da man dadurch doch nur eine durch den Punkt (uvw) gehende gerade Linie erhält, wogegen aber wohl kaum noch besonders darauf hingewiesen zu werden braucht, dass, wegen des doppelten in dem Ausdrucke von G_2 vorkommenden Zeichens, diese Grösse immer zwei Werthe hat, die, wie auf folgende Art leicht gezeigt werden kann, beide reell sind.

Man übersieht nämlich leicht, dass die oben durch $\mathfrak{B}$ bezeichnete Grösse jederzeit positiv ist oder verschwindet, welcher letztere Fall offenbar immer eintritt, wenn die Grössen a, b, c alle drei unter einander gleich sind. Sind dagegen nur zwei dieser Grössen einander gleich, etwa $b=c$, so ist nach dem Obigen

$$\mathfrak{B}=(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2})^2\frac{v^4}{b^8}+(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2})^2\frac{w^4}{c^8}-2(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2})(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2})\frac{v^2}{b^4}\cdot\frac{w^2}{c^4},$$

also

$$\mathfrak{B}=\{(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2})\frac{v^2}{b^4}-(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2})\frac{w^2}{c^4}\}^2,$$

und daher positiv. Sind endlich die Grössen a, b, c alle drei unter einander ungleich, so wollen wir annehmen, dass

$$\frac{1}{a^2}<\frac{1}{b^2}<\frac{1}{c^2}$$

sei; dann ist

$$\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}<0,\quad \frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}>0;$$

$$\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}>0,\quad \frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}<0;$$

$$\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}<0,\quad \frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}<0;$$

also

$$\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)<0,$$

$$\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)<0,$$

$$\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)>0;$$

und da nun

$$\mathfrak{B}=\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)^2\frac{v^4}{b^4}+\left\{\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\frac{u^2}{a^4}-\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\frac{w^2}{c^4}\right\}^2$$

$$-2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)\frac{u^2}{a^4}\cdot\frac{v^2}{b^4}-2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\frac{v^2}{b^4}\cdot\frac{w^2}{c^4}$$

ist, so ist $\mathfrak{B}$ offenbar auch in diesem Falle stets positiv.

Wenn ich auch die vorhergehende Auflösung der drei Gleichungen

$$\frac{u}{a^2}\cos\theta+\frac{v}{b^2}\cos\omega+\frac{w}{c^2}\cos\bar{\omega}=0,$$

$$\frac{u}{a^2}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\cos\omega\cos\bar{\omega}+\frac{v}{b^2}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)\cos\bar{\omega}\cos\theta+\frac{w}{c^2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\cos\theta\cos\omega$$
$$=0,$$

$$\cos\theta^2+\cos\omega^2+\cos\bar{\omega}^2=1$$

die zugleich einer allgemeineren Anwendung fähig ist, für besonders einfach und elegant halte, so führt dieselbe doch nicht zu ganz symmetrisch gebildeten Formeln, und ich will daher jetzt noch eine andere Auflösung der drei obigen Gleichungen geben.

Die beiden ersten Gleichungen kann man unter der folgenden Form darstellen:

$$\frac{u}{a^2}+\frac{v}{b^2}\cdot\frac{\cos\omega}{\cos\theta}+\frac{w}{c^2}\cdot\frac{\cos\overline{\omega}}{\cos\theta}=0,$$

$$\frac{u}{a^2}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\frac{\cos\omega}{\cos\theta}\cdot\frac{\cos\overline{\omega}}{\cos\theta}+\frac{v}{b^2}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)\frac{\cos\overline{\omega}}{\cos\theta}+\frac{w}{c^2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\frac{\cos\omega}{\cos\theta}=0;$$

und bestimmt man nun aus diesen beiden Gleichungen zuerst mittelst einer leicht aufzulösenden quadratischen Gleichung den Bruch $\frac{\cos\omega}{\cos\theta}$, und dann den Bruch $\frac{\cos\overline{\omega}}{\cos\theta}$ mittelst der Formel

$$\frac{\cos\overline{\omega}}{\cos\theta}=-\frac{c^2}{w}\left(\frac{u}{a^2}+\frac{v}{b^2}\cdot\frac{\cos\omega}{\cos\theta}\right);$$

so erhält man, wenn der Kürze wegen jetzt

$$\begin{aligned}\Omega= & \frac{u^4}{a^8}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)^2+\frac{v^4}{b^8}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)^2+\frac{w^4}{c^8}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)^2\\ & -2\frac{u^2}{a^4}\cdot\frac{v^2}{b^4}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)\\ & -2\frac{v^2}{b^4}\cdot\frac{w^2}{c^4}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\\ & -2\frac{w^2}{c^4}\cdot\frac{u^2}{a^4}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)^{*)}\end{aligned}$$

gesetzt wird, leicht die folgenden Ausdrücke:

$$\frac{\cos\omega}{\cos\theta}=\frac{-\frac{u^2}{a^4}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)-\frac{v^2}{b^4}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)+\frac{w^2}{c^4}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\pm\sqrt{\Omega}}{2\frac{u}{a^2}\cdot\frac{v}{b^2}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)},$$

$$\frac{\cos\overline{\omega}}{\cos\theta}=\frac{-\frac{u^2}{a^4}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)+\frac{v^2}{b^4}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)-\frac{w^2}{c^4}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\mp\sqrt{\Omega}}{2\frac{u}{a^2}\cdot\frac{w}{c^2}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)};$$

in denen die oberen und unteren Zeichen sich auf einander beziehen. Setzen wir der Kürze wegen

$$\Theta=-\frac{u^2}{a^4}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)-\frac{v^2}{b^4}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)+\frac{w^2}{c^4}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right),$$

$$\Theta_1=-\frac{u^2}{a^4}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)+\frac{v^2}{b^4}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)-\frac{w^2}{c^4}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right);$$

*) Dieselbe Grösse, welche vorher durch 𝔅 bezeichnet wurde. Ω ist hier der besseren Symmetrie mit dem folgenden Θ wegen gewählt worden.

so ist mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$\frac{\cos\omega}{\cos\theta}=\frac{\Theta\pm\sqrt{\Omega}}{2\frac{u}{a^2}\cdot\frac{v}{b^2}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)},\qquad \frac{\cos\overline{\omega}}{\cos\theta}=\frac{\Theta_1\mp\sqrt{\Omega}}{2\frac{u}{a^2}\cdot\frac{w}{c^2}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)}.$$

Mittelst leichter Rechnung findet man aber:

$$\Theta^2-\Omega=4\frac{u^2}{a^4}\cdot\frac{v^2}{b^4}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right),$$

$$\Theta_1{}^2-\Omega=4\frac{u^2}{a^4}\cdot\frac{w^2}{c^4}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right);$$

daher kann man auch setzen:

$$\frac{\cos\omega}{\cos\theta}=\frac{2\frac{u}{a^2}\cdot\frac{v}{b^2}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)}{\Theta\mp\sqrt{\Omega}},\qquad \frac{\cos\overline{\omega}}{\cos\theta}=\frac{2\frac{u}{a^2}\cdot\frac{w}{c^2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)}{\Theta_1\pm\sqrt{\Omega}};$$

immer mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander.

Setzen wir aber

$$S=-\frac{u^2}{a^4}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right),$$

$$T=\frac{v^2}{b^4}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)-\frac{w^2}{c^4}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\mp\sqrt{\Omega};$$

so ist, wie leicht erhellet:

$$\Theta\pm\sqrt{\Omega}=S-T,\qquad \Theta_1\mp\sqrt{\Omega}=S+T;$$

$$\frac{\cos\omega}{\cos\theta}=\frac{S-T}{2\frac{u}{a^2}\cdot\frac{v}{b^2}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)},\qquad \frac{\cos\overline{\omega}}{\cos\theta}=\frac{S+T}{2\frac{u}{a^2}\cdot\frac{w}{c^2}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)};$$

und weil nun

$$\cos\theta^2=\frac{1}{1+\left(\frac{\cos\omega}{\cos\theta}\right)^2+\left(\frac{\cos\overline{\omega}}{\cos\theta}\right)^2}$$

ist, so ist, wie man leicht findet:

$$\cos\theta=\frac{2\frac{u}{a^2}\cdot\frac{v}{b^2}\cdot\frac{w}{c^2}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)}{\sqrt{4\frac{u^2}{a^4}\cdot\frac{v^2}{b^4}\cdot\frac{w^2}{c^4}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)^2+\frac{v^2}{b^4}(S+T)^2+\frac{w^2}{c^4}(S-T)^2}},$$

$$\cos\omega=\frac{\frac{w}{c^2}(S-T)}{\sqrt{4\frac{u^2}{a^4}\cdot\frac{v^2}{b^4}\cdot\frac{w^2}{c^4}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)^2+\frac{v^2}{b^4}(S+T)^2+\frac{w^2}{c^4}(S-T)^2}},$$

$$\cos\varpi=\frac{\frac{v}{b^2}(S+T)}{\sqrt{4\frac{u^2}{a^4}\cdot\frac{v^2}{b^4}\cdot\frac{w^2}{c^4}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)^2+\frac{v^2}{b^4}(S+T)^2+\frac{w^2}{c^4}(S-T)^2}};$$

wo wir aus leicht aus dem Obigen ersichtlichen Gründen diese Cosinus nicht noch mit doppelten Vorzeichen genommen haben.

Entwickelt man aber die Grösse unter dem Wurzelzeichen im Nenner, so findet man nach verschiedenen, an sich keiner Schwierigkeit unterliegenden Transformationen, dass dieselbe auf den folgenden merkwürdigen Ausdruck gebracht werden kann:

$$2\left(\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)\Omega\mp2\left\{\begin{array}{l}\left[\frac{v^2}{b^4}\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)-\frac{u^2}{a^4}\cdot\frac{w^2}{c^4}\right]\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)\\+\left[\frac{w^2}{c^4}\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)-\frac{u^2}{a^4}\cdot\frac{v^2}{b^4}\right]\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)\end{array}\right\}\sqrt{\Omega},$$

so dass also

$$\cos\theta=$$

$$\frac{\frac{u}{a^2}\cdot\frac{v}{b^2}\cdot\frac{w}{c^2}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\sqrt{2}}{\sqrt{\left(\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)\Omega\mp\left\{\begin{array}{l}\left[\frac{v^2}{b^4}\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)-\frac{u^2}{a^4}\cdot\frac{w^2}{c^4}\right]\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)\\+\left[\frac{w^2}{c^4}\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)-\frac{u^2}{a^4}\cdot\frac{v^2}{b^4}\right]\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)\end{array}\right\}\sqrt{\Omega}}},$$

$$\cos\omega=$$

$$\frac{\frac{w}{c^2}(S-T)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\left(\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)\Omega\mp\left\{\begin{array}{l}\left[\frac{v^2}{b^4}\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)-\frac{u^2}{a^4}\cdot\frac{w^2}{c^4}\right]\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)\\+\left[\frac{w^2}{c^4}\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)-\frac{u^2}{a^4}\cdot\frac{v^2}{b^4}\right]\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)\end{array}\right\}\sqrt{\Omega}}},$$

$$\cos\bar{\omega} =$$

$$\frac{\frac{v}{b^2}(S+T)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\left(\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)\Omega \mp \left\{\begin{array}{l}\left[\frac{v^2}{b^4}\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)-\frac{u^2}{a^4}\cdot\frac{w^2}{c^4}\right]\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)\\ +\left[\frac{w^2}{c^4}\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)-\frac{u^2}{a^4}\cdot\frac{v^2}{b^4}\right]\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)\end{array}\right\}\sqrt{\Omega}}}.$$

Natürlich könnte man durch blosse Verwechselung der Buchstaben für $\cos\omega$ und $\cos\bar{\omega}$ leicht ganz ähnlich gestaltete Formeln wie für $\cos\theta$ angeben; dann würde aber immer noch eine besondere Untersuchung über die Beziehung der Zeichen in den Formeln für $\cos\theta$, $\cos\omega$, $\cos\bar{\omega}$ nöthig sein, die sich aber nicht ohne einige Weitläufigkeit anstellen lassen dürfte, weshalb dieselbe, um dieser Abhandlung nicht eine zu grosse Ausdehnung zu geben, für jetzt unterbleiben mag, da die obigen Formeln zur völlig unzweideutigen Bestimmung der Winkel θ, ω, $\bar{\omega}$ in allen Fällen in der That vollständig hinreichen, wie durch das folgende Beispiel näher erläutert werden wird. Uebrigens bitte ich die in einem der nächsten Hefte erscheinenden ganz allgemeinen Untersuchungen über die Flächen zu vergleichen.

IV.

Das Rotations-Ellipsoid.

Wenn wir die Axe der z als Drehungaxe annehmen, so ist im Vorhergehenden $a=b$ zu setzen. Dadurch wird, wie man leicht findet:

$$\Omega = \left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)^2 \cdot \frac{(u^2+v^2)^2}{a^8},$$

und wir können also

$$\sqrt{\Omega} = \left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right) \cdot \frac{u^2+v^2}{a^4}$$

setzen.

Nehmen wir nun zuvörderst im Obigen die oberen Zeichen, so ist:

$$S-T = \frac{2v^2}{a^4}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right), \qquad S+T = -\frac{2(u^2+v^2)}{a^4}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right);$$

und die Grösse unter dem Wurzelzeichen in den Nennern der obigen Ausdrücke von $\cos\theta$, $\cos\omega$, $\cos\overline{\omega}$ ist, wie man leicht findet:

$$2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)^2\cdot\frac{u^2+v^2}{a^4}\cdot\frac{v^2}{b^4}\left(\frac{u^2+v^2}{a^4}+\frac{w^2}{c^4}\right);$$

also ist:

$$\cos\theta=\frac{uw}{c^2\sqrt{(u^2+v^2)\left(\frac{u^2+v^2}{a^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)}},$$

$$\cos\omega=\frac{vw}{c^2\sqrt{(u^2+v^2)\left(\frac{u^2+v^2}{a^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)}},$$

$$\cos\overline{\omega}=-\frac{u^2+v^2}{a^2\sqrt{(u^2+v^2)\left(\frac{u^2+v^2}{a^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)}};$$

oder:

$$\cos\theta=\frac{a^2uw}{\sqrt{(u^2+v^2)\{c^4(u^2+v^2)+a^4w^2\}}},$$

$$\cos\omega=\frac{a^2vw}{\sqrt{(u^2+v^2)\{c^4(u^2+v^2)+a^4w^2\}}},$$

$$\cos\overline{\omega}=-\frac{c^2(u^2+v^2)}{\sqrt{(u^2+v^2)\{c^4(u^2+v^2)+a^4w^2\}}}.$$

Weil

$$u^2+v^2=\frac{a^2(c^2-w^2)}{c^2},$$

$$(u^2+v^2)\{c^4(u^2+v^2)+a^4w^2\}=\frac{a^4(c^2-w^2)\{c^4+(a^2-c^2)w^2\}}{c^2}$$

ist; so kann man auch setzen:

$$\cos\theta=\frac{cuw}{\sqrt{(c^2-w^2)\{c^4+(a^2-c^2)w^2\}}},$$

$$\cos\omega=\frac{cvw}{\sqrt{(c^2-w^2)\{c^4+(a^2-c^2)w^2\}}},$$

$$\cos\overline{\omega}=-\frac{c(c^2-w^2)}{\sqrt{(c^2-w^2)\{c^4+(a^2-c^2)w^2\}}}.$$

Nehmen wir ferner im Obigen die unteren Zeichen, so ist:

$$S-T=-\frac{2u^2}{a^4}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right),\quad S+T=0;$$

und die Grösse unter dem Wurzelzeichen in den Nennern der obigen Ausdrücke von $\cos\theta$, $\cos\omega$, $\cos\overline{\omega}$ ist, wie man leicht findet:

$$2\cdot\frac{u^2}{a^4}\cdot\frac{w^2}{c^4}\cdot\frac{u^2+v^2}{a^4}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)^2.$$

Also ist, wenn wir die Werthe von θ, ω, $\overline{\omega}$ jetzt durch θ_1, ω_1, $\overline{\omega}_1$ bezeichnen:

$$\cos\theta_1=\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}},\quad \cos\omega_1=-\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}},\quad \cos\overline{\omega}_1=0.$$

Bekanntlich ist nach dem Obigen

$$R=\frac{\left(\frac{u^2+v^2}{a^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{\cos\theta^2+\cos\omega^2}{a^2}+\frac{\cos\overline{\omega}^2}{c^2}};$$

also ist, wie man mittelst des Vorhergehenden leicht findet:

$$R=\left(\frac{u^2+v^2}{a^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{c^4(u^2+v^2)+a^4w^2}{a^2c^2}$$

$$=\frac{\{c^4(u^2+v^2)+a^4w^2\}^{\frac{3}{2}}}{a^4c^4},$$

wo man bei der Entwickelung dieser Formel zu beachten hat, dass

$$c^2(u^2+v^2)+a^2w^2=a^2c^2$$

ist.

Ebenso ist nach dem Obigen

$$R_1-\frac{\left(\frac{u^2+v^2}{a^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{\cos\theta_1{}^2+\cos\omega_1{}^2}{a^2}+\frac{\cos\overline{\omega}_1{}^2}{c^2}};$$

also, wie man mittelst des Obigen leicht findet:

$$R_1=a^2\left(\frac{u^2+v^2}{a^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{\{c^4(u^2+v^2)+a^4w^2\}^{\frac{1}{2}}}{c^2}.$$

Mittelst leichter Rechnung findet man, weil

$$u^2+v^2=\frac{a^2(c^2-w^2)}{c^2}$$

ist:

$$R-R_1=\left(\frac{u^2+v^2}{a^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}}.\frac{(c^2-a^2)(c^2-w^2)}{c^2},$$

und weil nun bei dem Ellipsoid c^2-w^2 nie negativ sein kann, so hat $R-R_1$ gleiches Vorzeichen mit c^2-a^2, woraus sich nach dem, was in III. bewiesen worden ist, Folgendes ergiebt:

Wenn $a>c$ ist, so ist R ein Minimum und R_1 ein Maximum; wenn dagegen $a<c$ ist, so ist R ein Maximum und R_1 ein Minimum.

Es ist klar, dass es im vorliegenden Falle verstattet ist, $v=0$ zu setzen. Dadurch erhält man:

$$\cos\theta=\frac{a^2w}{\sqrt{c^4u^2+a^4w^2}},\quad \cos\omega=0,\quad \cos\overline{\omega}=-\frac{c^2u}{\sqrt{c^4u^2+a^4w^2}};$$

$$R=\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}}.\frac{c^4u^2+a^4w^2}{a^2c^2}=\frac{(c^4u^2+a^4w^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4c^4};$$

und

$$\cos\theta_1=0,\quad \cos\omega_1=\pm1,\quad \cos\overline{\omega}_1=0;$$

$$R_1=a^2\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{(c^4u^2+a^4w^2)^{\frac{1}{2}}}{c^2}.$$

Also ist

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}=\frac{a^4c^4}{(c^4u^2+a^4w^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{c^2}{(c^4u^2+a^4w^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{1}{R}\cdot\frac{1}{R_1}=\frac{a^4c^6}{(c^4u^2+a^4w^2)^2}.$$

Aus den in III. für das allgemeine dreiaxige Ellipsoid bewiesenen Relationen ergiebt sich, wenn man $a=b$, $v=0$ setzt:

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}=\frac{\frac{2}{a^2}+\frac{1}{c^2}}{\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}}}-\frac{\frac{u^2}{a^6}+\frac{w^2}{c^6}}{\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{1}{R}\cdot\frac{1}{R_1}=\frac{\frac{1}{a^4}\cdot\frac{1}{c^2}}{\left(\frac{u^2}{a^4}+\frac{w^2}{c^4}\right)^2};$$

und mittelst leichter Rechnung lässt sich, wenn man nur die Gleichung

$$\frac{u^2}{a^2}+\frac{w^2}{c^2}=1$$

berücksichtigt, zeigen, dass die vorstehenden Relationen in der That vollständig mit den obigen übereinstimmen.

Die obigen Resultate wird man rücksichtlich der Lage der Hauptschnitte leicht geometrisch zu deuten verstehen, was ich daher hier nicht weiter erläutern will.

Eben so unterlasse ich der Kürze wegen die keiner Schwierigkeit unterliegende Ableitung noch mancher anderer merkwürdiger Relationen aus dem Obigen, weil dieselben dem grössern Theile nach von anderen Schriftstellern schon für Flächen überhaupt bewiesen worden sind.

II.

Ueber die Segmente der Ellipse und Hyperbel, des Ellipsoides und des zweitheiligen Hyperboloides.

Von

Herrn *Franz Unferdinger*,

Lebensversicherungs-Calculator der k. k. p. Asienda Assicuratrice zu Triest.

I. Die Ellipse.

1) Beschreibt man um den Punkt O (Taf. II. Fig. 9.) als Mittelpunkt zwei Ellipsen AA_1 und $A'A'_1$, deren homologe Halbaxen $OA=a$, $OA'=a'$ und $OB=b$, $OB'=b'$ die gemeinschaftlichen Richtungen Ox, Oy haben und ist $a=ha'$, $b=hb'$, $h>1$, so dass die Axen beider Ellipsen in Proportion stehen, so ist, wenn wir O zum Anfangspunkt der Coordinaten x, y und Ox, Oy zu Coordinatenaxen wählen, die Gleichung der Ellipse AA_1:

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

und die Gleichung der Ellipse $A'A'_1$:

$$(2) \qquad \frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1 \quad \text{oder} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{h^2};$$

und die Ellipse (2) ist wegen der Bedingung $h>1$ von der Ellipse (1) umschlossen. Sind x_1, y_1 die Coordinaten eines Punktes M der inneren Ellipse (2), so dass auch

$$(3) \qquad \frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=\frac{1}{h^2},$$

so hat man als Gleichung der in diesem Punkte berührenden Geraden LN:

$$(4) \qquad y = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1} \cdot x + \frac{b^2}{h^2y_1}.$$

Diese, an die innere Ellipse gezogene Tangente LN schneidet von der äusseren Ellipse AA_1 ein gewisses Segment $LM'N$ ab, dessen Grösse im Voraus als eine Function der Coordinaten x_1, y_1 des Berührungspunktes M zu betrachten ist, und welche im Nachfolgenden bestimmt werden soll.

Zu diesem Zwecke suchen wir zunächst die Coordinaten L_x, L_y und N_x, N_y der Punkte L und N zu bestimmen, in welchen die an die innere Ellipse gezogene Tangente (4) die äussere Ellipse (1) schneidet. Eliminirt man aus den Gleichungen (2) und (4) die Ordinate y, so ergibt sich leicht die Gleichung:

$$b^2(h^2x_1 . x - a^2) = a^2h^4y_1^2(a^2 - x^2)$$

oder, wenn man nach x entwickelt und ordnet:

$$h^4(b^2x_1^2 + a^2y_1^2)x^2 - 2a^2b^2h^2x_1 . x + a^4(b^2 - h^4y_1^2) = 0,$$

und hieraus mit Rücksicht auf die Gleichung (3):

$$x^2 - 2x_1 . x + \frac{a^2}{b^2h^2}(b^2 - h^4y_1^2) = 0,$$

$$(x - x_1)^2 - [x_1^2 - \frac{a^2}{b^2h^2}(b^2 - h^4y_1^2)] = 0;$$

weil aber nach (3)

$$x_1^2 = \frac{a^2}{b^2h^2}(b^2 - h^2y_1^2),$$

$$x_1^2 - \frac{a^2}{b^2h^2}(b^2 - h^4y_1^2) = \frac{a^2}{b^2h^2}(b^2 - h^2y_1^2 - b^2 + h^4y_1^2) = (h^2 - 1)\frac{a^2y_1^2}{b^2}$$

ist, so geht die Gleichung über in:

$$(5) \qquad (x - x_1)^2 - (h^2 - 1)\frac{a^2y_1^2}{b^2} = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind die Abscissen L_x, N_x der Durchschnitte L, N, und zwar ist:

$$(6) \qquad L_x = x_1 + \sqrt{h^2 - 1} \cdot \frac{ay_1}{b}, \quad N_x = x_1 - \sqrt{h^2 - 1} \cdot \frac{ay_1}{b}.$$

Um die zugehörigen Ordinaten zu finden, setzen wir diese Werthe statt x in die Gleichung (4) und erhalten sofort:

$$L_y = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}\left(x_1 + \sqrt{k^2-1}\,.\,\frac{a y_1}{b}\right) + \frac{b^2}{k^2 y_1}$$

$$= -\frac{b^2}{y_1}\left(\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{1}{k^2}\right) - \sqrt{k^2-1}\,.\,\frac{b x_1}{a},$$

$$N_y = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}\left(x_1 - \sqrt{k^2-1}\,.\,\frac{a y_1}{b}\right) + \frac{b^2}{k^2 y_1}$$

$$= -\frac{b^2}{y_1}\left(\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{1}{k^2}\right) + \sqrt{k^2-1}\,.\,\frac{b x_1}{a}$$

oder vermöge der Gleichung (3):

(7) $$L_y = y_1 - \sqrt{k^2-1}\,.\,\frac{b x_1}{a}, \quad N_y = y_1 + \sqrt{k^2-1}\,.\,\frac{b x_1}{a}.$$

Durch die Gleichungen (6) und (7) ist nunmehr die Lage der Punkte L und N auf der äusseren Ellipse AA_1 vollkommen bestimmt. Aus diesen folgt zunächst

(8) $$x_1 = \frac{L_x + N_x}{2}, \quad y_1 = \frac{L_y + N_y}{2};$$

woraus hervorgeht, dass der Berührungspunkt M stets im Mittelpunkt der Sehne LN liegt.

Ziehen wir nun an die äussere Ellipse AA_1 eine Tangente Tt, welche zur LN parallel ist; sind $x'y'$ die Coordinaten des Berührungspunktes M', so ist die Gleichung derselben

(9) $$y = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'}\,.\,x + \frac{b^2}{y'};$$

soll diese Gerade mit jener LN parallel sein, so müssen nach den Lehren der analytischen Geometrie die Coefficienten der Glieder mit x in beiden Gleichungen einander gleich sein, d. i.

(10) $$\frac{x'}{y'} = \frac{x_1}{y_1};$$

weil x', y' die Coordinaten eines Punktes der Ellipse (1) sind, so ist auch

(11) $$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

und es können sonach aus den Gleichungen (10) und (11) die Coordinaten x', y' des Berührungspunktes immer berechnet wer-

den. In der That, weil nach (10) $y' = \frac{y_1}{x_1} . x'$, so erhält man durch Substitution in (11)

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{y_1}{x_1} x'\right)^2}{b^2} = 1 \quad \text{oder} \quad x'^2\left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}\right) = x_1^2, \qquad x'^2 = h^2 x_1^2;$$

mithin wird

$$x' = \pm h x_1, \quad y' = \pm h y_1.$$

Weil nach (10) immer $\frac{x'}{y'} = \frac{x_1}{y_1}$ sein muss, so beziehen sich die unteren und oberen Zeichen auf einander und es gibt sonach auf der Ellipse AA_1 immer zwei Punkte, deren Tangenten mit der gegebenen Richtung LN parallel laufen. Wir wählen von beiden Punkten denjenigen, dessen Coordinaten x', y' mit jenen x_1, y_1 einerlei Vorzeichen haben, d. h. wir setzen

(12) $$x' = +h x_1, \quad y' = +h y_1,$$

so dass also die beiden Parallelen LN und Tt in Bezug auf den Anfangspunkt O auf derselben Seite liegen und das zwischen ihnen liegende elliptische Segment den Mittelpunkt der Ellipse nicht enthält.

Aus den Gleichungen (12) folgt nach Elimination von h, $x' : y' = x_1 : y_1$, mithin liegt der Berührungspunkt M' auf der durch den Ursprung O und durch den Punkt M gezogenen Geraden OM'.

Denken wir uns zwischen die beiden Ellipsen AA_1, $A'A_1'$ eine dritte Ellipse beschrieben, welche ebenfalls ihren Mittelpunkt in O und ihre Halbaxen $\frac{a}{k}$ und $\frac{b}{k}$ auf Ox und Oy hat, wobei also k zwischen 1 und h liegt, $(1 < k < h)$, und zieht man an diese Ellipse, deren Gleichung ist

(13) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{k^2},$$

eine zur Tt parallele Tangente ln, und sind x_1', y_1' die Coordinaten des Berührungspunktes, so ist die Gleichung derselben

(14) $$y = -\frac{b^2 x_1'}{a^2 y_1'} . x + \frac{b^2}{k^2 y_1'},$$

und man hat, da die neue Ellipse (13) zu jener (1) in derselben Beziehung steht, wie die Ellipse (2), indem man in den Gleichun-

gen (6), (7) und (12) die Verhältnisszahl k statt h setzt und x_1, y_1 in x_1', y_1' verwandelt:

$$
(15)\quad
\begin{aligned}
l_x &= x_1' + \sqrt{k^2-1}.\frac{ay_1'}{b}, & n_x &= x_1' - \sqrt{k^2-1}.\frac{ay_1'}{b};\\
l_y &= y_1' - \sqrt{k^2-1}.\frac{bx_1'}{a}, & n_y &= y_1' + \sqrt{k^2-1}.\frac{bx_1'}{a};\\
x' &= kx_1', & y' &= ky_1';
\end{aligned}
$$

wenn wir mit l_x, l_y und n_x, n_y die Coordinaten der Durchschnittspunkte l und n bezeichnen. Aus den Gleichungen (15) folgt auch

$$
(16)\qquad x_1' = \frac{l_x+n_x}{2}, \quad y_1' = \frac{l_y+n_y}{2};
$$

folglich liegt der Berührungspunkt (x_1', y_1') auf der Mitte m der Sehne ln. Aus den zwei letzten der Gleichungen (15) aber folgt $x_1':y_1'=x':y'$, folglich liegt der Punkt (x_1', y_1') auf der Geraden OM', welche letztere daher die Sehne ln in ihrem Mittelpunkte m durchschneidet.

Ist

$$
(A)\qquad y = A'x + B'
$$

die Gleichung irgend einer Geraden, so ist bekanntlich der Abstand P des Anfangspunktes O von derselben durch die Gleichung gegeben:

$$
(B)\qquad P = \frac{B'}{\pm\sqrt{1+A'^2}},
$$

worin das Zeichen immer so gewählt werden muss, dass der Abstand P positiv wird. Bezeichnen wir also mit p und p' die Abstände des Anfangspunktes von den parallelen Tangenten (9) und (14), so ist

$$
(17)\qquad p = \frac{\frac{b^2}{y'}}{\sqrt{1+\frac{b^4x'^2}{a^4y'^2}}} = \frac{a^2b^2}{\sqrt{a^4y'^2+b^4x'^2}},
$$

$$
p' = \frac{\frac{b^2}{k^2y_1'}}{\sqrt{1+\frac{b^4x_1'^2}{a^4y_1'^2}}} = \frac{1}{k^2}\cdot\frac{a^2b^2}{\sqrt{a^4y_1'^2+b^4x_1'^2}};
$$

oder, da vermöge der Gleichungen (15) $x_1'=\frac{x'}{k}$, $y_1'=\frac{y'}{k}$ ist,

$$(18)\qquad p'=\frac{1}{k}\cdot\frac{a^2b^2}{\sqrt{a^4y'^2+b^4x'^2}}=\frac{p}{k},$$

mithin, wenn wir den Abstand der beiden parallelen Tangenten *ln* und *Tt* mit q' bezeichnen, so ist

$$(19)\qquad p-p'=q'=p-\frac{p}{k}=\frac{k-1}{k}.p,$$

so dass also der Abstand q' als eine Function von k erscheint. Hieraus wird der Abstand q der parallelen Tangenten *LN* und *Tt* gefunden, wenn man $k=h$ setzt; es ist also

$$(20)\qquad q=\frac{h-1}{h}.p.$$

Wenn wir jetzt die Verhältnisszahl k als variabel betrachten und diese Grösse nach und nach alle Werthe von 1 bis h annehmen lassen, so werden die, durch die Gleichung (14) dargestellten Tangenten, welche den aufeinanderfolgenden Ellipsen (13) entsprechen, das zwischen den Tangenten *LN* und *Tt* enthaltene Segment in eine unendliche Anzahl von Streifen zerlegen von der Breite dq'. Der Inhalt eines solchen Streifens ist das Differenzial des Inhaltes des Segmentes. Bezeichnen wir dieses letztere mit dF und den Abstand *ln* mit R, so ist also

$$dF=R.dq',$$

oder wenn man zwischen den Grenzen 0 und q integrirt:

$$(\Delta)\qquad F=\int_0^q R.dq'.$$

Nun ist aber offenbar

$$R=\sqrt{(l_x-n_x)^2+(n_y-l_y)^2}$$

oder, weil aus den Gleichungen (15)

$$l_x-n_x=2\sqrt{k^2-1}.\frac{ay_1'}{b}=2\frac{\sqrt{k^2-1}}{k}.\frac{ay'}{b},$$

$$n_y-l_y=2\sqrt{k^2-1}.\frac{bx_1'}{a}=2\frac{\sqrt{k^2-1}}{k}.\frac{bx'}{a}$$

folgt:

$$R=2\frac{\sqrt{k^2-1}}{k}.\sqrt{\frac{a^2y'^2}{b^2}+\frac{b^2x'^2}{a^2}}=2\frac{\sqrt{k^2-1}}{k}.\frac{\sqrt{a^4y'^2+b^4x'^2}}{ab}.$$

Ferner ist

$$dq' = p\cdot\frac{dk}{k^2},$$

folglich, wenn man diese Werthe in das Integrale ($\varDelta$) substituirt, die constanten Theile vor das Integralzeichen setzt und, den Anforderungen der Gleichung (19) entsprechend, die Integrationsgrenzen 0 und q in jene 1 und h umsetzt:

$$F = 2p\,\frac{\sqrt{a^4y'^2+b^4x'^2}}{ab}\cdot\int_1^h\frac{\sqrt{k^2-1}}{k^3}\,dk,$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichung (17):

$$F = 2ab\cdot\int_1^h\frac{\sqrt{k^2-1}}{k^3}\,dk;$$

nach den Lehren der Integralrechnung ist aber bekanntlich:

$$\int\frac{\sqrt{k^2-1}}{k^3}\,dk = \tfrac{1}{2}\{\mathrm{ArcCos}\frac{1}{k}-\frac{\sqrt{k^2-1}}{k^2}\}+C,$$

also, wenn man dieses Integrale zwischen den Grenzen 1 und h nimmt:

$$\int_1^h\frac{\sqrt{k^2-1}}{k^3}\cdot dk = \tfrac{1}{2}\{\mathrm{ArcCos}\frac{1}{h}-\frac{\sqrt{h^2-1}}{h^2}\};$$

wird dieser Werth des bestimmten Integrals in obigen Ausdruck für den Flächenraum F substituirt, so erhält man endlich:

$$(22)\qquad F = ab\cdot\{\mathrm{ArcCos}\frac{1}{h}-\frac{\sqrt{h^2-1}}{h^2}\};$$

der Flächenraum F ist also von den Coordinaten x_1, y_1 des Punktes M unabhängig, folglich für alle Punkte der Ellipse (2) constant. — Nach dem Obigen gilt nunmehr folgender

1. Lehrsatz.

Stehen die gleichliegenden Axen zweier concentrischer Ellipsen in Proportion, so schneidet jede an die innere Ellipse gezogene Tangente von der äusseren Ellipse Segmente von constantem Inhalt ab und das von der äusseren Ellipse begrenzte Stück der Tangente wird stets durch den Berührungspunkt halbirt.

Anmerkung. Dieser Lehrsatz kann auch durch die Lehre von den Projectionen bewiesen werden, weil die beiden Ellipsen als die Projectionen zweier concentrischer Kreise betrachtet werden können, deren Radien a und $\frac{a}{h}$ sind und deren gemeinschaftliche Ebene zur Projections-Ebene unter einem Winkel geneigt ist, der $\frac{b}{a}$ zum Cosinus hat. Es ist jedoch diese Methode der Beweisführung, welche ich hier in Kürze erwähnte, umgangen worden, weil sie auf die Hyperbel, für welche später ein ähnlicher Satz bewiesen werden soll, nicht angewendet werden kann und dadurch die Gleichförmigkeit der Darstellung verloren geht.

2) Jetzt wollen wir noch den Schwerpunkt eines solchen elliptischen Segmentes zu bestimmen suchen. Wir bedienen uns hierzu der bekannten Gleichungen

$$(C) \qquad F.X=\int x_1'.dF, \quad F.Y=\int y_1'.dF,$$

wobei X und Y die Coordinaten des Schwerpunktes des Flächenraums F und x_1', y_1'. die Coordinaten des Schwerpunktes des Differenzials dF bezeichnen. In dem vorliegenden Falle ist

$$x_1'dF=x_1'Rdq'=2abx'\frac{\sqrt{k^2-1}}{k^4}dk,$$

$$y_1'dF=y_1'Rdq'=2aby'\frac{\sqrt{k^2-1}}{k^4}dk;$$

mithin, wenn man von $k=l$ bis $k=h$ integrirt, so hat man:

$$F.X=2abx'.\int_1^h\frac{\sqrt{k^2-1}}{k^4}dk,$$

$$F.Y=2aby'.\int_1^h\frac{\sqrt{k^2-1}}{k^4}dk.$$

Nun ist bekanntlich

$$\int\frac{\sqrt{k^2-1}}{k^4}dk=\frac{\sqrt{(k^2-1)^3}}{3k^3}+C,$$

mithin

$$\int_1^h\frac{\sqrt{k^2-1}}{k^4}dk=\frac{\sqrt{(h^2-1)^3}}{3h^3};$$

setzt man diesen Werth des bestimmten Integrals in die eben

gefundenen Gleichungen und zugleich für F seinen Werth aus (22), so hat man:

$$ab\left\{\text{Arc Cos}\,\frac{1}{h}-\frac{\sqrt{h^2-1}}{h^2}\right\}X=2abx'.\frac{\sqrt{(h^2-1)^3}}{3h^3},$$

$$ab\left\{\text{Arc Cos}\,\frac{1}{h}-\frac{\sqrt{h^2-1}}{h^2}\right\}Y=2aby'.\frac{\sqrt{(h^2-1)^3}}{3h^3};$$

und hieraus folgt:

(23)

$$\left\{\begin{array}{l} X=\frac{2}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{(h^2-1)^3}}{h^2\,\text{ArcCos}\,\frac{1}{h}-\sqrt{h^2-1}}\cdot\dfrac{x'}{h}=\frac{2}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{(h^2-1)^3}}{h^2\,\text{ArcCos}\,\frac{1}{h}-\sqrt{h^2-1}}\cdot x_1, \\[2ex] Y=\frac{2}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{(h^2-1)^3}}{h^2\,\text{ArcCos}\,\frac{1}{h}-\sqrt{h^2-1}}\cdot\dfrac{y'}{h}=\frac{2}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{(h^2-1)^3}}{h^2\,\text{ArcCos}\,\frac{1}{h}-\sqrt{h^2-1}}\cdot y_1. \end{array}\right.$$

Setzt man der Kürze wegen

$$(24)\qquad H=\frac{3h}{2}\cdot\frac{h^2\,\text{ArcCos}\,\frac{1}{h}-\sqrt{h^2-1}}{\sqrt{(h^2-1)^3}},$$

so wird

$$(25)\qquad X=\frac{x'}{H},\quad Y=\frac{y'}{H};$$

mithin ist

$$x'=H.X,\qquad y'=H.Y$$

und wenn man diese Werthe von x' und y' in die Gleichung (II) setzt und dann durch H^2 dividirt, so erhält man:

$$(26)\qquad \frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=\frac{1}{H^2};$$

die Schwerpunkte der Segmente, welche den verschiedenen Punkten $(x'y')$ oder beziehungsweise jenen (x_1, y_1) entsprechen, liegen also auf einer concentrischen Ellipse, deren Halbaxen $\frac{a}{H}$ und $\frac{b}{H}$ sind; die Gleichung (26) bezeichnet sonach den geometrischen Ort der Schwerpunkte aller Segmente, welche durch beliebige Tangenten LN der inneren Ellipse $A'A_1'$ von der äusseren AA_1 abgeschnitten werden.

Eliminirt man aus den Gleichungen (25) die Verhältnisszahl H, so ergibt sich die Proportion: $x':y'=X:Y$; der Schwerpunkt des dem Punkte $(x'y')$ entsprechenden Segmentes liegt also auf der, durch den Ursprung O und durch den Punkt $(x'y')$ gehenden Geraden; er liegt aber auch auf der Ellipse (26), folglich liegt er im Durchschnitt dieser Geraden mit jener Kurve.

3) Die bisher abgeleiteten Formeln zur Bestimmung des Flächenraumes und Schwerpunktes gewisser elliptischer Segmente können auch gebraucht werden, um den Flächenraum und den Schwerpunkt eines Segmentes zu bestimmen, welches eine beliebige Gerade

$$(27) \qquad y = Ax + B$$

von der Ellipse

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

abschneidet. Betrachtet man die Gerade (27) als Tangente einer Ellipse, deren Halbaxen $\frac{a}{h}$, $\frac{b}{h}$ sind, und sind x_1, y_1 die Coordinaten des Berührungspunktes, so dass auch

$$(28) \qquad y_1 = Ax_1 + B,$$

so muss diese Gerade mit jener (4) nothwendig identisch sein. Man hat also

$$A = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}, \qquad B = +\frac{b^2}{h^2 y_1},$$

woraus leicht folgt:

$$(\Delta') \qquad x_1 = -\frac{a^2 A}{h^2 B}, \qquad y_1 = \frac{b^2}{h^2 B};$$

setzt man diese Werthe von x_1, y_1 in die Gleichung (28), so erhält man:

$$\frac{b^2}{h^2 B} = -\frac{a^2 A^2}{h^2 B} + B \quad \text{oder} \quad b^2 = -a^2 A^2 + h^2 B^2,$$

mithin

$$(29) \qquad h = \frac{\sqrt{a^2 A^2 + b^2}}{B}.$$

Da nun a, b, A, B in den Gleichungen (1) und (27) der Ellipse und der Geraden gegeben sind, so ist auch h bekannt und

die Gleichung (22) gibt alsdann den gesuchten Flächenraum des Segmentes. Ferner folgt aus den Gleichungen (Δ')

$$x'=hx_1=-\frac{a^2A}{hB}, \quad y'=hy_1=\frac{b^2}{hB},$$

oder weil nach (29)

$$hB=\sqrt{a^2A^2+b^2},$$

so wird

$$(30) \qquad x'=-\frac{a^2A}{\sqrt{a^2A^2+b^2}}, \quad y'=\frac{b^2}{\sqrt{a^2A^2+b^2}}.$$

Ist also die Gleichung (27) der Geraden und jene (1) der Ellipse gegeben, so rechnet man mit Hilfe der Formel (29) die Verhältnisszahl h, aus (24) H, aus (30) x' und y' und alsdann geben die Gleichungen (25) die Coordinaten des Schwerpunktes.

1. **Zusatz.** Der Natur der Sache nach muss $h>1$ sein, d. h. es muss $a^2A^2+b^2>B^2$ sein, was mit den Lehren der analytischen Geometrie im Einklange ist, denn diese Relation ist bekanntlich das analytische Kennzeichen, dass die Gerade (27) die Ellipse (1) schneidet. — Ist $a^2A^2+b^2=B^2$, so wird $h=1$, $F=0$, $x_1=x'$, $y_1=y'$; denn in diesem Falle ist die Gerade (27) eine Tangente der Ellipse (1). H erscheint zwar unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$, man überzeugt sich jedoch leicht durch Differenziation, dass für $h=1$

$$\frac{\text{Arc}\,\text{Cos}\,\frac{1}{h}-\frac{\sqrt{h^2-1}}{h^2}}{\sqrt{(h^2-1)^3}}=\frac{2}{3h^4}=\tfrac{2}{3},$$

mithin auch $H=1$ ist, und es wird $X=x'$, $Y=y'$, indem der Punkt $(x'y')$ sein eigener Schwerpunkt ist.

2. **Zusatz.** Ist $B=0$, d. h. geht die Gerade (27) durch den Mittelpunkt der Ellipse, so wird $h=\infty$, $\text{Arc}\,\text{Cos}\,\frac{1}{h}=\frac{\pi}{2}$, $\frac{\sqrt{h^2-1}}{h^2}=0$, also $F=\frac{1}{2}ab\pi$ gleich der halben Ellipse; ferner

$$H=\tfrac{3}{2}\cdot\frac{\text{Arc}\,\text{Cos}\,\frac{1}{h}-\frac{\sqrt{h^2-1}}{h^2}}{\frac{h^2-1}{h^2}\cdot\frac{\sqrt{h^2-1}}{h}}=\frac{3\pi}{4},$$

mithin

$$X=\frac{x'}{H}=-\frac{4}{3\pi}\cdot\frac{a^2A}{\sqrt{a^2A^2+b^2}},\qquad Y=\frac{y'}{H}=\frac{4}{3\pi}\cdot\frac{b^2}{\sqrt{a^2A^2+b^2}}.$$

Diese beiden Gleichungen bestimmen sonach die Lage des Schwerpunktes einer beliebigen halben Ellipse.

II. Die Hyperbel.

1) Beschreibt man um den Punkt O (Taf. II. Fig. 10.) als Mittelpunkt zwei Hyperbeln AA_1 und $A'A_1'$, deren homologe Halbaxen paarweise auf den rechtwinkligen Coordinatenaxen Ox, Oy liegen und sich beziehungsweise zu einander verhalten wie $1:h$, so dass, wenn wir $OA=a$, $OB=b$, $h<1$ setzen, $OA'=\frac{a}{h}$, $OB'=\frac{b}{h}$ wird, so ist in Bezug auf den Mittelpunkt O als Anfangspunkt der Coordinaten, indem die Scheitel beider Hyperbeln auf der Abscissenaxe liegen, die Gleichung der Hyperbel AA_1:

$$(1)\qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

und die Gleichung der Hyperbel $A'A_1'$:

$$(2)\qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{h^2}.$$

Beide Hyperbeln haben gemeinschaftliche Asymptoten und wegen der Voraussetzung $h<1$ wird die Hyperbel (2) von jener (1) umschlossen. — Sind x_1, y_1 die Coordinaten eines beliebigen, aber bestimmten Punktes M der inneren Hyperbel $A'A_1'$, so dass also auch die Gleichung besteht:

$$(3)\qquad \frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=\frac{1}{h^2},$$

so ist die Gleichung der, in diesem Punkte an die Hyperbel gezogenen Tangente

$$(4)\qquad y=\frac{b^2x_1}{a^2y_1}.x+\frac{b^2}{h^2y_1}.$$

Diese an die innere Hyperbel $A'A_1'$ gezogene Tangente LN wird von der äusseren Hyperbel AA_1 ein Segment abschneiden, dessen Grösse im Allgemeinen als eine Function der Coordinaten

x_1, y_1 des Punktes M zu betrachten ist. Dieses Segment soll im Nachfolgenden bestimmt werden.

In dieser Absicht bestimmen wir vorerst die Coordinaten L_x, L_y und N_x, N_y der Punkte L und N, in welchen die an die innere Hyperbel gezogene Tangente (4) die äussere Hyperbel (I) schneidet. Eliminirt man aus den betreffenden Gleichungen (1) und (4) die Ordinate y, so erhält man die Gleichung

$$b^2(h^2x_1.x-a^2)^2=a^2h^4y_1{}^2(x^2-a^2),$$

oder wenn man nach x entwickelt und ordnet:

$$h^4(b^2x_1{}^2-a^2y_1{}^2)x^2-2a^2b^2h^2x_1.x+a^4(b^2+h^4y_1{}^2)=0,$$

und hieraus mit Anwendung der Gleichung (3):

$$x^2-2x_1.x+\frac{a^2}{b^2h^2}(b^2+h^4y_1{}^2)=0,$$

$$(x-x_1)^2-[x_1{}^2-\frac{a^2}{b^2h^2}(b^2+h^4y_1{}^2)]=0;$$

man hat aber nach (3):

$$x_1{}^2=\frac{a^2}{h^2b^2}(b^2+h^2y_1{}^2),$$

$$x_1{}^2-\frac{a^2}{h^2b^2}(b^2+h^4y_1{}^2)=\frac{a^2}{b^2h^2}(b^2+h^2y_1{}^2-b^2-h^4y_1{}^2)=(1-h^2)\frac{a^2y_1{}^2}{b^2},$$

und so geht obige Gleichung über in:

$$(5)\qquad (x-x_1)^2-(1-h^2)\frac{a^2y_1{}^2}{b^2}=0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung geben die Abscissen der Durchschnittspunkte L und N d. i. L_x und N_x; man hat also

$$(6)\qquad L_x=x_1+\sqrt{1-h^2}.\frac{ay_1}{b},\qquad N_x=x_1-\sqrt{1-h^2}.\frac{ay_1}{b};$$

setzt man diese Werthe nach und nach in die Gleichung (4), so erhält man die Ordinaten dieser Durchschnittspunkte:

$$L_y=\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x_1+\sqrt{1-h^2}.\frac{ay_1}{b})-\frac{b^2}{h^2y_1}=\frac{b^2}{y_1}\left(\frac{x_1{}^2}{a^2}-\frac{1}{h^2}\right)+\sqrt{1-h^2}.\frac{bx_1}{a},$$

$$N_y=\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x_1-\sqrt{1-h^2}.\frac{ay_1}{b})-\frac{b^2}{h^2y_1}=\frac{b^2}{y_1}\left(\frac{x_1{}^2}{a^2}-\frac{1}{h^2}\right)-\sqrt{1-h^2}.\frac{bx_1}{a};$$

oder vermöge der Gleichung (3):

$$(7)\quad L_y = y_1 + \sqrt{1-k^2}\cdot\frac{bx_1}{a}, \qquad N_y = y_1 - \sqrt{1-k^2}\cdot\frac{bx_1}{a}.$$

Durch die Gleichungen (6) und (7) ist die Lage der Punkte L und N auf der äusseren Hyperbel AA_1 vollkommen bestimmt. Aus diesen Gleichungen folgt auch

$$(8)\qquad x_1 = \frac{L_x + N_x}{2}, \qquad y_1 = \frac{L_y + N_y}{2},$$

woraus einleuchtet, dass der Berührungspunkt M stets im **Mittelpunkt** der Sehne LN liegt.

Ziehen wir an die äussere Hyperbel eine zur Geraden LN parallele Tangente und bezeichnen die Coordinaten des Berührungspunktes mit x', y', so dass auch

$$(9)\qquad \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1,$$

so ist die Gleichung dieser Tangente

$$(10)\qquad y = \frac{b^2 x'}{a^2 y'}\cdot x + \frac{b^2}{y'};$$

soll diese Gerade mit jener (4) parallel sein, so müssen die Coefficienten von x in beiden Gleichungen identisch sein, und hieraus folgt die Bedingungsgleichung

$$(11)\qquad \frac{x'}{y'} = \frac{x_1}{y_1}.$$

Aus den Gleichungen (9) und (11) kann man unmittelbar die Coordinaten x', y' bestimmen. Weil nach (11) $y' = \frac{y_1}{x_1}.x'$, so erhält man durch Substitution in (9)

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{\left(\frac{y_1}{x_1}.x'\right)^2}{b^2} = 1 \quad \text{oder} \quad x'^2\left(\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}\right) = x_1^2,$$

mithin

$$x'^2 = k^2 x_1^2,$$

und es ist

$$x' = \pm k x_1, \qquad y' = \pm k y_1;$$

weil nun nach (11) immer $\frac{x'}{y'} = \frac{x_1}{y_1}$ sein muss, so beziehen sich

die unteren und oberen Zeichen auf einander und es gibt also auf der Hyperbel AA_1 offenbar zwei Punkte, deren Tangenten mit einer gegebenen Geraden LN parallel laufen. — Von diesen zwei Punkten wählen wir denjenigen, dessen Coordinaten x', y' mit jenen x_1, y_1 einerlei Vorzeichen haben, d. h. wir setzen

$$(12) \qquad x' = +hx_1, \qquad y' = +hy_1,$$

so dass die beiden parallelen Tangenten LN und Tt, zwischen welchen das zu bestimmende Segment $LM'N$ enthalten ist, in Bezug auf den Mittelpunkt O auf derselben Seite liegen. Aus den zwei letzten Gleichungen folgt auch die Proportion $x' : y' = x_1 : y_1$, der Punkt M' liegt daher auf der Geraden, welche durch den Ursprung und durch den Punkt M geht.

Denken wir uns zwischen die beiden Hyperbeln AA_1 und $A'A_1'$ eine dritte concentrische Hyperbel construirt, deren mit den andern gleichliegende Halbaxen sich zu jenen der Hyperbel (1) wie $1:k$ verhalten, so dass also k zwischen 1 und h liegt und die Relation stattfindet $1 > k > h$, und zieht man an diese Hyperbel, deren Gleichung ist

$$(13) \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{k^2}$$

eine, mit der LN parallele Tangente ln, so wird dieselbe durch die Gleichung dargestellt

$$(14) \qquad y = \frac{b^2 x_1'}{a^2 y_1'}\, x - \frac{b^2}{k^2 y_1'},$$

wenn x_1', y_1' die Coordinaten des Berührungspunktes sind. Ferner hat man, da die neue Hyperbel (13) zu jener (1) in derselben Beziehung steht, wie die Hyperbel (2), indem man in den Gleichungen (6), (7), (12) die Verhältnisszahl k statt h setzt und x_1, y_1 in x_1', y_1' verwandelt:

$$l_x = x_1' + \sqrt{1-k^2}\cdot\frac{ay_1'}{b}, \qquad n_x = x_1' - \sqrt{1-k^2}\cdot\frac{ay_1'}{b};$$

$$(15) \qquad l_y = y_1' + \sqrt{1-k^2}\cdot\frac{bx_1'}{a}, \qquad n_y = y_1' - \sqrt{1-k^2}\cdot\frac{bx_1'}{a};$$

$$x' = kx_1', \qquad y' = ky_1';$$

wobei l_x, l_y und n_x, n_y die Coordinaten der Durchschnitte l und n bezeichnen. Aus diesen Gleichungen folgt

$$(16) \qquad x_1' = \frac{l_x + n_x}{2}, \qquad y_1' = \frac{l_y + n_y}{2};$$

der Punkt $(x_1'y_1')$ liegt sonach auf der Mitte der Sehne ln; aus den Gleichungen (15) folgt auch die Proportion: $x_1':y_1'=x':y'$, wonach dieser Punkt auf der Geraden OM' liegt, mithin durchschneidet diese Gerade die Sehne ln in ihrem Mittelpunkt m.

Es sei p der Abstand der Tangente (10) vom Anfangspunkt und p' jener der Tangente (14); alsdann ist nach den Gleichungen (A), (B):

$$(17)\quad \begin{cases} p=\dfrac{\dfrac{b^2}{y'}}{\sqrt{1+\dfrac{b^4x'^2}{a^4y'^2}}}=\dfrac{a^2b^2}{\sqrt{a^4y'^2+b^4x'^2}}, \\[2ex] p'=\dfrac{\dfrac{b^2}{k^2y_1'}}{\sqrt{1+\dfrac{b^4x_1'^2}{a^4y_1'^2}}}=\dfrac{1}{k^2}\cdot\dfrac{a^2b^2}{\sqrt{a^4y_1'^2+b^4x_1'^2}}; \end{cases}$$

oder, da nach (15) $x_1'=\dfrac{x'}{k}$, $y_1'=\dfrac{y'}{k}$, auch

$$(18)\qquad p'=\frac{1}{k}\cdot\frac{a^2b^2}{\sqrt{a^4y'^2+b^4x'^2}}=\frac{p}{k},$$

mithin, wenn wir den Abstand der parallelen Tangenten ln und Tt mit q' bezeichnen:

$$(19)\qquad p'-p=q'=\frac{p}{k}-p=\frac{1-k}{k}\cdot p,$$

so dass also der Abstand q' als eine Function von k erscheint. Ist $k=h$, so wird $q'=q$ gleich dem Abstand der parallelen Tangenten LN und Tt, d. i.

$$(20)\qquad q=\frac{1-h}{h}\cdot p.$$

Betrachtet man k als eine veränderliche Grösse und lässt sie successive alle Werthe von 1 bis h annehmen, so werden die berührenden Geraden (14), welche den aufeinanderfolgenden Hyperbeln (13) entsprechen, das zwischen den parallelen Tangenten LN und Tt enthaltene Segment in eine unendliche Anzahl von Streifen zerlegen von der Breite dq'. Der Flächeninhalt eines solchen Streifens ist das Differenzial des Inhaltes des Segmentes; folglich, wenn wir dieses letztere mit dF und die Distanz ln mit R bezeichnen,

$$dF = R.dq',$$

mithin, wenn man zwischen den Grenzen 0 und q integrirt:

$$(\varDelta) \qquad F = \int_0^q R.dq';$$

nun ist aber bekanntlich

$$R = \sqrt{(l_x - n_x)^2 + (l_y - n_y)^2},$$

oder, weil aus den Gleichungen (15)

$$l_x - n_x = 2\sqrt{1-k^2}.\frac{ay_1'}{b} = 2\sqrt{1-k^2}.\frac{ay'}{b},$$

$$l_y - n_y = 2\sqrt{1-k^2}.\frac{bx_1'}{a} = 2\frac{\sqrt{1-k^2}}{k}.\frac{bx'}{a}$$

folgt:

$$R = 2\frac{\sqrt{1-k^2}}{k}.\sqrt{\frac{a^2y'^2}{b^2} + \frac{b^2x'^2}{a^2}} = 2\frac{\sqrt{1-k^2}}{k}.\frac{\sqrt{a^4y'^2+b^4x'^2}}{ab};$$

ferner, wie man aus der Gleichung (19) leicht findet:

$$dq' = -p.\frac{dk}{k^2},$$

folglich, wenn man diese Werthe in das Integral ($\varDelta$) substituirt, die constanten Theile vor das Integralzeichen setzt und zugleich, nach den Anforderungen der Gleichung (19), die Integrationsgrenzen 0 und q in 1 und h umwandelt:

$$(21) \qquad F = -2p.\frac{\sqrt{a^4y'^2+b^4x'^2}}{ab}.\int_1^h \frac{\sqrt{1-k^2}}{k^3}dk,$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichung (17):

$$F = -2ab.\int_1^h \frac{\sqrt{1-k^2}}{k^3}dk;$$

nun ist aus der Integralrechnung bekannt, dass

$$\int \frac{\sqrt{1-k^2}}{k^3}dk = \tfrac{1}{2}\left\{\lg\frac{1+\sqrt{1-k^2}}{k} - \frac{\sqrt{1-k^2}}{k^2}\right\} + C,$$

also, wenn man dieses Integral zwischen den Grenzen 1 und h nimmt:

$$\int_1^h \frac{\sqrt{1-k^2}}{k^3}dk = \tfrac{1}{2}\left\{\lg\frac{1+\sqrt{1-h^2}}{h} - \frac{\sqrt{1-h^2}}{h^2}\right\};$$

dieses substituirt, und man hat:

$$(22)\qquad F = ab.\left\{\frac{\sqrt{1-h^2}}{h^2} - \lg\frac{1+\sqrt{1-h^2}}{h}\right\}.$$

Der Flächenraum des Segmentes $LM'N$ ist also von den Coordinaten x_1, y_1 des Punktes M unabhängig, folglich für alle Punkte der inneren Hyperbel constant. Es gilt also auch folgender

2. Lehrsatz.

Stehen die gleichliegenden Axen zweier concentrischer Hyperbeln in Proportion, so schneidet jede an die innere Hyperbel gezogene Tangente von der äusseren Hyperbel Segmente von constantem Inhalt ab und das von der äusseren Hyperbel begrenzte Stück der Tangente wird stets durch den Berührungspunkt halbirt.

Zusatz. Wenn man in den zusammengehörigen Gleichungen (1), (2) und (22), welche den eben ausgesprochenen Lehrsatz in sich enthalten, mittelst der Relationen

$$a = ha', \quad b = hb'$$

die der äusseren Hyperbel angehörigen Grössen a und b eliminirt und dafür jene a', b' einführt, so erhält man:

$$\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = h^2, \quad \frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 1, \quad F = a'b'\left\{\sqrt{1-h^2} - h^2.\lg\frac{1+\sqrt{1-h^2}}{h}\right\};$$

und wenn man $h=0$ setzt, wodurch auch $a=0$, $b=0$ wird, so reduciren sich dieselben auf folgende:

$$(23)\qquad y = \pm\frac{b'}{a'}.x,$$

$$(24)\qquad \frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 1,$$

$$(25)\qquad F = a'b',$$

weil, für $h=0$, $\left(\frac{1+\sqrt{1-h^2}}{h}\right)^{h^2} = \infty^0 = 1$, mithin

$$h^2.\lg\frac{1+\sqrt{1-h^2}}{h} = 0$$

ist.

Die Gleichung (23) bezeichnet jetzt die Asymptoten der Hyperbel (24) und F den Flächenraum, welchen eine beliebige Tangente dieser Hyperbel von dem Asymptotenwinkel abschneidet. Der von mir im Archiv Thl. XXVII. S. 55. bewiesene Lehrsatz ist also in dem oben deducirten als specieller Fall enthalten.

Anmerkung. Im Vorhergehenden wurde der Flächenraum eines elliptischen oder hyperbolischen Segmentes, welcher einer durch zwei bestimmte Punkte L und N der Kurve gehenden Sehne LN entspricht, dadurch bestimmt, dass wir das parallel mit der Sehne LN genommene Differenzial desselben als Function einer gewissen Verhältnisszahl k darstellten, — also nach einer von der gangbaren abweichenden Methode. Diess ist deshalb geschehen, um schon hier unter einfachen Verhältnissen den Ideengang zu zeigen, der uns bei der Berechnung der Segmente des Ellipsoides und des zweitheiligen Hyperboloides leiten wird, und der dort der einzige ist, der mich den beabsichtigten Zweck erreichen liess.

2) Um auch den Schwerpunkt eines solchen hyperbolischen Segmentes zu bestimmen, bedienen wir uns wieder der Gleichungen (C):

(C) $$F.X=\int x_1'.dF,\quad F.Y=\int y_1'.dF,$$

und haben in dem vorliegenden Falle offenbar:

$$x_1'.dF=x_1'.Rdq'=-2abx'.\frac{\sqrt{1-k^2}}{k^4}.dk,$$

$$y_1'.dF=y_1'.Rdq'=-2aby'.\frac{\sqrt{1-k^2}}{k^4}.dk;$$

folglich, wenn man diese Differenziale summirt von $k=1$ bis $k=h$, so hat man:

$$F.X=-2abx'.\int_1^h\frac{\sqrt{1-k^2}}{k^4}.dk,$$

$$F.Y=-2aby'.\int_1^h\frac{\sqrt{1-k^2}}{k^4}.dk.$$

Nun ist aber

$$\int\frac{\sqrt{1-k^2}}{k^4}dk=-\frac{\sqrt{(1-k^2)^3}}{3k^3}+C,$$

also

$$\int_1^h \frac{\sqrt{1-h^2}}{h^4}\,dh = -\frac{\sqrt{(1-h^2)^3}}{3h^3};$$

setzt man diesen Werth des bestimmten Integrals in die eben gefundenen Gleichungen, zugleich für F seinen Werth aus (22), so erhält man:

$$ab.\left\{\frac{\sqrt{1-h^2}}{h^2}-\lg\frac{1+\sqrt{1-h^2}}{h}\right\}.X = 2abx'.\frac{\sqrt{(1-h^2)^3}}{3h^3},$$

$$ab.\left\{\frac{\sqrt{1-h^2}}{h^2}-\lg\frac{1+\sqrt{1-h^2}}{h}\right\}.Y = 2aby'.\frac{\sqrt{(1-h^2)^3}}{3h^3};$$

oder es ist:

(26)

$$X = \tfrac{2}{3}.\frac{\sqrt{(1-h^2)^3}}{\sqrt{1-h^2}-h^2\lg\frac{1+\sqrt{1-h^2}}{h}}.\frac{x'}{h} = \tfrac{2}{3}.\frac{\sqrt{(1-h^2)^3}}{\sqrt{1-h^2}-h^2\lg\frac{1+\sqrt{1-h^2}}{h}}.x_1,$$

$$Y = \tfrac{2}{3}.\frac{\sqrt{(1-h^2)^3}}{\sqrt{1-h^2}-h^2\lg\frac{1+\sqrt{1-h^2}}{h}}.\frac{y'}{h} = \tfrac{2}{3}.\frac{\sqrt{(1-h^2)^3}}{\sqrt{1-h^2}-h^2\lg\frac{1+\sqrt{1-h^2}}{h}}.y_1.$$

Setzt man zur Abkürzung

(27) $$H = \frac{3h}{2}.\frac{\sqrt{1-h^2}-h^2\lg\frac{1+\sqrt{1-h^2}}{h}}{\sqrt{(1-h^2)^3}},$$

so wird

(28) $$X = \frac{x'}{H},\quad Y = \frac{y'}{H};$$

also ist auch

$$x' = H.X,\quad y' = H.Y,$$

und wenn man diese Werthe von x', y' in die Gleichung (9) setzt und alsdann durch H^2 dividirt, so erhält man:

(29) $$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2} = \frac{1}{H^2};$$

die Schwerpunkte der Segmente, welche den verschiedenen Punk-

ten $(x'y')$ respective jenen $(x_1 y_1)$ entsprechen, liegen also auf einer Hyperbel, deren Halbaxen sich zu jenen der Hyperbel (1) wie $1:H$ verhalten. Die Gleichung (29) bezeichnet sonach den geometrischen Ort der Schwerpunkte aller Segmente, welche durch beliebige Tangenten LN an die innere Hyperbel von der äusseren AA_1 abgeschnitten werden. Eliminirt man aus den Gleichungen (28) die Verhältnisszahl H, so ergibt sich die Proportion $X:Y=x':y'$, d. h. der Schwerpunkt des hyperbolischen Segmentes $LM'N$ liegt auf der, durch den Anfangspunkt O und durch den Punkt M' gehenden Geraden; da er aber auch auf der Hyperbel (29) liegen muss, so liegt er im Durchschnitt dieser Geraden mit jener Kurve.

3) Die Ergebnisse der vorstehenden Untersuchungen lassen sich nun anwenden zur Bestimmung des Flächenraumes und des Schwerpunktes eines beliebigen hyperbolischen Segmentes. Es sei

$$(30) \qquad y=Ax+B$$

die Gleichung einer gegebenen Geraden, so dass A und B als bekannte Grössen zu betrachten sind; es soll der Flächenraum und Schwerpunkt desjenigen Segmentes bestimmt werden, welches die Gerade (30) von der Hyperbel

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

abschneidet.

Betrachtet man die Gerade (30) als eine Tangente der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{h^2}$, wobei h eine noch unbekannte Grösse ist, und sind x_1, y_1 die Coordinaten des Berührungspunktes, so dass auch

$$(31) \qquad y_1=Ax_1+B,$$

so muss die Gleichung (30) mit jener (4) identisch sein; es ist also

$$A=\frac{b^2x_1}{a^2y_1},\quad B=-\frac{b^2}{h^2y_1};$$

mithin wird

$$x_1=-\frac{a^2A}{h^2B},\quad y_1=-\frac{b^2}{h^2B};$$

setzt man diese Werthe von x_1, y_1 in die Gleichung (31), so hat man:

$$-\frac{b^2}{h^2B}=-\frac{a^2A^2}{h^2B}+B \text{ oder } -b^2=-a^2A^2+h^2B^2,$$

also

$$(32)\qquad h=\sqrt{\frac{a^2A^2-b^2}{B}}.$$

Ferner ist

$$x'=hx_1=-\frac{a^2A}{hB},\quad y'=hy_1=-\frac{b^2}{hB},$$

oder weil $hB=\sqrt{a^2A^2-b^2}$:

$$(33)\qquad x'=-\frac{a^2A}{\sqrt{a^2A^2-b^2}},\quad y'=-\frac{b^2}{\sqrt{a^2A^2-b^2}}.$$

Die Gleichung (32) gibt den Werth der Verhältnisszahl h und hiermit die Gleichung (22) den gesuchten Flächenraum F. H wird aus der Gleichung (27), x' und y' aus den Gleichungen (33) gerechnet, und dann geben die Gleichungen (28) die Coordinaten des Schwerpunktes.

Zusatz. Den Bedingungen der Aufgabe nach muss $h<1$ oder $a^2A^2-b^2<B^2$ sein, was mit den Lehren der analytischen Geometrie in befriedigender Uebereinstimmung steht; denn ist diese Relation nicht erfüllt, so wird die Gerade (30) die Hyperbel (1) nicht schneiden. — Ist $a^2A^2-b^2=B^2$, so ist die Gerade (30) eine Tangente der Hyperbel (1) und es wird $h=1$, $F=0$, $x_1=x'$, $y_1=y'$. H erscheint für diesen besonderen Werth von h unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$; man überzeugt sich jedoch leicht durch Differenziation, dass für $h=1$

$$\frac{\frac{\sqrt{1-h^2}}{h^2}-\lg\frac{1+\sqrt{1-h^2}}{h}}{\sqrt{(1-h^2)^3}}=\frac{2}{3h^4}=\frac{2}{3}$$

ist, mithin wird auch $H=1$, und es ist $X=x'$, $Y=y'$.

III. Das Ellipsoid.

1) Nehmen wir an, die Halbaxen zweier concentrischer Ellipsoide, welche in derselben Ordnung einerlei Richtung haben, verhalten sich zu einander wie $1:h$, und h sei grösser als 1. Alsdann ist, wenn wir den Mittelpunkt zum Anfangspunkt und

die Axen zu Coordinatenaxen wählen, die Gleichung des äusseren Ellipsoides:

(1) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

und die Gleichung des inneren, von dem ersteren umschlossenen Ellipsoides:

(2) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{1}{h^2};$$

die Halbaxen des ersten Ellipsoides sind a, b, c, die des zweiten $\frac{a}{h}$, $\frac{b}{h}$, $\frac{c}{h}$. Sind nun x_1, y_1, z_1 die Coordinaten eines Punktes des inneren Ellipsoides (2), so ist auch

(3) $$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}=\frac{1}{h^2},$$

und man hat als Gleichung der in diesem Punkt das Ellipsoid berührenden Ebene:

(4) $$z=-\frac{c^2x_1}{a^2z_1}.x-\frac{c^2y_1}{b^2z_1}.y+\frac{c^2}{h^2z_1}.$$

Diese an das innere Ellipsoid gelegte tangirende Ebene schneidet von dem äusseren Ellipsoid ein gewisses Segment ab, dessen Volumen im Allgemeinen als eine von x_1, y_1, z_1 abhängige Grösse zu betrachten ist und dessen Bestimmung der Zweck der nachfolgenden Rechnungen ist.

In dieser Absicht bestimmen wir zunächst die Durchschnittslinie der Ebene (4) mit dem äusseren Ellipsoid (1). Wird aus den Gleichungen (1) und (4) die Coordinate z eliminirt, so erhält man leicht:

$$c^2(a^2b^2-b^2h^2x_1.x-a^2h^2y_1.y)^2=a^2b^2h^4z_1^2(a^2b^2-b^2x^2-a^2y^2);$$

wird diese Gleichung nach x und y entwickelt und geordnet, so hat man:

$$b^4h^4(c^2x_1^2+a^2z_1^2)x^2+a^4h^4(c^2y_1^2+b^2z_1^2)y^2-2a^2b^2h^2x_1y_1.xy$$
$$-2a^2b^4c^2h^2x_1.x-2a^4b^2c^2y_1.y+a^4b^4c^2h^2\left(\frac{1}{h^2}-\frac{h^2z_1^2}{c^2}\right)=0;$$

es ist aber nach (3):

$$c^2x_1^2+a^2z_1^2=a^2c^2\left(\frac{1}{h^2}-\frac{y_1^2}{b^2}\right)=\frac{a^2c^2}{b^2h^2}(b^2-h^2y_1^2),$$

$$c^2y_1^2+b^2z_1^2=b^2c^2\left(\frac{1}{h^2}-\frac{x_1^2}{a^2}\right)=\frac{b^2c^2}{a^2h^2}(a^2-h^2x_1^2);$$

$$b^4h^4(c^2x_1^2+a^2z_1^2)=a^2b^2c^2h^2(b^2-h^2y_1^2),$$

$$a^4h^4(c^2y_1^2+b^2z_1^2)=a^2b^2c^2h^2(a^2-h^2x_1^2);$$

mithin, wenn man substituirt und alsdann die Gleichung durch den allen Gliedern gemeinschaftlichen Factor $a^2b^2c^2h^2$ dividirt, so erhält unsere Gleichung folgende Gestalt:

$$(5)\qquad (b^2-h^2x_1^2)x^2+(a^2-h^2x_1^2)y^2$$
$$+2h^2x_1y_1.xy-2b^2x_1.x-2a^2y_1.y+a^2b^2\left(\frac{1}{h^2}-\frac{h^2z_1^2}{c^2}\right)=0.$$

Diese Gleichung bezeichnet die Projection der Durchschnittslinie der Ebene (4) mit dem äusseren Ellipsoid (1) auf die Ebene der xy. Um die Gestalt und Abmessungen dieses Kegelschnittes mit Leichtigkeit und ohne weitere Verwandlung der Coordinaten zu erkennen, bedienen wir uns der von Herrn Grunert (Archiv Thl. XXV. p. 146.) gegebenen „Discussion der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades zwischen zwei veränderlichen Grössen“, setzen

$$a'=b^2-h^2y_1^2,\quad b'=a^2-h^2x_1^2,\quad c'=h^2x_1y_1,\quad d'=-b^2x_1,$$

$$e'=-a^2y_1,\quad f'=a^2b^2\left(\frac{1}{h^2}-\frac{h^2z_1^2}{c^2}\right),$$

wodurch die Gleichung der Kurve übergeht in:

$$a'x^2+b'y^2+2c'xy+2d'x+2e'y+f=0,$$

und berechnen die beiden Ausdrücke:

$$a'b'-c'^2 \text{ und } a'e'^2+b'd'^2+f'c'^2-a'b'f'-2c'd'e'.$$

Es ist

$$(m)\qquad a'b'-c'^2=(a^2-h^2x_1^2)(b^2-h^2y_1^2)-h^4x_1^2y_1^2$$
$$=a^2b^2-b^2h^2x_1^2-a^2h^2y_1^2=\frac{a^2b^2h^2z_1^2}{c^2},$$

$$a'e'^2=a^4b^2y_1^2-a^4h^2y_1^4,$$

$$b'd'^2=a^2b^4x_1^2-b^4h^2x_1^4,$$

$$f'c'^2 = a^2b^2h^4x_1^2y_1^2\left(\frac{1}{h^2}-\frac{h^2z_1^2}{c^2}\right),$$

$$-a'b'f' = -(a^2-h^2x_1^2)(b^2-h^2y_1^2).a^2b^2\left(\frac{1}{h^2}-\frac{h^2z_1^2}{c^2}\right),$$

$$-2c'd'e' = -2a^2b^2h^2x_1^2y_1^2.$$

Werden jetzt diese Gleichungen addirt und die Glieder der zweiten Theile derselben entsprechend zusammengefasst, so hat man:

$$a'e'^2+b'd'^2+f'c'^2-a'b'f'-2c'd'e' = a^2b^2(b^2x_1^2+a^2y_1^2)$$

$$+h^2(b^2x_1^2+a^2y_1^2)^2-a^2b^2\left(\frac{1}{h^2}-\frac{h^2z_1^2}{c^2}\right)[(a^2-h^2x_1^2)(b^2-h^2y_1^2)-h^4x_1^2y_1^2]$$

$$=(b^2x_1^2+a^2y_1^2)[a^2b^2-h^2(b^2x_1^2+a^2y_1^2)]-a^2b^2\left(\frac{1}{h^2}-\frac{h^2z_1^2}{c^2}\right)\frac{a^2b^2h^2z_1^2}{c^2};$$

weil aber

$$b^2x_1^2+a^2y_1^2 = a^2b^2\left(\frac{1}{h^2}-\frac{z_1^2}{c^2}\right), \quad a^2b^2-b^2h^2x_1^2-a^2h^2y_1^2 = \frac{a^2b^2h^2z_1^2}{c^2},$$

so ist obiger Ausdruck auch gleich

$$\frac{a^4b^4h^2z_1^2}{c^2}\left(\frac{1}{h^2}-\frac{z_1^2}{c^2}\right)-\frac{a^4b^4h^2z_1^2}{c^2}\left(\frac{1}{h^2}-\frac{h^2z_1^2}{c^2}\right)$$

$$=\frac{a^4b^4h^2z_1^2}{c^2}\left(\frac{1}{h^2}-\frac{z_1^2}{c^2}-\frac{1}{h^2}+\frac{h^2z_1^2}{c^2}\right)=(h^2-1).\frac{a^4b^4h^2z_1^4}{c^2};$$

mithin ist auch

$$\text{(n)} \quad a'e'^2+b'd'^2+f'c'^2-a'b'f'-2c'd'e' = (h^2-1).\frac{a^4b^4h^2z_1^4}{c^4};$$

da nun sowohl die Grössen a', b', wegen $\frac{a^2}{h^2} > x_1^2$ und $\frac{b^2}{h^2} > y_1^2$, als auch die Ausdrücke (m) und (n) stets positiv sind, so bezeichnet die Gleichung (δ), wie auch nicht anders zu erwarten war, eine Ellipse. Sind A und B die Halbaxen derselben, so ist (wie in dem citirten Aufsatze gezeigt ist):

$$\text{(D)} \qquad A^2B^2 = \frac{(a'e'^2+b'd'^2+f'c'^2-a'b'f'-2c'd'e')^2}{(a'b'-c'^2)^3},$$

mithin in dem vorliegenden Falle:

$$A^2B^2=(h^2-1)^2.\frac{a^8b^8h^4z_1^8}{c^8}\cdot\frac{c^6}{a^6b^6h^6z_1^6}=\frac{(h^2-1)^2}{h^2}\cdot\frac{a^2b^2}{c^2}\cdot z_1^2$$

und hieraus

(6) $$AB=\frac{h^2-1}{h}\cdot\frac{ab}{c}\cdot z_1.$$

Legen wir an das äussere Ellipsoid (1) eine tangirende Ebene, welche mit der Ebene (4)

$$z=-\frac{c^2x_1}{a^2z_1}\cdot x-\frac{c^2y_1}{b^2z_1}\cdot y+\frac{c^2}{h^2z_1}$$

parallel läuft; sind x', y', z' die noch unbekannten Coordinaten des Berührungspunktes, so dass auch

(7) $$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}=1,$$

so ist die Gleichung derselben:

(8) $$z=-\frac{c^2x'}{a^2z'}\cdot x-\frac{c^2y'}{b^2z'}+\frac{c^2}{z'}.$$

Soll nun die Ebene (8) mit jener (4) parallel sein, so müssen die Coefficienten der Glieder mit x und y in beiden Gleichungen einander gleich sein, und man hat hiernach die Bedingungen:

(9) $$\frac{x'}{z'}=\frac{x_1}{z_1},\quad \frac{y'}{z'}=\frac{y_1}{z_1}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt: $x'=\frac{x_1}{z_1}.z'$, $y'=\frac{y_1}{z_1}.z'$; setzt man diese Werthe von x', y' in die Gleichung (7), so erhält man:

$$\frac{\left(\frac{x_1}{z_1}.z_1\right)^2}{a^2}+\frac{\left(\frac{y_1}{z_1}.z_1\right)^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}=1 \quad\text{oder}\quad z'^2\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}\right)=z_1^2,$$

mithin mit Beziehung auf (3):

$$z'^2=h^2z_1^2,$$

und es wird

$$z'=\pm hz_1,\quad y'=\pm hy_1,\quad x'=\pm hx_1;$$

weil nun nach (9) immer $\frac{x'}{z'}=\frac{x_1}{z_1}$, $\frac{y'}{z'}=\frac{y_1}{z_1}$ sein muss, so beziehen sich in diesen drei Gleichungen die unteren und oberen Zeichen auf einander, woraus hervorgeht, dass es auf dem Ellip-

soid (1) immer zwei Punkte gibt, deren tangirende Ebenen mit der Ebene (4) parallel sind. Von diesen beiden Punkten wählen wir denjenigen, dessen Coordinaten mit jenen x_1, y_1, z_1 einerlei Vorzeichen haben, d. h. wir setzen

$$(10) \qquad z' = +hz_1, \quad y' = +hy_1, \quad x' = +hx_1,$$

und die beiden, durch diese zwei Punkte $(x_1y_1z_1)$ und $(x'y'z')$ gehenden parallelen Berührungsebenen liegen hinsichtlich des Anfangspunktes auf derselben Seite, so dass das zwischenliegende ellipsoidische Segment den Mittelpunkt des Ellipsoides nicht enthält. Da aus obigen Gleichungen auch folgt: $x':y':z' = x_1:y_1:z_1$, so ist einleuchtend, dass der Berührungspunkt $(x'y'z')$ auf derjenigen Geraden liegt, welche durch den Ursprung der Coordinaten und durch den Punkt $(x_1y_1z_1)$ geht.

Die Gleichung (5) der Projections-Ellipse kann auch in folgender Form aufgeschrieben werden:

$$(11)$$
$$h^2(xy_1 - x_1y)^2 + b^2x(2x_1 - x) + a^2y(2y_1 - y) - a^2b^2\left(\frac{1}{h^2} - \frac{h^2z_1^2}{c^2}\right) = 0.$$

Denken wir uns irgend einen Punkt (xy) dieser Kurve mit dem Punkt (x_1y_1) verbunden und die Verbindungslinie über (x_1y_1) so weit verlängert, bis die Verlängerung gleich dem Abstand $(xy)(x_1y_1)$ wird. Sind ξ und η die Coordinaten des Endpunktes der Verlängerung, so ist

$$(12) \qquad x_1 = \frac{x+\xi}{2}, \quad y_1 = \frac{y+\eta}{2},$$

denn der Punkt (x_1y_1) liegt auf der Mitte der Distanz $(xy)(\xi\eta)$. Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$x = 2x_1 - \xi, \quad y = 2y_1 - \eta;$$

werden diese Werthe von x und y in die Gleichung (11) substituirt, so erhält man die Gleichung einer Kurve, auf welcher die mit den Punkten (xy) in der angegebenen Constructionsweise correspondirenden Punkte $(\xi\eta)$ liegen. Nun gibt aber die Substitution

$$(13)$$
$$h^2(\xi y_1 - x_1\eta)^2 + b^2\xi(2x_1 - \xi) + a^2\eta(2y_1 - \eta) - a^2b^2\left(\frac{1}{h^2} - \frac{h^2z_1^2}{c^2}\right) = 0,$$

eine Gleichung, welche sich von jener der Projections-Ellipse nur dadurch unterscheidet, dass ξ an der Stelle von x und η an der

Stelle von y steht. Folglich ist auch der Punkt $(\xi\eta)$ ein Punkt der Projections-Ellipse. Jede durch den Punkt (x_1y_1) gezogene Sehne wird also durch diesen Punkt halbirt, also ist (x_1y_1) der Mittelpunkt der Projections-Ellipse und der Punkt $(x_1y_1z_1)$ im Raume der Mittelpunkt der Durchschnitts-Ellipse.

Wird nun um den Anfangspunkt der Coordinaten als Mittelpunkt ein drittes Ellipsoid beschrieben, welches die gleichliegenden Halbaxen $\frac{a}{k}, \frac{b}{k}, \frac{c}{k}$ hat und zwischen den Ellipsoiden (1) und (2) liegt, so dass k zwischen 1 und h enthalten ist, so ist die Gleichung des neuen Ellipsoides:

$$(14) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{1}{k^2},$$

und die durch einen Punkt $(x_1'y_1'z_1')$ desselben gelegte tangirende Ebene, deren Gleichung ist

$$(15) \qquad z' = -\frac{c^2x_1'}{a^2z_1'}\cdot x - \frac{c^2y_1'}{b^2z_1'}\cdot y + \frac{c^2}{k^2z_1'},$$

wird mit jener (8) parallel sein, wenn, analog mit (10),

$$(16) \qquad z' = kz_1', \quad y' = ky_1', \quad x' = kx_1',$$

so dass also der Berührungspunkt $(x_1'y_1'z_1')$ auch auf der durch den Ursprung und durch den Punkt $(x'y'z')$ gehenden Geraden liegt. Diese tangirende Ebene (15) wird das äussere Ellipsoid (1) in einer Ellipse schneiden, deren Projection auf die Ebene der xy durch die Gleichung (5) oder jene (11) dargestellt wird, wenn man x_1, y_1, z_1 und h in x_1', y_1', z_1' und k verwandelt; der Punkt $(x_1'y_1')$ ist alsdann, in Uebereinstimmung mit dem oben Bewiesenen, der Mittelpunkt der Projections-Ellipse, und der Punkt $(x_1'y_1'z_1')$ im Raume der Mittelpunkt der neuen Durchschnitts-Ellipse. Bezeichnen wir die Halbaxen der neuen Projections-Ellipse mit A', B', so ist analog mit (6):

$$(17) \qquad A'B' = \frac{k^2-1}{k}\cdot\frac{ab}{c}\cdot z_1' = \frac{k^2-1}{k^2} : \frac{ab}{c}\cdot z'.$$

Der Flächenraum dieser Ellipse ist $A'B'\pi$, und der Flächenraum der ihr entsprechenden Durchschnitts-Ellipse wird sein $\frac{A'B'\pi}{\mathrm{Cos}\,\gamma}$, wenn wir mit γ den Neigungswinkel der tangirenden Ebene (15) zur Projections-Ebene xy bezeichnen. — Fällt man aus dem Anfangspunkt der Coordinaten auf die parallelen Ebenen (8) und (15) ein Perpendikel, so ist γ der Winkel, welchen dieses Perpendikel

mit der Axe der z einschliesst, mithin ist, wenn wir den Abstand des Anfangspunktes von der Ebene (8) durch p und jenen von der Ebene (15) durch p' bezeichnen, nach den Lehren der analytischen Geometrie:

$$(18)\qquad \frac{p}{\operatorname{Cos}\gamma}=\frac{c^2}{z'},\quad \frac{p'}{\operatorname{Cos}\gamma}=\frac{c^2}{k^2.z_1'}=\frac{c^2}{k.z'},\quad p'=\frac{p}{k};$$

mithin ist der Abstand dieser beiden parallelen Ebenen (8) und (15):

$$(19)\qquad p-p'=q'=\frac{k-1}{k}.p;$$

der Abstand q der Ebenen (4) und (8), zwischen welchen das zu bestimmende ellipsoidische Segment enthalten ist, wird aus q' gefunden, wenn man $k=h$ setzt, d. i.

$$(20)\qquad q=\frac{h-1}{h}.p.$$

Wenn wir nun k als eine Veränderliche betrachten und diese Grösse nach und nach alle Werthe von 1 bis h annehmen lassen, so werden die tangirenden Ebenen (15), welche den aufeinanderfolgenden Ellipsoiden (14) entsprechen, das zwischen den Ebenen (4) und (8) enthaltene Segment in eine unendliche Anzahl von Schichten zerlegen von der Dicke dq'. Der Inhalt einer solchen Schichte ist das Differenzial des Inhaltes des Segmentes. Bezeichnen wir dieses letztere mit dV, so ist

$$(21)\qquad dV=\frac{A'B'\pi}{\operatorname{Cos}\gamma}\cdot dq',$$

und wenn man zwischen den Grenzen 0 und q integrirt:

$$V=\frac{\pi}{\operatorname{Cos}\gamma}\cdot\int_0^q A'B'.dq';$$

es ist aber nach (19)

$$dq'=p.\frac{dk}{k^2},$$

mithin, mit Bezug auf die Gleichung (17):

$$A'B'.dq'=\frac{ab}{c}pz'.\frac{k^2-1}{k^4}dk,$$

also, wenn man substituirt, die constanten Theile vor das Integralzeichen setzt und zugleich den Anforderungen der Gleichung (19) gemäss die Integrationsgrenzen 0 und q in jene 1 und h umwandelt:

$$V=\frac{ab\pi}{c}\cdot\frac{pz'}{\operatorname{Cos}\gamma}\cdot\int_1^h\frac{k^2-1}{k^4}dk$$

oder, weil nach (18) $\frac{pz'}{\operatorname{Cos}\gamma}=c^2$:

$$V=abc\pi\,.\int_1^h\frac{k^2-1}{k^4}dk,$$

und wenn man endlich die Integration ausführt und das Integral zwischen den angezeigten Grenzen nimmt:

$$(22)\qquad V=\frac{2h^3-3h^2+1}{3h^3}.abc\pi=\frac{(2h+1)(h-1)^2}{3h^3}.abc\pi;$$

das Volumen V ist also von den Coordinaten x_1, y_1, z_1 **unabhängig**, folglich für alle Punkte des Ellipsoides (2) **constant**.

Die Resultate dieser Untersuchung geben folgenden

3. Lehrsatz.

Stehen die gleichliegenden Axen zweier concentrischer Ellipsoide in Proportion, so schneidet jede das innere Ellipsoid tangirende Ebene von dem äusseren Ellipsoid Segmente von constantem Inhalt ab und der Berührungspunkt liegt stets im Mittelpunkt der Durchschnitts-Ellipse.

2) Um auch den **Schwerpunkt** eines solchen ellipsoidischen Segmentes zu bestimmen, bedienen wir uns folgender, aus der Mechanik bekannten Formeln:

$$(\text{E})\quad V.X=\int x_1'.dV,\ V.Y=\int y_1'.dV,\ V.Z=\int z_1'.dV;$$

X, Y, Z bezeichnen die Coordinaten des Schwerpunktes des Segmentes V; x_1', y_1', z_1' jene des Differenzials dV und die Integration hat sich auf das ganze Volumen V zu erstrecken.

In dem vorliegenden Falle ist

$$x_1'.dV=x_1'\frac{A'B'\pi}{\operatorname{Cos}\gamma}.dq'=\frac{x'}{k}\cdot\frac{\pi}{\operatorname{Cos}\gamma}\cdot\frac{ab}{c}.pz'.\frac{k^2-1}{k^4}\cdot dk$$

$$=\frac{ab}{c}\pi.\frac{pz'}{\operatorname{Cos}\gamma}.x'\cdot\frac{k^2-1}{k^5}\cdot dk$$

oder

$$x_1'.dV=abc\pi.x'\cdot\frac{k^2-1}{k^5}\cdot dk;$$

auf dieselbe Art findet man:

$$y_1'.dV = abc\pi.y'.\frac{k^2-1}{k^5}.dk,$$

$$z_1'.dV = abc\pi.z'.\frac{k^2-1}{k^5}.dk;$$

mithin ist

$$V.X = abc\pi.x'.\int_1^h \frac{k^2-1}{k^5}.dk,\quad V.Y = abc\pi.y'.\int_1^h \frac{k^2-1}{k^5}.dk,$$

$$V.Z = abc\pi.z'.\int_1^h \frac{k^2-1}{k^5}.dk;$$

oder, wenn man die sehr leichte Integration ausführt, das Integrale zwischen den angezeigten Grenzen nimmt und für V seinen Werth aus (22) substituirt:

$$\frac{(2h+1)(h-1)^2}{3h^3}abc\pi.X = abc\pi.x'.\frac{(h^2-1)^2}{4h^4};$$

auf diese Art findet man:

$$(23)\quad \begin{cases} X = \frac{3}{4}.\frac{(h+1)^2}{h(2h+1)}.x' = \frac{3}{4}.\frac{(h+1)^2}{2h+1}.x_1, \\ Y = \frac{3}{4}.\frac{(h+1)^2}{h(2h+1)}.y' = \frac{3}{4}.\frac{(h+1)^2}{2h+1}.y_1, \\ Z = \frac{3}{4}.\frac{(h+1)^2}{h(2h+1)}.z' = \frac{3}{4}.\frac{(h+1)^2}{2h+1}.z_1. \end{cases}$$

Wird zur Vereinfachung

$$(24)\quad H = \frac{4}{3}.\frac{h(2h+1)}{(h+1)^2}$$

gesetzt, so ist

$$(25)\quad X = \frac{x'}{H},\quad Y = \frac{y'}{H},\quad Z = \frac{z'}{H};$$

woraus folgt:

$$x' = H.X,\quad y' = H.Y,\quad z' = H.Z;$$

und wenn man diese Werthe von x', y', z' in die Gleichung (7) des Ellipsoides setzt, auf welchem der Punkt $(x'y'z')$ liegt, und dann durch H^2 dividirt, so zeigt sich:

$$(26)\qquad \frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=\frac{1}{H^2};$$

das durch diese Gleichung dargestellte Ellipsoid, dessen Halbaxen $\frac{a}{H}$, $\frac{b}{H}$, $\frac{c}{H}$ sind, ist sonach der geometrische Ort der Schwerpunkte aller Segmente, welche den verschiedenen Punkten $(x'y'z')$, respective $(x_1y_1z_1)$ entsprechen.

Wenn man aus den Gleichungen (25) die Grösse H eliminirt, so gelangt man zur Proportion $X:Y:Z=x':y':z'$, woraus einleuchtend wird, dass der Schwerpunkt des dem Punkte $(x_1y_1z_1)$ entsprechenden Segmentes auf derjenigen Geraden liegt, welche durch den Anfangspunkt und durch den Punkt $(x'y'z')$ geht. Da aber der Schwerpunkt auch auf dem Ellipsoid (26) liegen muss, so liegt er im Durchschnitt dieser Geraden mit jener Fläche. Obgleich diese Gerade das Ellipsoid (26) in zwei Punkten durchschneidet, so kann doch nie ein Zweifel entstehen, welcher von beiden der Schwerpunkt ist, da aus den Gleichungen (25) hervorgeht, dass die Coordinaten X, Y, Z mit jenen x', y', z' stets einerlei Vorzeichen haben.

3) Mit Hilfe des oben bewiesenen Lehrsatzes sind wir auch im Stande, das Volumen eines ellipsoidischen Segmentes, welches irgend eine Ebene, deren Gleichung

$$(27)\qquad z=Ax+By+C$$

sein mag, von dem Ellipsoid

$$(1)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

abschneidet, zu bestimmen. — Denkt man sich um den Ursprung der Coordinaten als Mittelpunkt ein Ellipsoid beschrieben, welches die gleichliegenden Halbaxen $\frac{a}{k}$, $\frac{b}{k}$, $\frac{c}{k}$ hat und die Ebene (27) in dem Punkte $(x_1y_1z_1)$ berührt, so dass auch

$$(28)\qquad z_1=Ax_1+By_1+C$$

ist, so kommt es jetzt nur darauf an, die der Ebene (27) entsprechende Verhältnisszahl k zu bestimmen, um dann unmittelbar die Formel (22) anwenden zu können. Wenn die Ebene (27) das Ellipsoid (2) in dem Punkte $(x_1y_1z_1)$ berührt, so muss sie mit jener (4) zusammenfallen, d. h. es muss

$$A=-\frac{c^2x_1}{a^2z_1},\quad B=-\frac{c^2y_1}{b^2z_1},\quad C=\frac{c^2}{k^2z_1}$$

sein, und hieraus findet man leicht:

$$(\Delta'') \qquad x_1=-\frac{a^2A}{h^2C},\quad y_1=-\frac{b^2B}{h^2C},\quad z_1=\frac{c^2}{h^2C};$$

setzt man diese Werthe in die Gleichung (28), so erhält man:

$$\frac{c^2}{h^2C}=-\frac{a^2A^2}{h^2C}-\frac{b^2B^2}{h^2C}+C \quad \text{oder} \quad c^2=-a^2A^2-b^2B^2+h^2C^2,$$

mithin ist

$$(29) \qquad h=\frac{\sqrt{a^2A^2+b^2B^2+c^2}}{C},$$

und mit diesem Werthe von h gibt die Gleichung (22) das fragliche Volumen. Ferner geben die Gleichungen (Δ''):

$$x'=hx_1=-\frac{a^2A}{hC},\quad y'=hy_1=-\frac{b^2B}{hC},\quad z'=hz_1=\frac{c^2}{hC},$$

oder, weil

$$hC=\sqrt{a^2A^2+b^2B^2+c^2}$$

ist:

$$(30) \quad x'=-\frac{a^2A}{\sqrt{a^2A^2+b^2B^2+c^2}},\quad y'=-\frac{b^2B}{\sqrt{a^2A^2+b^2B^2+c^2}},$$

$$z'=\frac{c^2}{\sqrt{a^2A^2+b^2B^2+c^2}};$$

da nun H nach (24) gerechnet werden kann, so erhält man aus den Gleichungen (25) auch die Coordinaten X, Y, Z des Schwerpunktes.

1. Zusatz. Der Natur der Sache nach muss $h>1$, d. h. $a^2A^2+b^2B^2+c^2>C^2$ sein, und diese Relation ist bekanntlich auch das analytische Kennzeichen, dass die Ebene (27) das Ellipsoid (1) schneidet. Ist $a^2A^2+b^2B^2+c^2=C^2$, so wird die früher schneidende Ebene jetzt das Ellipsoid (1) berühren, es wird $h=1$, die Punkte $(x_1y_1z_1)$, $(x'y'z')$ fallen zusammen und man hat $V=0$, $X=x'$, $Y=y'$, $Z=z'$, da der Punkt $(x'y'z')$ sein eigener Schwerpunkt ist.

2. Zusatz. Ist $C=0$, d. h. geht die Ebene (27) durch den Anfangspunkt der Coordinaten, respective durch den Mittelpunkt des Ellipsoides, so wird $h=\infty$, und weil alsdann

$$\frac{(2h+1)(h-1)^2}{3h^3}=\frac{(2+\frac{1}{h})(1-\frac{1}{h})^2}{3}=\frac{2}{3}$$

ist, so wird $V = \frac{2}{3}abc\pi$ gleich dem halben Ellipsoid. Ferner ist für diesen Werth von h nach (24) $H = \frac{3}{8}$, mithin ist mit Rücksicht auf (30):

$$X = -\frac{3}{8} \cdot \frac{a^2 A}{\sqrt{a^2 A^2 + b^2 B^2 + c^2}}, \quad Y = -\frac{3}{8} \cdot \frac{b^2 B}{\sqrt{a^2 A^2 + b^2 B^2 + c^2}},$$

$$Z = \frac{3}{8} \cdot \frac{c^2}{\sqrt{a^2 A^2 + b^2 B^2 + c^2}}.$$

Diese drei Gleichungen bestimmen die Lage des Schwerpunktes eines halben Ellipsoides, welches durch die Ebene $z = Ax + By$ abgeschnitten wird.

IV. Das zweitheilige Hyperboloid.

1) Die Gleichungen zweier concentrischer zweitheiliger Hyperboloide, deren Scheitelpunkte auf der Axe der z liegen und deren homologe Halbaxen sich zu einander wie $1:h$ verhalten, sind:

$$(1) \qquad \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1,$$

$$(2) \qquad \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{1}{h^2},$$

so dass also beide Hyperboloide eine gemeinschaftliche Asymptotenfläche haben. Wir wollen voraussetzen $h < 1$, so dass das Hyperboloid (2) von jenem (1) umschlossen wird.

Sind x_1, y_1, z_1 die Coordinaten eines Punktes des inneren Hyperboloides (2), so dass auch

$$(3) \qquad \frac{z_1^2}{c^2} - \frac{y_1^2}{b^2} - \frac{x_1^2}{a^2} = \frac{1}{h^2}$$

ist, so ist die Gleichung der durch diesen Punkt geführten Berührungsebene:

$$(4) \qquad z = \frac{c^2 x_1}{a^2 z_1} \cdot x + \frac{c^2 y_1}{b^2 z_1} \cdot y + \frac{c^2}{h^2 z_1}.$$

Diese, das innere Hyperboloid berührende Ebene wird von dem äusseren Hyperboloid (1) ein Segment abschneiden, dessen Volumen im Allgemeinen als eine Function der Coordinaten x_1, y_1, z_1 zu betrachten ist und dessen Bestimmung der Zweck der nachfolgenden Rechnungen ist.

Wird aus den Gleichungen (1) und (4) z eliminirt, so erhält man leicht:

$$c^2(a^2b^2+b^2h^2x_1 . x+a^2h^2y_1 . y)^2=a^2b^2h^4z_1^2(a^2b^2+b^2x^2+a^2y^2),$$

und diese Gleichung bezeichnet die Projection des Durchschnittes der Ebene (4) mit dem Hyperboloid (1) auf die Ebene der xy. Wenn man dieselbe nach x entwickelt und ordnet, so findet man:

$$b^4h^4(c^2x_1^2-a^2z_1^2)x^2+a^4h^4(c^2y_1^2-b^2z_1^2)y^2+2a^2b^2c^2h^2x_1y_1 . xy$$
$$+2a^2b^4c^2h^2x_1 . x+2a^4b^2c^2h^2y_1 . y+a^4b^4c^2h^2\left(\frac{1}{h^2}-\frac{h^2z_1^2}{c^2}\right)=0;$$

nun ist nach der Gleichung (3) offenbar:

$$a^2z_1^2-c^2x_1^2=a^2c^2\left(\frac{1}{h^2}+\frac{y_1^2}{b^2}\right)=\frac{a^2c^2}{b^2h^2}(b^2+h^2y_1^2),$$

$$b^2z_1^2-c^2y_1^2=b^2c^2\left(\frac{1}{h^2}+\frac{x_1^2}{a^2}\right)=\frac{b^2c^2}{a^2h^2}(a^2+h^2x_1^2);$$

$$b^4h^4(c^2x_1^2-a^2z_1^2)=-a^2b^2c^2h^2(b^2+h^2y_1^2),$$
$$a^4h^4(c^2y_1^2-b^2z_1^2)=-a^2b^2c^2h^2(a^2+h^2x_1^2);$$

mithin, wenn man diese Werthe der Coefficienten von x^2 und y^2 substituirt und alsdann durch den gemeinschaftlichen Factor $-a^2b^2c^2h^2$ dividirt:

$$(5)\quad (b^2+h^2y_1^2)x^2+(a^2+h^2x_1^2)y^2-2h^2x_1y_1 . xy-2b^2x_1 . x$$
$$-2a^2y_1 . y-a^2b^2\left(\frac{1}{h^2}-\frac{h^2z_1^2}{c^2}\right)=0.$$

Setzt man, wie bei dem Ellipsoid,

$$a'=b^2+h^2y_1,\quad b'=a^2+h^2x_1^2,\quad c'=-h^2x_1y_1,\quad d'=-b^2x_1,$$
$$e'=-a^2y_1,\quad f'=-a^2b^2\left(\frac{1}{h^2}-\frac{h^2z_1^2}{c^2}\right),$$

wodurch die Gleichung die Form erhält:

$$a'x^2+b'y^2+2c'xy+2d'x+2e'y+f'=0,$$

so wird

$$a'b'-c'^2=(a^2+h^2x_1^2)(b^2+h^2y_1^2)-h^4x_1^2y_1^2=a^2b^2+b^2h^2x_1^2+a^2h^2y_1^2;$$

Nun ist aber nach (3)

$$a^2b^2 + b^2h^2x_1^2 + a^2h^2y_1^2 = \frac{a^2b^2h^2z_1^2}{c^2},$$

mithin auch

$$a'b' - c'^2 = \frac{a^2b^2h^2z_1^2}{c^2}.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}
a'e'^2 &= a^4b^2y_1^2 + a^4h^2y_1^4,\\
b'd'^2 &= a^2b^4x_1^2 + b^4h^2x_1^4,\\
f'c'^2 &= -a^2b^2h^4x_1^2y_1^2\left(\frac{1}{h^2} - \frac{h^2z_1^2}{c^2}\right),\\
-a'b'f' &= (a^2 + h^2x_1^2)(b^2 + h^2y_1^2).a^2b^2\left(\frac{1}{h^2} - \frac{h^2z_1^2}{c^2}\right),\\
-2c'd'e' &= 2a^2b^2h^2x_1^2y_1^2;
\end{aligned}$$

mithin, wenn man diese Gleichungen addirt und die Glieder der zweiten Theile derselben gehörig zusammenfasst:

$$a'e'^2 + b'd'^2 + f'c'^2 - a'b'f' - 2c'd'e' = a^2b^2(a^2y_1^2 + b^2x_1^2)$$

$$+h^2(a^2y_1^2+b^2x_1^2)^2+a^2b^2\left(\frac{1}{h^2}-\frac{h^2z_1^2}{c^2}\right)[(a^2+h^2x_1^2)(b^2+h^2y_1^2)-h^4x_1^2y_1^2]$$

$$=(a^2y_1^2+b^2x_1^2)[a^2b^2+a^2h^2y_1^2+b^2h^2x_1^2]+a^2b^2\left(\frac{1}{h^2}-\frac{h^2z_1^2}{c^2}\right)\frac{a^2b^2h^2z_1^2}{c^2};$$

es ist aber offenbar nach der Gleichung (3):

$$a^2y_1^2+b^2x_1^2=-a^2b^2\left(\frac{1}{h^2}-\frac{h^2z_1^2}{c^2}\right),\quad a^2b^2+a^2h^2y_1^2+b^2h^2x_1^2=\frac{a^2b^2h^2z_1^2}{c^2};$$

also ist der obige Ausdruck auch gleich

$$-\frac{a^4b^4h^2z_1^2}{c^2}\left(\frac{1}{h^2}-\frac{h^2z_1^2}{c^2}\right)+\frac{a^4b^4h^2z_1^2}{c^2}\left(\frac{1}{h^2}-\frac{h^2z_1^2}{c^2}\right)$$

$$=\frac{a^4b^4h^2z_1^2}{c^2}\left(-\frac{1}{h^2}+\frac{z_1^2}{c^2}+\frac{1}{h^2}-\frac{h^2z_1^2}{c^2}\right)=(1-h^2).\frac{a^4b^4h^2z_1^4}{c^4},$$

und man hat

$$a'e'^2 + b'd'^2 + f'c'^2 - a'b'f' - 2c'd'e' = (1-h^2).\frac{a^4b^4h^2z_1^4}{c^4}.$$

Da nun sowohl die Grössen a', b', als auch jene $a'b'-c'^2$, $a'e'^2+b'd'^2+f'c'^2-a'b'f'-2c'd'e'$ positiv sind, so ist die durch die Gleichung (5) dargestellte Kurve eine Ellipse, und wenn wir die Halbaxen derselben wieder mit A und B bezeichnen, so ist nach der schon bei dem Ellipsoid verwendeten Gleichung (D)

$$A^2B^2=(1-h^2)\frac{a^8b^8h^4z_1{}^8}{c^8}\cdot\frac{c^6}{a^6b^6h^6z_1{}^6}=\frac{(1-h^2)^2}{h^2}\cdot\frac{a^2b^2}{c^2}\cdot z_1{}^2$$

und

$$(6)\qquad AB=\frac{1-h^2}{h}\cdot\frac{ab}{c}\cdot z_1.$$

Legen wir nun an das äussere Hyperboloid (1) eine tangirende Ebene, welche mit der tangirenden Ebene (4) parallel ist; sind x', y', z' die Coordinaten des Berührungspunktes, so ist die Gleichung dieser Ebene:

$$(7)\qquad z=\frac{c^2x'}{a^2z'}\cdot x+\frac{c^2y'}{b^2z'}\cdot y+\frac{c^2}{z'};$$

soll diese Ebene mit jener (4) parallel sein, so müssen bekanntlich die Coefficienten der Glieder von x und y einander gleich sein, was in dem vorliegenden Falle zu den Gleichungen führt:

$$(8)\qquad \frac{x'}{z'}=\frac{x_1}{z_1},\quad \frac{y'}{z'}=\frac{y_1}{z_1}.$$

Weil $(x'y'z')$ ein Punkt des Hyperboloides (1) ist, so hat man auch:

$$(9)\qquad \frac{z'^2}{c^2}-\frac{y'^2}{b^2}-\frac{x'^2}{a^2}=1,$$

und weil aus den Gleichungen (8) folgt: $x'=\frac{x_1}{z_1}.z'$, $y'=\frac{y_1}{z_1}.z'$, so erhält man durch Substitution in (9):

$$\frac{z'^2}{c^2}-\frac{\left(\frac{y_1}{z_1}.z'\right)^2}{b^2}-\frac{\left(\frac{x_1}{z_1}.z'\right)^2}{a^2}=1 \text{ oder } z'^2\left(\frac{z_1{}^2}{c^2}-\frac{y_1{}^2}{b^2}-\frac{x_1{}^2}{a^2}\right)=z_1{}^2,$$

$$z'^2=h^2z_1{}^2,$$

und es wird

$$z'=\pm hz_1,\quad y'=\pm hy_1,\quad x'=\pm hx_1;$$

da nach den Gleichungen (8) immer $\frac{x'}{z'}=\frac{x_1}{z_1}$, $\frac{y'}{z'}=\frac{y_1}{z_1}$ sein muss, so beziehen sich die unteren und oberen Zeichen auf einander, woraus sogleich einleuchtet, dass es auf dem Hyperboloid (1)

immer zwei Punkte gibt, deren Berührungsebenen mit einer gegebenen Ebene (4) parallel sind. Wir wählen von diesen zwei Punkten denjenigen, dessen Coordinaten mit jenen x_1, y_1, z_1 dasselbe Vorzeichen haben oder, was dasselbe ist, wir setzen:

$$(10) \qquad z' = +hz_1, \quad y' = +hy_1, \quad x' = +hx_1,$$

so dass die beiden durch die Punkte $(x_1y_1z_1)$ und $(x'y'z')$ gehenden parallelen Berührungsebenen in Hinsicht auf den Anfangspunkt der Coordinaten auf derselben Seite liegen. — Da obige Gleichungen auch die Proportion enthalten $x':y':z' = x_1:y_1:z_1$, so liegt der Punkt $(x'y'z')$ auf jener durch den Ursprung und durch den Punkt $(x_1y_1z_1)$ gehenden Geraden.

Die Gleichung (5) der Projections-Ellipse kann mit Leichtigkeit auch auf folgende Form gebracht werden:

$$(11) \quad h^2(y_1x-x_1y)^2-b^2x(2x_1-x)-a^2y(2y_1-y)-a^2b^2\left(\frac{1}{h^2}-\frac{h^2z_1^2}{c^2}\right)=0.$$

Denken wir uns nun irgend einen Punkt (xy) dieser Kurve mit dem Punkte (x_1y_1) verbunden und die Verbindungslinie über (x_1y_1) so weit verlängert, bis die Verlängerung gleich der Distanz $(xy)(x_1y_1)$ wird. Sind ξ und η die Coordinaten des Endpunktes der Verlängerung, so ist, weil der Punkt (x_1y_1) auf der Mitte der Distanz $(xy)(\xi\eta)$ liegt, offenbar

$$(12) \qquad x_1 = \frac{x+\xi}{2}, \quad y_1 = \frac{y+\eta}{2},$$

oder es ist:

$$x = 2x_1 - \xi, \quad y = 2y_1 - \eta.$$

Setzt man diese Werthe in die obige Gleichung, so bezeichnet das Resultat der Substitution, welches augenscheinlich eine Function der Coordinaten ξ, η ist, offenbar eine Kurve, auf welcher die mit den verschiedenen Punkten (xy) in der angegebenen Constructionsweise correspondirenden Punkte $(\xi\eta)$ liegen. Diese Substitution gibt aber:

$$(13) \quad h^2(y_1\xi-x_1\eta)^2-b^2\xi(2x_1-\xi)-a^2\eta(2y_1-\eta)-a^2b^2\left(\frac{1}{h^2}-\frac{h^2z_1^2}{c^2}\right)=0,$$

eine Gleichung, welche sich von jener (5) nur dadurch unterscheidet, dass ξ an der Stelle von x und η an der Stelle von y steht. Folglich liegt auch der Punkt $(\xi\eta)$ auf der Kurve und man kann also sagen, dass jede durch den Punkt (x_1y_1) in der durch obige Gleichung dargestellten Ellipse gezogene Sehne durch diesen Punkt halbirt wird, mithin ist (x_1y_1) der Mittelpunkt der

Projections-Ellipse. Folglich ist der Punkt $(x_1 y_1 z_1)$ im Raume der Mittelpunkt der Durchschnitts-Ellipse.

Denken wir uns jetzt um den Anfangspunkt der Coordinaten als Mittelpunkt ein drittes Hyperboloid beschrieben, dessen Axen in einerlei Ordnung auf den Coordinatenaxen liegen und sich zu jenen des Hyperboloides (1) wie $1:k$ verhalten, so ist die Gleichung desselben:

$$(14) \qquad \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{1}{k^2}.$$

Ueberdiess wollen wir voraussetzen, dass k zwischen 1 und h liegt, so dass auch das Hyperboloid (14) zwischen den Hyperboloiden (1) und (2) liegt. Eine durch den Punkt $(x_1' y_1' z_1')$ des neuen Hyperboloides geführte tangirende Ebene, deren Gleichung ist

$$(15) \qquad z = \frac{c^2 x_1'}{a^2 z_1'} . x + \frac{c^2 y_1'}{b^2 z_1'} . y + \frac{c^2}{k^2 z_1'},$$

wird mit jener (7) parallel sein, wenn analog mit (10)

$$(16) \qquad z' = k . z_1', \quad y' = k . y_1', \quad x' = k . x_1',$$

so dass der Berührungspunkt $(x_1' y_1' z_1')$ auch auf jener Geraden liegt, welche durch den Anfangspunkt und durch den Punkt $(x' y' z')$ geht. Die Berührungsebene (15) wird das äussere Hyperboloid (1) in einer Ellipse schneiden, deren Projection auf die Ebene der xy durch die Gleichung (5) dargestellt wird, wenn man in ihr x_1, y_1, z_1 und h in x_1', y_1', z_1' und k verwandelt; der Punkt $(x_1' y_1')$ ist alsdann der Mittelpunkt der Projections-Ellipse und der Punkt $(x_1' y_1' z_1')$ der Mittelpunkt der Durchschnitts-Ellipse. Bezeichnet man die Halbaxen der neuen Projections-Ellipse mit A', B', so ist analog mit (6), wenn wir k an die Stelle von h setzen:

$$(17) \qquad A'B' = \frac{1-k^2}{k} \cdot \frac{ab}{c} . z_1' = \frac{1-k^2}{k^2} \cdot \frac{ab}{c} . z'.$$

Der Flächenraum dieser Ellipse ist $A'B'\pi$ und der Flächenraum der Durchschnitts-Ellipse wird sein $\frac{A'B'\pi}{\mathrm{Cos}\,\gamma}$, wenn wir mit γ den Neigungswinkel bezeichnen, welchen die Berührungsebene (15) mit der Ebene der xy einschliesst. Fällt man vom Anfangspunkt der Coordinaten auf die parallelen Ebenen (7) und (15) eine Senkrechte, so ist auch γ der Winkel, welchen diese Senkrechte mit der Axe der z einschliesst; mithin, wenn wir den Abstand des

Anfangspunktes von diesen zwei Ebenen beziehungsweise durch p und p' bezeichnen, nach den Lehren der analytischen Geometrie:

$$(18)\qquad \frac{p}{\text{Cos}\,\gamma}=\frac{c^2}{z'},\quad \frac{p'}{\text{Cos}\,\gamma}=\frac{c^2}{k^2 z_1'}=\frac{c^2}{kz'},\quad p'=\frac{p}{k};$$

also ist der Abstand dieser beiden parallelen Ebenen:

$$(19)\qquad p'-p=q'=\frac{1-k}{k}.p;$$

daraus wird der Abstand q der parallelen Ebenen (4) und (7) gefunden, wenn man $k=h$ setzt; es ist also:

$$(20)\qquad q=\frac{1-h}{h}.p.$$

Wenn wir nun k als eine Veränderliche betrachten und diese Grösse nach und nach alle Werthe von 1 bis h annehmen lassen, so werden die tangirenden Ebenen (15), welche den aufeinanderfolgenden Hyperboloiden (14) entsprechen, das zwischen den Ebenen (4) und (7) enthaltene Segment in eine unendliche Anzahl von Schichten zerlegen von der Dicke dq'. Der Inhalt einer solchen Schichte ist das Differenzial des Inhaltes des Segmentes. Bezeichnen wir dieses Differenzial mit dV, so ist offenbar:

$$(21)\qquad dV=\frac{A'B'\pi}{\text{Cos}\,\gamma}.dq',$$

und wenn man zwischen den Grenzen 0 und q integrirt, das Volumen des ganzen Segmentes

$$V=\frac{\pi}{\text{Cos}\,\gamma}.\int_0^q A'B'.dq'.$$

Nun folgt aus (19)

$$dq'=-p\frac{dk}{k^2},$$

mithin ist, mit Rücksicht auf die Gleichung (17):

$$A'B'.dq'=-\frac{ab}{c}.pz'.\frac{1-k^2}{k^4}.dk,$$

also, wenn man substituirt, die constanten Theile vor das Integralzeichen setzt und zugleich, der Gleichung (19) gemäss, die Integrationsgrenzen 0 und q in jene 1 und h umsetzt:

$$V=-\frac{abn}{c}\cdot\frac{pz'}{\mathrm{Cos}\gamma}\cdot\int_1^h\frac{1-k^2}{k^4}.dk,$$

oder weil nach (18)

$$\frac{pz'}{\mathrm{Cos}\gamma}=c^2$$

ist,

$$V=-abc\pi.\int_1^h\frac{1-k^2}{k^4}.dk,$$

und wenn man die Integration ausführt und das Integrale zwischen den angezeigten Grenzen nimmt:

$$(22)\qquad V=\frac{1-3h^2+2h^3}{3h^3}.abc\pi=\frac{(1+2h)(1-h)^2}{3h^3}.abc\pi;$$

das Volumen V des zwischen den Ebenen (4) und (7) enthaltenen Segmentes ist sonach von den Coordinaten x_1, y_1, z_1 unabhängig, also für alle Punkte des Hyperboloides (2) constant.

Fasst man die Ergebnisse der vorhergehenden Untersuchung zusammen, so erhält man auch folgenden

4. Lehrsatz.

Stehen die gleichliegenden Axen zweier concentrischer zweitheiliger Hyperboloide in Proportion, so schneidet jede an das innere Hyperboloid geführte tangirende Ebene von dem äusseren Hyperboloid Segmente von constantem Inhalt ab und der Berührungspunkt liegt stets im Mittelpunkt der Durchschnitts-Ellipse.

Zusatz. Wenn man mittelst der Relationen

$$a=ha',\quad b=hb',\quad c=hc'$$

aus den Gleichungen (1), (2) und (22). a, b, c eliminirt und dafür die den Halbaxen des inneren Hyperboloides angehörigen Grössen a', b', c' einführt, so erhält man:

$$\frac{z^2}{c'^2}-\frac{y^2}{b'^2}-\frac{x^2}{a'^2}=h^2,\quad \frac{z^2}{c'^2}-\frac{y^2}{b'^2}-\frac{x^2}{a'^2}=1,\quad V=\tfrac{1}{3}(1+2h)(1-h)^2.a'b'c'\pi.$$

Betrachtet man nun a', b', c' als unveränderliche Grössen und

setzt $k=0$, wodurch auch $a=0$, $b=0$, $c=0$ wird, so verwandeln sich diese drei zusammengehörigen Gleichungen in folgende:

(23) $$\frac{z^2}{c'^2}-\frac{y^2}{b'^2}-\frac{x^2}{a'^2}=0,$$

(24) $$\frac{z^2}{c'^2}-\frac{y^2}{b'^2}-\frac{x^2}{a'^2}=1,$$

(25) $$V=\tfrac{1}{3}a'b'c'\pi.$$

Die erste Gleichung bezeichnet die Asymptotenfläche des durch die zweite dargestellten Hyperboloides und V bezeichnet das Volumen desjenigen Kegels, welchen irgend eine an das Hyperboloid (24) gelegte Berührungsebene von ihrer Asymptotenfläche abschneidet. Hieraus ist ersichtlich, dass der von mir im Archiv Thl. XXVII. S. 481. bewiesene Lehrsatz in dem obigen als specieller Fall enthalten ist.

2) Jetzt wollen wir auch noch die Lage des Schwerpunktes eines solchen hyperboloidischen Segmentes zu bestimmen suchen. Wir bedienen uns hierzu der, für das Ellipsoid schon früher in Anwendung gebrachten Formeln:

(E) $$V.X=\int x_1'.dV,\quad V.Y=\int y_1'.dV,\quad V.Z=\int z_1'.dV,$$

worin die Buchstaben X, Y, Z und x_1', y_1', z_1' dieselbe Bedeutung haben. In dem vorliegenden Falle ist:

$$x_1'.dV=x_1'.\frac{A'B'\pi}{\mathrm{Cos}\gamma}.dq'=-\frac{x'}{k}.\frac{\pi}{\mathrm{Cos}\gamma}.\frac{ab}{c}.pz'.\frac{1-k^2}{k^4}.dk$$
$$=-\frac{ab\pi}{c}.\frac{pz'}{\mathrm{Cos}\gamma}.x'.\frac{1-k^2}{k^5}.dk$$

oder

$$x_1'.dV=-abc\pi.x'.\frac{1-k^2}{k^5}dk,$$

und auf dieselbe Art findet man mit Leichtigkeit:

$$y_1'.dV=-abc\pi.y'.\frac{1-k^2}{k^5}dk,$$

$$z_1'.dV=-abc\pi.z'.\frac{1-k^2}{k^5}dk;$$

mithin ist

$$V.X=-abc\pi.x'.\int_1^k\frac{1-k^2}{k^5}dk,\quad V.Y=-abc\pi.y'.\int_1^k\frac{1-k^2}{k^5}dk;$$

$$V.Z=-abc\pi.z'.\int_1^k\frac{1-k^2}{k^5}.dk;$$

oder, wie man leicht findet:

$$V.X = abc\pi.x'.\frac{(1-h^2)^2}{4h^4},\quad V.Y = abc\pi.y'.\frac{(1-h^2)^2}{4h^4},$$

$$V.Z = abc\pi.z'.\frac{(1-h^2)^2}{4h^4};$$

setzt man in diese Gleichungen für V seinen unter (22) aufgefundenen Werth und bestimmt daraus X, Y, Z, so erhält man endlich:

$$(26)\quad \begin{cases} X = \frac{3}{4}.\frac{(1+h)^2}{h(1+2h)}.x' = \frac{3}{4}.\frac{(1+h)^2}{1+2h}.x_1, \\ Y = \frac{3}{4}.\frac{(1+h)^2}{h(1+2h)}.y' = \frac{3}{4}.\frac{(1+h)^2}{1+2h}.y_1, \\ Z = \frac{3}{4}.\frac{(1+h)^2}{h(1+2h)}.z' = \frac{3}{4}.\frac{(1+h)^2}{1+2h}.z_1. \end{cases}$$

Diese drei Gleichungen bestimmen sonach die Lage des Schwerpunktes eines Segmentes, welches die durch den Punkt $(x_1y_1z_1)$ des inneren Hyperboloides (2) geführte Berührungsebene von dem äusseren Hyperboloid (1) abschneidet.

Setzt man zur Vereinfachung

$$(27)\quad H = \frac{4}{3}.\frac{h(1+2h)}{(1+h)^2},$$

so wird

$$(28)\quad X = \frac{x'}{H},\quad Y = \frac{y'}{H},\quad Z = \frac{z'}{H}.$$

Man wird bemerken, dass die eben für ein hyperboloidisches Segment gefundenen Formeln von jenen für ein ellipsoidisches Segment erhaltenen nicht verschieden sind, nur dass hier h kleiner, dort aber grösser als die Einheit ist. — Aus den letzten drei Gleichungen folgt auch die Proportion: $X:Y:Z = x':y':z'$, woraus wieder ersichtlich wird, dass der Punkt (XYZ) auf der durch den Anfangspunkt und durch den Punkt $(x'y'z')$ gehenden Geraden liegt, also auf derselben Geraden, auf welcher auch der Punkt $(x_1y_1z_1)$ liegt.

Ferner wird aus diesen Gleichungen einleuchtend, dass der Schwerpunkt (XYZ) zugleich mit jenem $(x'y'z')$ seine Lage ändert. Lässt man nun die Coordinaten x', y', z' nach und nach alle Werthe annehmen, welche der Gleichung

$$(9) \qquad \frac{z'^2}{c^2}-\frac{y'^2}{b^2}-\frac{x'^2}{a^2}=1$$

Genüge leisten, so werden die Schwerpunkte der Segmente, welche den verschiedenen Punkten $(x'y'z')$ entsprechen, eine continuirliche Fläche bilden, deren Gleichung aus dieser letzteren erhalten wird, wenn ich in dieselbe statt x', y', z' seine, durch X, Y, Z ausgedrückten Werthe substituire. Diese Substitution gibt, weil $x'=H.X$, $y'=H.Y$, $z'=H.Z$ ist:

$$(29) \qquad \frac{Z^2}{c^2}-\frac{Y^2}{b^2}-\frac{X^2}{a^2}=\frac{1}{H^2},$$

welche Gleichung ein concentrisches Hyperboloid bezeichnet, dessen gleichliegende Axen sich zu jenen des äusseren Hyperboloides wie $1:H$ verhalten. Die Gleichung (29) bezeichnet also den geometrischen Ort der Schwerpunkte aller Segmente, welche beliebige, an das innere Hyperboloid geführte tangirende Ebenen von dem äusseren Hyperboloid abschneiden.

3) Der oben bewiesene Lehrsatz gibt uns ein Mittel an die Hand, das Volumen eines Segmentes zu berechnen, welches durch eine beliebige Ebene, deren Gleichung

$$(30) \qquad z=Ax+By+C$$

sein mag, von dem zweitheiligen Hyperboloid (1) abgeschnitten wird. Betrachtet man diese Ebene als eine Berührungsebene an das durch die Gleichung

$$(2) \qquad \frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=\frac{1}{k^2}$$

dargestellte Hyperboloid, worin k eine noch unbekannte Grösse bezeichnet, so muss, wenn wir mit x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des Berührungspunktes bezeichnen, auch

$$(31) \qquad z_1=Ax_1+By_1+C$$

und die Gleichung (30) mit jener (4) identisch sein, d. h. es muss

$$A=\frac{c^2x_1}{a^2z_1},\quad B=\frac{c^2y_1}{b^2z_1},\quad C=\frac{c^2}{k^2z_1}$$

sein. Hieraus findet man leicht:

$$x_1=\frac{a^2A}{k^2C},\quad y_1=\frac{b^2B}{k^2C},\quad z_1=\frac{c^2}{k^2C};$$

setzt man diese Werthe in die Gleichung (31), so erhält man:

$$\frac{c^2}{h^2C} = \frac{a^2A^2}{h^2C} + \frac{b^2B^2}{h^2C} + C \text{ oder } c^2 = a^2A^2 + b^2B^2 + h^2C^2,$$

und hieraus folgt:

$$(32)\qquad h = \frac{\sqrt{c^2 - b^2B^2 - a^2A^2}}{C};$$

durch diese Gleichung ist also der, der Ebene (30) entsprechende Werth von h bestimmt und die Gleichung (22) gibt alsdann das fragliche Volumen.

Aus obigen Gleichungen folgt auch:

$$x' = hx_1 = \frac{a^2A}{hC}, \quad y' = hy_1 = \frac{b^2B}{hC}, \quad z' = hz_1 = \frac{c^2}{hC},$$

oder weil

$$hC = \sqrt{c^2 - b^2B^2 - a^2A^2}$$

ist, so ist auch:

$$(33)\quad x' = \frac{a^2A}{\sqrt{c^2 - b^2B^2 - a^2A^2}}, \quad y' = \frac{b^2B}{\sqrt{c^2 - b^2B^2 - a^2A^2}},$$

$$z' = \frac{c^2}{\sqrt{c^2 - b^2B^2 - a^2A^2}}.$$

Da man nun H nach der Gleichung (27) rechnen kann und die letzten drei Gleichungen die Coordinaten x', y', z' geben, so sind durch die Gleichungen (28) auch die Coordinaten des Schwerpunktes eines durch eine beliebige Ebene abgeschnittenen hyperbolischen Segmentes bekannt.

Zusatz. Der Voraussetzung gemäss muss $h < 1$, d. h. $c^2 - b^2B^2 - a^2A^2 < C^2$ sein, was mit den Ergebnissen anderer Untersuchungen übereinstimmt, denn diese Relation ist bekanntlich das analytische Kennzeichen, dass die Ebene (30) das Hyperboloid (1) schneidet. Ist $c^2 - b^2B^2 - a^2A^2 = C^2$, so wird die schneidende Ebene zu einer berührenden und $h = 1$, $V = 0$; ferner $H = 1$, mithin $X = x'$, $Y = y'$, $Z = z'$, indem der Punkt $(x'y'z')$ sein eigener Schwerpunkt ist.

III.

Ueber die dreiseitige Pyramide und ihre Berührungskugeln.

Von

Herrn *Franz Unferdinger*,

Lebensversicherungs - Calculator der k. k. p. Azienda Assicuratrice zu Triest.

Sind a, b, c, d die den Ecken A, B, C, D gegenüberliegenden Seitenflächen einer dreiseitigen Pyramide $ABCD$ (Taf. I. Fig. I.), ist ϱ der Radius der eingeschriebenen Kugel und V das Volumen dieser Pyramide, so ist nach den Lehren der Stereometrie:

$$(1) \qquad V = \tfrac{1}{3}(a+b+c+d).\varrho.$$

Das Volumen einer dreiseitigen Pyramide kann aber auch auf ähnliche Weise durch die vier Seitenflächen und durch den Radius einer äusseren Berührungskugel ausgedrückt werden und die Ableitung dieses Ausdruckes ist der Zweck dieses Aufsatzes.

Es sei O_1 der Mittelpunkt derjenigen äusseren Berührungskugel, welche der Ecke A gegenüberliegt. Fällen wir von O_1 aus auf die Ebenen der Seitenflächen a, b, c, d die Senkrechten O_1a, O_1b, O_1c, O_1d, so ist der Voraussetzung gemäss

$$O_1a = O_1b = O_1c = O_1d = \varrho_1,$$

gleich dem Radius der äusseren Berührungskugel. Verbindet man den Punkt d mit B und C, so entsteht das in der Ebene der Seitenfläche d liegende Viereck $ABdC$; verbindet man den Punkt c mit B und D, so entsteht das in der Ebene der Seitenfläche c liegende Viereck $ABcD$; und verbindet man den Punkt b mit C und D, so entsteht das Viereck $ACbD$, welches in der Ebene der Seitenfläche b liegt. Denkt man sich über diesen drei Vier-

ecken als Grundflächen die Pyramiden O_1ACdB, O_1ABcD, O_1ACbD errichtet, welche in O_1 ihre gemeinschaftliche Spitze haben, so sind offenbar die Geraden O_1A, O_1C, O_1d, O_1B, O_1D, O_1c, O_1b die Kanten derselben. Die erste und zweite Pyramide liegen mit der Seitenfläche ABO_1 an einander, die erste und dritte Pyramide liegen mit der Seitenfläche ACO_1 an einander und die zweite und dritte Pyramide liegen mit der Seitenfläche ADO_1 an einander. Legt man jetzt noch durch den Punkt O_1 und durch die Seiten BC, BD und CD des Dreieckes BCD Ebenen, so erhellet leicht aus der Construction, dass der von den drei aneinanderliegenden Pyramiden O_1ACdB, O_1ABcD, O_1ACbD gebildete Körper auch gleich ist

$$\text{Pyr. } ABCD + \text{Pyr. } O_1BCD$$
$$+ [\text{Pyr. } O_1dBC + \text{Pyr. } O_1cBD + \text{Pyr. } O_1bCD],$$

mithin ist

$$\text{Pyr. } O_1ABdC + \text{Pyr. } O_1ABcD + \text{Pyr. } O_1ACbD = \text{Pyr. } ABCD$$
$$+ \text{Pyr. } O_1BCD + [\text{Pyr. } O_1dBC + \text{Pyr. } O_1cBD + \text{Pyr. } O_1bCD],$$

oder

$$\text{Pyr. } ABCD = [\text{Pyr. } O_1ABdC + \text{Pyr. } O_1ABcD + \text{Pyr. } O_1ACbD]$$
$$- [\text{Pyr. } O_1dBC + \text{Pyr. } O_1cBD + \text{Pyr. } O_1bCD] - \text{Pyr. } O_1BCD.$$

Verbindet man den Punkt a mit B, C und D, so haben die beiden rechtwinkeligen Dreiecke O_1aB und O_1dB die Hypotenuse O_1B gemeinschaftlich, also weil auch $O_1a = O_1d$ ist, $\Delta\, O_1aB \cong \Delta\, O_1dB$, mithin ist auch $aB = dB$. Auf dieselbe Art beweiset man, dass $aC = dC$, folglich haben die beiden Dreiecke aBC und dBC zwei Seiten wechselweise gleich und die dritte Seite BC gemeinschaftlich, also $\Delta\, aBC \cong \Delta\, dBC$; ebenso ist auch $\Delta\, aBD \cong \Delta\, cBD$ und $\Delta\, aCD \cong \Delta\, bCD$; da nun auch

$$O_1a = O_1d, \qquad O_1a = O_1c, \qquad O_1a = O_1b;$$

so ist, wenn man sich durch die Dreiecke O_1aB, O_1aC, O_1aD Ebenen gelegt denkt,

$$\text{Pyr. } O_1aBC \cong \text{Pyr. } O_1dBC, \quad \text{Pyr. } O_1aBD \cong \text{Pyr. } O_1cBD,$$
$$\text{Pyr. } O_1aCD \cong \text{Pyr. } O_1bCD;$$

da aber, wie die Figur zeigt:

$$\text{Pyr. } O_1aBC + \text{Pyr. } O_1aBD + \text{Pyr. } O_1aCD = \text{Pyr. } O_1BCD = \tfrac{1}{3}a.\varrho_1,$$

so ist vermöge obiger Congruenzen auch:

$$(3) \quad \text{Pyr. } O_1dBC + \text{Pyr. } O_1cBD + \text{Pyr. } O_1bCD = \tfrac{1}{3}a.\varrho_1.$$

Ferner ist nach der Figur:

$$\text{Pyr}.O_1ABdC = \text{Pyr}.O_1ABC + \text{Pyr}.O_1dBC = \tfrac{1}{3}d.\varrho_1 + \text{Pyr}.O_1dBC,$$

$$\text{Pyr}.O_1ABcD = \text{Pyr}.O_1ABD + \text{Pyr}.O_1cBD = \tfrac{1}{3}c.\varrho_1 + \text{Pyr}.O_1cBD,$$

$$\text{Pyr}.O_1ACbD = \text{Pyr}.O_1ACD + \text{Pyr}.O_1bCD = \tfrac{1}{3}b.\varrho_1 + \text{Pyr}.O_1bCD;$$

also, wenn man diese drei Gleichungen addirt und auf die Gleichung (3) Rücksicht nimmt:

$$(4)\qquad \text{Pyr}.\ O_1ABdC + \text{Pyr}.\ O_1ABcD + \text{Pyr}.\ O_1ACbD$$
$$= \tfrac{1}{3}(b+c+d).\varrho_1 + \tfrac{1}{3}a.\varrho_1 = (a+b+c+d)\varrho_1.$$

Werden die Werthe aus (3) und (4) in (2) substituirt, so erhält man:

$$\text{Pyr}.ABCD = V = \tfrac{1}{3}(a+b+c+d).\varrho_1 - \tfrac{1}{3}a.\varrho_1 - \tfrac{1}{3}a.\varrho_1 = \tfrac{1}{3}(b+c+d-a).\varrho_1,$$

$$(5)\qquad V = \tfrac{1}{3}(b+c+d-a).\varrho_1.$$

Bezeichnet man die Radien der äusseren Berührungskugeln, welche den Ecken B, C und D gegenüberliegen, beziehungsweise mit ϱ_2, ϱ_3, ϱ_4, so ist auch

$$(6)\qquad V = \tfrac{1}{3}(a+c+d-b).\varrho_2;$$

$$(7)\qquad V = \tfrac{1}{3}(a+b+d-c).\varrho_3;$$

$$(8)\qquad V = \tfrac{1}{3}(a+b+c-d).\varrho_4.$$

Aus den Gleichungen (1), (5), (6), (7) und (8) folgt:

$$a+b+c+d = \frac{3V}{\varrho},$$

$$b+c+d-a = \frac{3V}{\varrho_1},$$

$$a+c+d-b = \frac{3V}{\varrho_2},$$

$$a+b+d-c = \frac{3V}{\varrho_3},$$

$$a+b+c-d = \frac{3V}{\varrho_4};$$

werden die vier letzten dieser fünf Gleichungen addirt, so erhält man mit Anwendung der ersten derselben:

$$2(a+b+c+d) = 3V\cdot\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}+\frac{1}{\varrho_3}+\frac{1}{\varrho_4}\right) = \frac{6V}{\varrho},$$

also

$$(9)\qquad \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}+\frac{1}{\varrho_3}+\frac{1}{\varrho_4}\right).$$

welchem der Winkel φ gehört, und dessen Mittelpunkt von f den Abstand $nf = E'$ hat, $R.\sin\varphi = A$, $E'.\sin\varphi = E$.

Die erhaltenen Resultate gestatten folgenden Ausdruck: Wenn man eine Reihe von Kreisen beschreibt, deren Mittelpunkte auf einer gegebenen Geraden M liegen, und deren Radien den Abständen ihrer Mittelpunkte von einem festen Punkte f proportional sind, und man lässt den Scheitel eines bestimmten Winkels einen dieser Kreise durchlaufen, während ein Schenkel durch den festen Punkt f geht, so nimmt der andere Schenkel dieselben Lagen ein, wie der Schenkel eines anderen Winkels von ebenfalls bestimmter Grösse, dessen zweiter Schenkel durch denselben Punkt f geht, und dessen Scheitel einen anderen jener Kreise durchläuft.

Diese beiden Winkel werden von der Geraden M und den beiden Geraden gebildet, welche die Mittelpunkte der gedachten Kreise mit dem festen Punkte f verbinden. Ihre Sinus verhalten sich umgekehrt wie die Abstände der Mittelpunkte der zugehörigen Kreise von f, oder umgekehrt wie deren Radien.

Die Curve, welche der Schenkel eines Winkels von constanter Grösse umhüllt, wenn der andere Schenkel durch einen festen Punkt geht, und der Scheitel auf einem gegebenen Kreise bleibt, kann mithin auf unzählige Arten in analoger Weise erzeugt werden, indem man den Kreis durch einen anderen (nicht willkührlichen) und den Winkel durch einen dem Kreise zugehörigen ersetzt.

Diese Curve zu untersuchen, werde f einmal ausserhalb des Ortskreises für den Scheitel des beweglichen Winkels φ angenommen, zweitens innerhalb desselben Kreises. Im ersten Falle liegt f ausserhalb, im zweiten Falle innerhalb eines jeden Kreises, der für eine analoge Erzeugungsweise an die Stelle von (a) treten kann, denn f liegt innerhalb oder ausserhalb eines Kreises (n), je nachdem für diesen das Verhältniss seines Radius zum Abstand des Mittelpunktes von f grösser oder kleiner als 1 ist, und da für alle Kreise, die (n) ersetzen können, dies Verhältniss constant ist, so liegt f entweder innerhalb oder ausserhalb aller.

Im ersten Falle wird der bewegliche Schenkel (so nenne ich kurz den, welcher nicht durch f geht) zweimal Tangente für jeden Ortskreis: Denn der Winkel, welchen die Tangente eines Kreises mit der Verbindungslinie ihres Berührungspunktes mit einem festen Punkte ausserhalb des Kreises bildet, nimmt alle denkbaren Werthe an, und wird zweimal dem constanten Winkel φ gleich.

Findet dies aber statt, so tritt der Berührungspunkt auf dem Kreis als Durchschnittspunkt zweier auf einander folgenden Lagen des beweglichen Schenkels auf, er wird also ein Punkt der von diesem umhüllten Curve, und zwar derjenige sein, in welchem jener Schenkel die Curve berührt. In diesen zwei Punkten hat folglich jeder Ortskreis mit der zu untersuchenden Curve einen Contact erster Ordnung, und es ist aus der Art, wie die Kreise stetig auf einander folgen, klar, dass die Curve ihre Umhüllende ist.

Im zweiten Fall nimmt der Winkel, den die Tangente des Kreises mit der Geraden bildet, welche den Berührungspunkt mit f verbindet, (wir haben hierbei den spitzen Winkel im Auge), alle Werthe zwischen einem Rechten und einem gewissen Minimum an. Wählen wir φ zwischen diesen Grenzen, so gibt es immer zwei Lagen des beweglichen Schenkels, in welchen er Tangente des Kreises ist.

Ist (n) einer der Ortskreise, f der feste Punkt (Taf. I. Fig. 5.), ft senkrecht auf fn, r der Punkt, in welchem ft den Kreis (n), t der Punkt, in welchem er die Gerade M schneidet, so ist $\angle frt'$ jenes Minimum. Wenn nun n so liegt, dass $\angle fnm$ oder $\varphi > \angle frt'$, so wird der bewegliche Schenkel zweimal den Kreis (n) berühren. Die ausgesprochene Bedingung fällt mit dieser $\angle rnf < \angle tnf$ oder $R < nt$ zusammen. Nun ist

$$nt = \frac{E'}{\cos\varphi} = \frac{R}{A} \cdot \frac{E}{\cos\varphi}.$$

Also muss

$$R < \frac{RE}{A\cos\varphi}, \quad \cos\varphi < \frac{E}{A}, \quad \sin\varphi > \frac{\sqrt{A^2 - E^2}}{A}$$

sein. Setzen wir $B = \sqrt{A^2 - E^2}$, und berücksichtigen $\sin\varphi = \frac{A}{R}$, so erhalten wir für die obige Bedingung: $R < \frac{A^2}{B}$.

Demnach gibt es auf allen Ortskreisen, deren Radien $> A$ und $< \frac{A^2}{B}$, zwei Punkte, in welchen der bewegliche Schenkel einen solchen Kreis berührt, und grade so wie vorher folgt hieraus, dass es eine Reihe von Kreisen gibt, welche die zu untersuchende Curve doppelt berühren, und deren Envelloppe sie ist. Für den Kreis, dessen Radius $= \frac{A^2}{B}$, fallen die beiden Punkte, in welchen er die Curve berührt, zusammen; er hat mit der Curve

einen Contact zweiter Ordnung; für Kreise von grösserem Radius wird der Contact imaginär.

Aus dem Gesagten erhellt, dass man beliebig viele Punkte der umhüllten Curve dadurch erhalten kann, dass man auf den Ortskreisen diejenigen zwei Punkte bestimmt, in welchen der bewegliche Schenkel des Winkels φ den zugehörigen Kreis berührt. Im Folgenden wollen wir diesen Weg einschlagen.

Um (Taf. I. Fig. 6. A. Taf. II. Fig. 6. B. C.) auf dem Ortskreise (n) die beiden Punkte zu finden, in welchen der bewegliche Schenkel von $\varphi = fnm$ denselben berührt, errichte man in f auf fn die Senkrechte ft, über nt als Durchmesser beschreibe man einen Kreis, dieser schneidet den gegebenen (n) in den gesuchten Punkten c, $\mathfrak{c}$. Denn tc, $t\mathfrak{c}$ sind zwei Tangenten des Kreises (n), und in dem Hülfskreise stehen die Winkel tcf, $t\mathfrak{c}f$, φ auf demselben Bogen tf.

In Taf. II. Fig. B., wo f innerhalb des Kreises (n) angenommen wird, wird jener Hülfskreis, dessen Durchmesser nt ist, entweder (n) schneiden, oder berühren, oder keinen Punkt mit demselben gemein haben, jenachdem $R \lesseqgtr nt$, welches wieder wie früher zu der Bedingung $R \leqq \frac{A^2}{B}$ für reellen Contact führt.

Man sieht auch (Taf. II. Fig. 6. C.), dass, wenn fxt eine Lage des Winkels φ ist, man auf folgende Weise den Punkt c' erhält, in welchem sein Schenkel xt die umhüllte Curve berührt. Man ziehe ft, errichte darauf fn' senkrecht und beschreibe über $n't$ als Durchmesser einen Kreis, welcher xt in c' schneidet. Die Dreiecke fxc', fnn' sind, wie leicht zu zeigen, ähnlich, also ist n' der Mittelpunkt, $n'c'$ der Radius eines unserer Ortskreise, welcher überdies von xt in c' berührt wird, und für welchen $\varphi' = fn't = fc't$. Kehren wir zu Taf. I. Fig. 6. A. zurück. Wir ziehen $c\mathfrak{c}$, diese Linie schneide den Durchmesser $a\mathfrak{a}$ in d, dann behaupte ich, dass d zum Ort eine Gerade hat, die mit M parallel ist und welche den Durchmesser $A\mathfrak{A}$ des kleinsten Ortskreises (m) in einem Punkte D trifft, welcher der zu f, A, $\mathfrak{A}$ zugeordnet harmonische ist. Nun ist für den Kreis (n) die Gerade $c\mathfrak{c}$ die Polare des Punktes t, und weil $tfn = 90^0$, tf die Polare des Punktes d, folglich a, $\mathfrak{a}$, d, f vier harmonische Punkte, also auch A, $\mathfrak{A}$, D, f. Da dD parallel M und D ein völlig bestimmter Punkt ist, so ergibt sich die Richtigkeit des Behaupteten.

Ferner erscheint der Kreis $(\mathfrak{a})$ als Ort derjenigen Punkte, deren Abstände von f und d in dem constanten Verhältniss $af:ad = Af:AD = \mathfrak{A}f:\mathfrak{A}D$ stehen, somit $cf:cd = \mathfrak{c}f:\mathfrak{c}d =$ Const.

Demnach ist die umhüllte Curve der Ort derjenigen Punkte, deren Abstände von f zu ihren Abständen von einer festen Geraden D ein constantes Verhältniss haben. Setzen wir noch $mD = D$, so hat man für dieses constante Verhältniss:

$$\delta = \frac{Af}{AD} = \frac{\mathfrak{A}f}{\mathfrak{A}D},$$

d. i.

$$\frac{E-A}{A-D} = \delta, \quad \frac{E+A}{A+D} = \delta;$$

also

$$2A.\delta = 2E, \quad \delta = \frac{E}{A} \quad \text{und} \quad 2D.\delta = 2A, \quad \delta = \frac{A}{D};$$

woraus auch:

$$A^2 = E.D.$$

Der zur Bestimmung der Punkte c, $\mathfrak{c}$ gebrauchte Hülfskreis geht ausser durch f noch durch einen zweiten Punkt $\mathfrak{S}$ der von f auf M gefällten Senkrechten, und welcher so liegt, dass $m\mathfrak{S} = fm = E$.

Es ist $cf = \mathfrak{c}\mathfrak{S}$, $c\mathfrak{S} = \mathfrak{c}f$. Aus den Gleichungen

$$cf = \delta . cd,$$
$$\mathfrak{c}f = \delta . \mathfrak{c}d$$

folgt:

$$cf - \mathfrak{c}f = \delta . (cd - \mathfrak{c}d) = 2\,\delta D = 2A = \text{const.},$$

oder auch

$$cf - c\mathfrak{S} = \mathfrak{c}f - \mathfrak{c}\mathfrak{S} = 2A.$$

Die Punkte c haben somit die Eigenschaft, dass die Differenz ihrer Abstände von zwei festen Punkten unveränderlich ist.

Liegt f innerhalb der Ortskreise, so erhält man ganz auf dieselbe Weise für den Ort der Punkte c eine Ellipse, von welcher f ein Brennpunkt und der Mittelpunkt und Durchmesser des kleinsten Ortskreises Mittelpunkt und grosse Axe ist.

Ellipse und Hyperbel sind also die Umhüllenden einer Schaar

von Kreisen, deren Mittelpunkte auf der Geraden liegen, welche die Axe B, $B\sqrt{-1}$ enthält und deren Radien den Abständen ihrer Mittelpunkte vom Brennpunkte proportional sind, und zwar ist $\frac{A}{E}$ das Verhältniss zwischen Radius und Abstand.

Gleichzeitig werden diese Curven von dem beweglichen Schenkel eines Winkels φ von bestimmter Grösse berührt, dessen Scheitel einen dieser Kreise vom Radius R durchläuft, dessen zweiter Schenkel sich um den Brennpunkt dreht. Dieser Winkel wird durch die Relation $\sin\varphi = \frac{A}{R}$ bestimmt.

Anmerkung. Wenn φ variabel genommen wird, während der zugehörige Kreis derselbe bleibt, so erhalten wir diesen als Enveloppe von Kegelschnitten, welche einen Brennpunkt gemeinsam haben, deren zweiter Brennpunkt mit jenem auf einem bestimmten Kreisumfang liegt, und für welche die Excentrizität $\frac{E}{A}$ constant ist.

Für die Entwickelung vieler Eigenschaften der Ellipse und Hyperbel (Taf. II. Fig. 7.) bietet sich als directer und rasch zum Ziele führender Weg ihre Beschreibung mit Hülfe des Ortskreises dar, dessen Durchmesser ein Minimum, nämlich der grossen Axe des Kegelschnitts gleich ist, und zu dem der Winkel $\varphi = 90^0$ gehört. f, g seien die beiden Brennpunkte, fxy eine Lage des beweglichen Winkels. Den Punkt c zu bestimmen, in welchem xy den umhüllten Kegelschnitt berührt, hat man nach Obigem den Durschnittspunkt t der Geraden xy und M zu bestimmen, und durch die Punkte f, g, t einen Kreis zu legen, welcher xy in dem Punkte c schneidet. Verbindet man c mit n, so wird $\angle fcn = \angle gcn = 90^0 - \varphi$ und auch $\angle xcf = \angle ycg = \varphi$.

Ferner sind die Dreiecke fxc, fmn einstimmig ähnlich, also ist n der Mittelpunkt des Ortskreises für den Scheitel des Winkels φ, $nc = R = na = na$. Ziehen wir durch c eine Parallele zu An bis zum Durchschnitt d mit aa, so ist der Ort dieses Punktes die Directrix des Kegelschnitts, denn cd ist im Kreise (n) die Polare zu t, also tf die Polare zu d, folglich d, a, f, a vier harmonische Punkte u. s. w. wie oben:

$$cf : cd = af : ad = Af : AD = E : A.$$

Die Figur liefert eine Reihe von Gleichungen zwischen folgenden Stücken:

$$\angle fsx = \varphi, \quad fc = F, \quad gc = G, \quad fs = X,$$
$$gy = Y, \quad cn = R, \quad oe = Q, \quad mc = D.$$

Der zu mc conjugirte halbe Durchmesser sei D', ρ der Krümmungsradius für den Punkt c, M der Abstand der Tangente xy vom Mittelpunkte m.

$$F + G = 2A,$$
$$X.\, Y = B^2.$$

1) $R = \dfrac{A}{\sin\varphi}$.

2) $X = F.\sin\varphi$, $Y = G.\sin\varphi$; $2M = X + Y = (F+G)\sin\varphi = 2A\sin\varphi$;

also:

$$M = A.\sin\varphi.$$

3) Weil $fe : eg = X : Y$, so hat man $(X+Y).\, Q = Y.X + X.Y$,

oder

$$2M.Q = 2B^2;$$

also:

$$Q = \frac{B^2}{A\sin\varphi}.$$

Aus 1): $R : Q : R - Q = A^2 : B^2 : E^2$. Aus 1) und 2): $R.M = A^2$. Aus 2) und 3): $QM = B^2$.

4) $X.Y = F.\, G.\sin\varphi^2 = B^2$, $\sin\varphi = \dfrac{B}{\sqrt{F.G}}$, also aus 1):

$$R = \frac{A}{B}\cdot\sqrt{F.G}, \qquad Q = \frac{B}{A}\cdot\sqrt{F.G};$$

mithin

$$R.Q = F.G, \quad M = \frac{AB}{\sqrt{F.G}}.$$

5) $M.D' = A.B$, folglich nach 2): $D' = \dfrac{B}{\sin\varphi}$; nach 1) und 3): $D' : R = B : A$, $D' : Q = A : B$, nach 4): $D' = \sqrt{F.G} = \sqrt{R.Q}$.

6) Dreieck $fce \backsim fcd$, denn $\angle fcd = \angle cfe$, $\angle fce = 90^0 - \varphi = \angle fdc$.

Also

$$fe : fc = ge : gc = \text{const.} = fc : cd = E : A.$$

Der Punkt c theilt die Sehne xy in dem Verhältniss $F:G$. Man kann ihn also auch so bestimmen: man verlängere fx um ein gleiches Stück $f'x$, verbinde f' mit g, so geht diese Linie durch c. Daraus folgt mx parallel gc. Nennen wir ds das Element der Ellipse, welches in xy liegt, $d\sigma$ das Element des Kreises (m), dessen Verlängerung die Tangente in x ist, so hat man für den Winkel, den zwei auf einander folgende Lagen des um f drehbaren Schenkels fx bilden:

erstens: $\frac{d\sigma \,.\, \cos cxT}{X}$, und da fx der Normale cn parallel ist:

zweitens: $\frac{ds}{\varrho}$.

Nun ist $\angle cxT = 90^0 - \varphi$; demnach

$$\frac{ds}{\varrho} = \frac{d\sigma \,.\, \sin\varphi}{X}.$$

Für den Winkel, den zwei auf einander folgende Lagen des Radius mx einschliessen, hat man, weil dieser Radius dem Leitstrahl gc parallel bleibt, einmal $\frac{d\sigma}{A}$, und

zweitens: $$\frac{ds \,.\, \sin gcy}{G} = \frac{ds \,.\, \sin\varphi}{G},$$

woraus

$$\frac{d\sigma}{A} = \frac{ds \,.\, \sin\varphi}{G}.$$

Aus beiden Gleichungen folgt:

$$\varrho = \frac{X.G}{A.\sin\varphi^2} = \frac{X.Y}{A.\sin\varphi^3} = \frac{B^2}{A.\sin\varphi^3}.$$

Also aus 1):

$$\varrho = \frac{B^2.R^3}{A^4} = \frac{A^2}{B^4}.Q^3 = \frac{Q}{\sin\varphi^2},$$

oder aus 4):

$$\varrho = \frac{(R.Q)}{A.B} = \frac{(F.G)}{A.B}.$$

Aus 3):

$$\varrho = \frac{A^2.B^2}{M^3}, \text{ und aus 5): } \varrho = \frac{D^3}{A.B} = \frac{D^2}{M}.$$

Die Entwickelung dieser Resultate für die Hyperbel geschieht auf dieselbe Weise.

Bei der Parabel treten an die Stelle der Ortskreise (n) die Tangenten dieser Curve, und es bietet keine Schwierigkeit, den Lehrsatz, von welchem wir ausgingen, demgemäss zu modifiziren und zu beweisen.

Schluss. Die synthetische Untersuchung der Kegelschnitte, wenn man von ihrer Beziehung zum Brennpunkt und der zugehörigen Directrix ausgeht, führt auch zu den Ortskreisen (n). (Taf. II. Fig. 8.)

Man suche nämlich die Punkte von der Eigenschaft, dass das Verhältniss ihrer Abstände von einem festen Punkte f und einer festen Geraden D ein gegebenes ist, auf den auf D senkrecht stehenden Geraden. In derjenigen dieser Geraden, welche durch f geht, erhält man zwei solche Punkte A, $\mathfrak{A}$, welche Df nach dem gegebenen Verhältniss harmonisch theilen. Eine andere Gerade, auf welcher man die Punkte von der gedachten Eigenschaft finden will, sei $d\mathfrak{d}$. Man ziehe Aa, $\mathfrak{A}\mathfrak{a}$ parallel zu D, so sind d, f, $\mathfrak{a}$, a vier harmonische Punkte, $af:ad$ ist das gegebene Verhältniss. Der Kreis nun, welcher $a\mathfrak{a}$ zum Durchmesser hat, ist bekanntlich der Ort für diejenigen Punkte c, für welche $cf:cd = af:ad$. Trifft er also $d\mathfrak{d}$ in c, $\mathfrak{c}$, so sind dies zwei Punkte der gesuchten Curve.

An diese Weise, die Punkte zu bestimmen, lassen sich durch leichte Entwickelungen die oben erhaltenen Resultate anknüpfen.

V.

Ueber eine besondere Auflösung der Gleichungen von der Form

$$ax+by+cz=0, \qquad a_1xy+b_1yz+c_1zx=0.$$

Von

dem Herausgeber.

Die Auflösung der Gleichungen von der obigen Form, in Verbindung mit einer gewissen dritten Gleichung, hat zwar in den meisten Fällen keine besondere Schwierigkeit. Indess scheint mir doch die folgende Methode ihrer besonderen Eleganz wegen einiger Beachtung nicht unwerth zu sein.

Man bestimme die Grösse G aus der Gleichung

$$(1-bc_1G)(1-ca_1G)(1-ab_1G)=-abca_1b_1c_1G^3,$$

nämlich aus der Gleichung

$$1-(ab_1+bc_1+ca_1)G+(abc_1b_1+bca_1c_1+cab_1a_1)G^2=0,$$

welche nur vom zweiten Grade ist, und berechne dann, indem man dem x beliebige Werthe beilegt, die Grössen y, z mittelst der Formeln:

$$y=-\frac{ac_1Gx}{1-ca_1G}, \qquad z=-\frac{(1-bc_1G)x}{cb_1G}.$$

Denn dann ist

$$(1-bc_1G)x=-cb_1Gz,$$
$$(1-ca_1G)y=-ac_1Gx;$$

also

$$(1-bc_1G)(1-ca_1G)y=acb_1c_1G^2z.$$

Weil aber

$$(1-bc_1G)(1-ca_1G)(1-ab_1G)=-abca_1b_1c_1G^3$$

ist, so ist, wie man leicht durch Division findet:

$$\frac{y}{1-ab_1G}=-\frac{z}{ba_1G},$$

oder

$$(1-ab_1G)z=-ba_1Gy.$$

Daher hat man die drei folgenden Gleichungen:

$$(1-bc_1G)x=-cb_1Gz,$$
$$(1-ca_1G)y=-ac_1Gx,$$
$$(1-ab_1G)z=-ba_1Gy$$

oder:

$$x=G(bc_1x-cb_1z),$$
$$y=G(ca_1y-ac_1x),$$
$$z=G(ab_1z-ba_1y);$$

also:

$$ax+by+cz=G\left\{\begin{matrix}abc_1x+bca_1y+cab_1z\\-abc_1x-bca_1y-cab_1z\end{matrix}\right\}=0$$

und

$$a_1xy+b_1yz+c_1zx$$
$$=G\left\{\begin{matrix}ba_1c_1xy-ca_1b_1yz\\+ca_1b_1yz-ab_1c_1zx\\+ab_1c_1zx-ba_1c_1xy\end{matrix}\right\}=0.$$

Hieraus sieht man also, dass die beiden Gleichungen

$$ax+by+cz=0,\quad a_1xy+b_1yz+c_1zx=0$$

wirklich durch die Formeln

$$1-(ab_1+bc_1+ca_1)G+(abc_1b_1+bca_1c_1+cab_1a_1)G^2=0,$$

$$y=-\frac{ac_1Gx}{1-ca_1G},\quad z=-\frac{(1-bc_1G)x}{cb_1G};$$

wenn man für x beliebige Werthe setzt, aufgelöst werden.

Weil

$$(1-bc_1G)(1-ca_1G)(1-ab_1G)=-abca_1b_1c_1G^3,$$

also

$$\frac{1-bc_1G}{cb_1G}=-\frac{ac_1G}{1-ca_1G}\cdot\frac{ba_1G}{1-ab_1G}$$

ist, so kann man die, unsere Gleichungen auflösenden Formeln auch unter der folgenden Form darstellen:

$$1-(ab_1+bc_1+ca_1)G+(abc_1b_1+bca_1c_1+cab_1a_1)G^2=0,$$

$$y=-\frac{ac_1G}{1-ca_1G}x,\quad z=\frac{ac_1G}{1-ca_1G}\cdot\frac{ba_1G}{1-ab_1G}x.$$

Hätte man nun etwa die Grössen x, y, z aus den drei folgenden Gleichungen zu bestimmen:

$$ax+by+cz=0,$$

$$a_1xy+b_1yz+c_1zx=0,$$

$$x^2+y^2+z^2=1;$$

so erhält man, wenn man der Kürze wegen

$$\varkappa=\frac{ac_1G}{1-ca_1G},\quad \lambda=\frac{bc_1G}{1-ab_1G}$$

setzt, wo also nach dem Obigen

$$y=-\varkappa x,\quad z=\varkappa\lambda x$$

ist, mittelst der dritten Gleichung des obigen Systems dreier Gleichungen sehr leicht die folgenden Ausdrücke:

$$x=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\varkappa^2(1+\lambda^2)}},$$

$$y=\mp\frac{\varkappa}{\sqrt{1+\varkappa^2(1+\lambda^2)}},$$

$$z=\pm\frac{\varkappa\lambda}{\sqrt{1+\varkappa^2(1+\lambda^2)}};$$

in denen die oberen und unteren Zeichen sich auf einander beziehen.

Setzte man

$$x=\frac{ac_1G}{1-ca_1G}, \quad \mu=\frac{1-bc_1G}{cb_1G};$$

nach dem Obigen also

$$y=-xx, \quad z=-\mu x;$$

so wäre mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$x=\pm\frac{1}{\sqrt{1+x^2+\mu^2}},$$

$$y=\mp\frac{x}{\sqrt{1+x^2+\mu^2}},$$

$$z=\mp\frac{\mu}{\sqrt{1+x^2+\mu^2}}.$$

Wenn man also nur G aus der quadratischen Gleichung

$$1-(ab_1+bc_1+ca_1)G+(abc_1b_1+bca_1c_1+cab_1a_1)G^2=0$$

bestimmt, so lässt sich ein System dreier Gleichungen von der allgemeinen Form

$$ax+by+cz=0,$$

$$a_1xy+b_1yz+c_1zx=0,$$

$$\varphi(x,\ y,\ z)=0$$

in vielen Fällen sehr leicht und elegant auflösen.

Es früge sich, ob diese Auflösungsmethode nicht vielleicht noch einer Erweiterung, etwa auf Gleichungen von der Form

$$ax+by+cz=m,$$

$$a_1xy+b_1yz+c_1zx=m_1,$$

fähig wäre?

VI.

Betrachtung einer eigenthümlichen Spirallinie.

Von

Herrn Professor Dr. *J. Ph. Wolfers*

zu Berlin.

Ein in Eulers Integral-Rechnung §. 729—732 behandeltes Beispiel zur Auflösung einer Differential-Gleichung zweiter Ordnung führt auf eine eigenthümliche Spirallinie, deren ausführliche Betrachtung nicht ohne Interesse zu sein scheint. Um einige a. a. O. nicht vorkommende Formeln zur Hand zu haben, schicken wir sie hier voran.

Nimmt man bei einer Curve einfacher Krümmung das Element des Bogens oder $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ constant an, so wird der Krümmungshalbmesser in dem Punkte, dessen rechtwinklige Coordinaten x und y sind,

$$(1) \qquad \gamma = \frac{ds dy}{ddx};$$

vergl. Grunerts Archiv. Theil IX. pag. 60. u. f. Setzt man $dy = pdx$, so wird $ds = \sqrt{1+p^2}.dx$, und weil hier ds als constant angenommen worden ist, also $dds = 0$ wird,

$$(2) \qquad ddx = -\frac{pdxdp}{1+p^2}$$

und

$$(3) \qquad \gamma = -\frac{dx(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{dp}.$$

Wir wollen noch die Gleichungen

(4) $$d.\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}=\frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}},$$

(5) $$d.\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}=-\frac{pdp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$$

hinzufügen.

§. 1.

In Eulers Integral-Rechnung wird nun, indem

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$$

constant sein soll, die Gleichung

$$\frac{dsdy}{ddx}=a.\text{Arc.tg}.\frac{dy}{dx}$$

vorausgesetzt; man soll x und y bestimmen.

Für $dy=pdx$ geht die vorstehende Gleichung über in folgende:

$$-\frac{dx(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{dp}=a.\text{Arc.tg}.p,$$

und hieraus erhalten wir:

(6) $$ds=-\frac{adp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}\,\text{Arc.tg}.p$$

und

(7) $$dy=-\frac{apdp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}\,\text{Arc.tg}.p.$$

Statt dieser zwei Gleichungen können wir nach (4) und (5) schreiben:

$$dx=-a.\text{Arc.tg}.p\times d.\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$$

und

$$dy=-a.\text{Arc.tg}.p\times d.\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Nach der bekannten Formel $\int udv=uv-\int vdu$ und weil $d.\text{Arc.tg}.p=\frac{dp}{1+p^2}$, erhalten wir daher:

$$x = -\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}\text{Arc.tg.}p + a\int\frac{pdp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$y = \frac{a}{\sqrt{1+p^2}}\text{Arc.tg.}p - a\int\frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}};$$

d. h. nach (4) und (5):

$$(8) \qquad x = C - \frac{a}{\sqrt{1+p^2}} - \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}\text{Arc.tg.}p,$$

$$(9) \qquad y = D - \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}} + \frac{a}{\sqrt{1+p^2}}\text{Arc.tg.}p.$$

Hier sind C und D die willkührlichen Constanten der Integration.

§. 2.

Ist x die Abscisse und y die Ordinate einer Curve, so muss der Krümmungshalbmesser dem Winkel proportional sein, welchen die Tangente der Curve mit der Abscissenaxe bildet. Die Curve ist daher eine gewisse Spirallinie, welche sich um den Anfangspunkt der Coordinaten entwickelt.

§. 3.

Setzen wir Arc.tg.$p=\varphi$, so wird

$$p = \text{tg}\varphi, \quad \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} = \cos\varphi \quad \text{und} \quad \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = \sin\varphi;$$

mithin nach (8) und (9):

$$(10) \qquad x = C - a\cos\varphi - a\varphi\sin\varphi,$$

$$(11) \qquad y = D - a\sin\varphi + a\varphi\cos\varphi;$$

und hieraus

$$(12) \qquad x\cos\varphi + y\sin\varphi = C\cos\varphi + D\sin\varphi - a.$$

§. 4.

Sollen für $\varphi=0$, x und y verschwinden, so muss

$$C = a \quad \text{und} \quad D = 0$$

sein, und wir erhalten in diesem Falle statt (10) und (11) die Gleichungen:

(13) $$x = a - a\cos\varphi - a\varphi\sin\varphi,$$

(14) $$y = \quad -a\sin\varphi + a\varphi\cos\varphi;$$

sowie statt (12) hier

(15) $$x\cos\varphi + y\sin\varphi = -a.$$

So lange φ sehr klein ist, erhalten wir mit grosser Annäherung:

$$x = -\tfrac{1}{2}a\varphi^2 + \tfrac{1}{8}a\varphi^4,$$

$$y = -\tfrac{1}{3}a\varphi^3 + \tfrac{1}{30}a\varphi^5$$

und

$$y^2 = -\frac{8x^3}{9a}.$$

§. 5.

Da aus (13) und (14)

$$dx = -a\varphi\cos\varphi d\varphi \quad \text{und} \quad dy = -a\varphi\sin\varphi d\varphi;$$

folgt, so wird

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = a\varphi d\varphi,$$

und wenn man integrirt:

$$s = E + \tfrac{1}{2}a\varphi^2,$$

oder, weil für $\varphi = 0$, x und y also auch s verschwinden,

(16) $$s = \tfrac{1}{2}a\varphi^2.$$

Endlich wird nach der Voraussetzung der Krümmungshalbmesser

(17) $$\gamma = a\varphi.$$

Vergleicht man (17) mit (13) und (14), so wird

für
$$\varphi = 90^0, \quad \gamma = a - x,$$
$$\varphi = 180^0, \quad \gamma = -y,$$
$$\varphi = 270^0, \quad \gamma = x - a,$$
$$\varphi = 360^0, \quad \gamma = y$$

u. s. w. f.

§. 6.

Nach den Formeln (13), (14), (16) und (17) sind die in der unten folgenden Tabelle enthaltenen numerischen Werthe von x, y, s und γ berechnet worden, und zwar für die Werthe des Winkels φ von 0 bis 360° in Zwischenräumen von 10°; dabei wurde der Werth von $a=100$ angenommen. Für die zwei Coordinaten sind die vierten, für s die zwei ersten und für γ nur die ersten Differenzen hinzugefügt worden, theils zur Controlle der Rechnung, theils um für zwischenliegende Werthe von φ die Werthe jener Functionen durch Interpolation zu ermitteln. Die nicht vollständige Regelmässigkeit im Gange der Differenzen ist dem Umstande zuzuschreiben, dass nur fünfziffrige Logarithmen angewandt worden sind.

Bei s müssen die zweiten Differenzen constant und die dritten $=0$ sein, weil aus (16)

$$ds = a\varphi d\varphi, \quad dds = ad\varphi^2 \quad \text{und} \quad d^3s = 0$$

folgt; eben so müssen, weil nach (17)

$$d\gamma = ad\varphi \quad \text{und} \quad dd\gamma = 0$$

ist, bei γ die ersten Differenzen constant und die zweiten $=0$ sein.

§. 7.

In diesen Formeln, wie auch in den danach berechneten Tabellen wird die ursprüngliche Bedingung, dass ds constant sei, nicht erfüllt und zwar aus dem einfachen Grunde, weil nicht s, sondern das Argument φ als regelmässig fortschreitend angenommen ist. Wollte man jene Bedingung erfüllen, so müsste man das alsdann ungleichförmig fortschreitende Argument φ erst aus der Gleichung

$$(18) \qquad \varphi = \sqrt{\frac{2s}{a}}$$

herleiten und mit diesem Werthe die Rechnung durchführen. Gesetzt etwa, dass die Werthe von s gleichförmig nach der Reihe

5, 10, 15, 20, etc.

fortgehen sollen, so erhält man nach der beiläufig angestellten Rechnung folgendes Bruchstück einer Tabelle:

s	φ			x			y		
0	0°			0			0		
		+18,12			—4,88			—1,05	
5	18,12		—10,62	— 4,88		+0,25	—1,05		—0,81
		7,50			4,63			1,86	
10	25,62		1,74	— 9,51		25	—2,91		54
		5,76			4,38			2,40	
15	31,38		0,90	—13,89		23	—5,31		40
		4,86			4,15			2,80	
20	36,24			—18,04			—8,11		

γ		
0		
	+31,62	
31,62		—18,52
	13,10	
44,72		3,05
	10,05	
54,77		1,57
	8,48	
63,25		

§. 8.

Wollte man zur Construction der Curve statt der in der Tabelle angegebenen rechtwinkligen Coordinaten x und y die Polarcoordinaten r und v anwenden, so würden sich diese aus jenen einfach herleiten lassen, indem

$$\text{tg}\, v = \frac{y}{x} \tag{19}$$

und

$$r = \frac{y}{\sin v} = \frac{x}{\cos v}. \tag{20}$$

Natürlich werden bei jedem folgenden Umlaufe die Coordinaten x und y, weil in dem einen Gliede ihrer Ausdrücke φ selbst vorkommt, absolut grösser ausfallen, jedoch dabei ihre Zeichen wechseln. Der Werth von s, so wie auch der von γ, wird stetig grösser, und nach unendlich vielen Umläufen wird der letztere unendlich gross, so dass zuletzt die Spirale in eine gerade Linie übergeht. Einen Grenzwerth gibt es weder für x noch für y, eben weil φ in ihren Ausdrücken enthalten ist. Beide werden $=0$, so oft respective

$$1 - \cos\varphi - \varphi \sin\varphi = 0 \quad \text{oder} \quad \text{tg}\, \tfrac{1}{2}\varphi = \varphi$$

und

$$-\sin\varphi + \varphi\cos\varphi = 0 \quad \text{oder} \quad \text{tg}\, \varphi = \varphi$$

ist. Diese Gleichungen lassen sich, weil transcendent, nur indirect auflösen, weil aber die Tangenten alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen, ersieht man aus ihnen sogleich, dass die Möglichkeit des Verschwindens von x und y auch bei den grössten Werthen von φ nicht aufhört.

φ	x	I.	II.	III.	IV.	y	I.	II.	III.	IV.	s	I.	II.	γ	
0°	0,0	−1,5				0,0	−0,2				0,0	+1,5		0,0	+1
10	− 1,5	4,4	−2,9	+0,4	+0,3	− 0,2	1,2	−1,0	−1,1	+0,4	1,5	4,6	+3,1	17,5	1
20	− 5,9	6,9	2,5	0,7	+0,2	− 1,4	3,3	2,1	0,7	−0,1	6,1	7,6	3,0	34,9	1
30	− 12,8	8,7	1,8	0,9	0,0	− 4,7	6,1	2,8	0,8	+0,4	13,7	10,7	3,1	52,4	1
40	− 21,5	9,6	−0,9	0,9	+0,4	− 10,8	9,7	3,6	0,4	0,1	24,4	13,7	3,0	69,8	1
50	− 31,1	9,6	0,0	1,3	−0,2	− 20,5	13,7	4,0	−0,3	+0,6	38,1	16,7	3,0	87,3	1
60	− 40,7	8,3	+1,3	1,1	+0,2	− 34,2	18,0	4,3	+0,3	−0,1	54,8	19,8	3,1	104,7	1
70	− 49,0	5,9	2,4	1,3	−0,2	− 52,2	22,0	4,0	0,2	+0,6	74,6	22,9	3,1	122,2	1
80	− 54,9	−2,2	3,7	1,1	0,2	− 74,2	25,8	3,8	0,8	0,2	97,5	25,9	3,0	139,6	1
90	− 57,1	+2,6	4,8	0,9	0,1	−100,0	28,8	3,0	1,0	0,1	123,4	28,9	3,0	157,1	1
100	− 54,5	8,3	5,7	0,8	0,2	−128,8	30,8	2,0	1,1	0,3	152,3	32,0	3,1	174,5	1
110	− 46,2	14,8	6,5	+0,6	−0,6	−159,6	31,7	−0,9	1,4	+0,3	184,3	35,0	3,0	192,0	1
120	− 31,4	21,9	7,1	0,0	+0,1	−191,3	31,2	+0,5	1,7	−0,1	219,3	38,1	3,1	209,4	1
130	− 9,5	29,0	7,1	+0,1	−0,7	−222,5	29,0	2,2	1,6	−0,1	257,4	41,1	3,0	226,9	1
140	+ 19,5	36,2	7,2	−0,6	0,3	−251,5	25,2	3,8	1,5	+0,1	298,5	44,2	3,1	244,4	1
150	55,7	42,8	6,6	0,9	0,3	−276,7	19,9	5,3	1,6	−0,1	342,7	47,2	3,0	261,8	1
160	98,5	48,5	5,7	1,2	0,2	−296,6	13,0	6,9	1,5	0,3	389,9	50,3	3,1	279,3	1
170	147,0	53,0	4,5	1,4	0,5	−309,6	−4,6	8,4	1,2	0,4	440,2	53,3	3,0	296,7	1
180	200,0	56,1	3,1	1,9	0,1	−314,2	+5,0	9,6	0,8	0,2	493,5	56,3	3,0	314,2	1
190	256,1	57,3	+1,2	2,0	−0,2	−309,2	15,4	10,4	0,6	0,5	549,8	59,4	3,1	331,6	1
200	313,4	56,5	−0,8	2,2	+0,1	−293,8	26,4	11,0	+0,1	0,2	609,2	62,5	3,1	349,1	1
210	369,9	53,5	5,0	2,1	−0,2	−267,4	37,5	11,1	−0,1	0,8	671,7	65,5	3,0	366,5	1
220	423,4	48,4	5,1	2,3	+0,1	−229,9	48,5	11,0	0,9	0,3	737,2	68,5	3,0	384,0	1
230	471,8	41,0	7,4	2,2	+0,5	−181,4	58,6	10,1	1,2	0,2	805,7	71,6	3,1	401,4	1
240	512,8	31,4	9,6	1,7	−0,2	−122,8	67,5	8,9	1,4	0,8	877,3	74,6	3,0	418,9	1
250	544,2	20,1	11,3	1,9	+0,9	− 55,3	75,0	7,5	2,2	0,1	951,9	77,7	3,1	436,3	1
260	564,3	+6,9	13,2	1,0	0,0	+ 19,7	80,3	5,3	2,3	0,2	1029,6	80,7	3,0	453,8	1
270	571,2	−7,3	14,2	1,0	+0,8	100,0	83,3	3,0	2,5	−0,5	1110,3	83,8	3,1	471,2	1
280	563,9	22,5	15,2	−0,2	0,2	183,3	83,8	+0,5	3,0	+0,2	1194,1	86,8	3,0	488,7	1
290	541,4	37,9	15,4	0,0	0,9	267,1	81,3	−2,5	2,8	−0,2	1280,9	89,9	3,1	506,2	1
300	503,5	53,3	15,4	+0,9	0,4	348,4	76,0	5,3	3,0	+0,3	1370,8	92,9	3,0	523,6	1
310	450,2	67,8	14,5	1,3	0,5	424,4	67,7	8,3	2,7	0,0	1463,7	96,0	3,1	541,1	1
320	382,4	81,0	13,2	1,8	0,6	492,1	56,7	11,0	2,7	+0,6	1559,7	99,0	3,0	558,5	1
330	301,4	92,4	11,4	2,4	0,4	548,8	43,0	13,7	2,1	0,0	1658,7	102,0	3,0	576,0	1
340	209,0	101,4	9,0	2,8		591,8	27,2	15,8	2,1		1760,7	105,1	3,1	593,4	1
350	+107,6	107,6	6,2			619,0	9,3	17,9			1865,8	108,1	3,0	610,9	1
360	0,0					628,3					1973,9			628,3	

Literarischer Bericht

CIX.

Erwiederung an Herrn Dr. Carl Pfaff

von

W. Sartorius v. Waltershausen.

Herr Dr. Carl Pfaff, der Herausgeber des Briefwechsels von J. F. Pfaff und dem Herzoge C. von Würtemberg, beklagt sich auf das Bitterste in dieser Zeitschrift (27. Theil, 3. Heft), dass in meiner Schrift „Gauss zum Gedächtniss" das Verhältniss seines Vaters zu dem grossen Mathematiker falsch und unwürdig aufgefasst sei. Er beschuldigt mich, dass ich aus übelwollender Uebertreibung, aus Eitelkeit und Anmaassung das Verhältniss beider Männer entstellt habe und zweifelt sogar an der wahrheitsgemässen Beschaffenheit meiner Mittheilungen.

Es ist unter meiner Würde die persönlichen Angriffe zu erwiedern, um so mehr, da sich jeder Billigdenkende sogleich überzeugen wird, dass ich als Biograph nur die Aufgabe habe in dieser Angelegenheit den wahren Sachgehalt darzulegen und dass ich ganz unbetheiligt ausserhalb der Schranken stehe, in denen diese Meinungsverschiedenheiten einander entgegentreten.

Wenn ich in meiner Schrift klar und bestimmt hervorgehoben habe, das in jenem Briefwechsel das Verhältniss von Pfaff zu Gauss, als das eines Lehrers zu seinem Schüler durchaus unrichtig hingestellt sei, so geschieht dieses nicht in meinem Namen, sondern im ausdrücklichen Auftrage unseres unsterblichen Freundes.

Um den Leser dieser Zeilen von der Richtigkeit meiner Auf-

fassungsweise zu überzeugen, werde ich nicht wie Herr Pfaff durch Hörensagen vererbte Nachrichten vorbringen, sondern mich auf untrügliche Quellen, auf schriftliche Aussagen von Gauss stützen, so wie auf Aeusserungen, welche Gauss nicht nur gegen mich, sondern auch gegen mehrere hier anwesende Freunde gemacht hat.

Glücklicher Weise befinde ich mich seit einigen Monaten im Besitze des Briefwechsels zwischen Gauss und dem am 20. Nov. verflossenen Jahres verstorbenen Wolfgang von Bolyai, welcher viel Interessantes enthält und uns namentlich über das Verhältniss von Gauss zu Pfaff belehrt.

Indem ich aus diesen Briefen, welche ich den Herren Professoren Lejeune-Dirichlet und Wilhelm Weber zur Einsicht mitgetheilt habe, die wichtigsten Stellen im Bezug auf die vorliegende Frage hervorhebe, hoffe ich von der einen Seite die Richtigkeit meiner Ansicht darzulegen, von der andern aber die Anschuldigung von mir abzuwenden, als wolle ich, um Gauss Verdienste zu heben, die Leistungen und Tugenden von Pfaff in den Schatten stellen. Gauss Leben bedarf keiner Folie, nur der Spiegel der Wahrheit soll es beleuchten, ich werde daher die Aussprüche von Herrn Carl Pfaff auf das Entschiedenste zurückweisen, und das wahre Verhältniss von J. F. Pfaff zu Gauss, nicht wie das eines Lehrers zum Schüler, sondern wie das zweier geistesverwandter Naturen hervorheben, die in einem Freundschafts- aber keinem Schulmeister-Verhältniss zu einander gestanden haben.

Ich überlasse es nun dem einsichtsvollen Leser, zu beurtheilen, wer von uns, Herr Dr. C. Pfaff oder ich, das Verhältniss dieser Männer zu einander würdiger und für beide Theile ehrenvoller aufgefasst hat.

Die Stellen aus Gauss Briefen an Bolyai, die für unsere Frage von Wichtigkeit sind, lasse ich zunächst folgen:

1) Braunschweig 30. Sept. 1798.
(Gleich nach der Ankunft von Göttingen.)

„In etwa acht Tagen, wenn meine Reithose fertig sein wird, denke ich nach Helmstedt zu reisen, alsdann hoffe ich auch von meinen übrigen Verhältnissen mehreres schreiben zu können."

2) Braunschweig d. 29. Nov. 1798.

„In Helmstedt bin ich gewesen und habe da sowohl bei Pfaff, als bei dem Aufseher der Bibliothek eine sehr gute Aufnahme gefunden. Pfaff hat meinen Erwartungen entsprochen.

Er zeigt das untrügliche Kennzeichen des Genies, eine Materie nicht eher zu verlassen, als bis er sie womöglich ergrübelt hat. Er hat mir mit grosser Gefälligkeit den Gebrauch seiner Bibliothek angeboten und ich werde in einigen Tagen an ihn schreiben um mir verschiedenes auszubitten."

3) Dec. 30. 1798.

„Er (der Herzog) wünscht ferner, dass ich Dr. der Philosophie werde, ich werde es eben so lange aufschieben, bis mein Werk fertig ist, wo ich es hoffentlich ohne Kosten und die gewöhnliche Harlequinerie werde werden können. Mit dem Abdruck meines Buches geht es noch immer langsam, in einigen Tagen erwarte ich die Correctur des 11ten Bogens."

4) Braunschweig d. 22. Apr. 1799.

„Vielleicht werde ich indess im Kurzen eine andere Piece von einigen Bogen abdrucken lassen, die ich nach Helmstedt schicken werde um mir die Dr.-Würde zu erwerben. Der Herzog hat es so gewünscht, sonst würde ich vielleicht schwerlich es thun."

5) Helmstedt 16. Dec. 1799.

„Lass mich nicht viele Zeit verderben um die Ursachen meines späten Antwortens zu erklären. Die vornehmste ist die, dass ich erst im October bestimmt wusste, dass ich meine damals intendirte Reise nach Gotha noch nicht ausführen werde; und dass ich Dir erst bestimmt schreiben zu können wünschte, was für einen andern Ort ich nun einstweilen damit vertauscht habe; das kann ich jetzt; er ist Helmstedt, wo ich vor wenigen Tagen angelangt bin."

„Du erinnerst Dich, dass ich schon damals, als wir uns in Clausthal zum letzten Male sahen, einen Aufsatz an die philosophische Facultät in Helmstedt eingesandt hatte, um damit den Namen eines Doctors zu erwerben. Dieses Geschäft hat seitdem seinen Fortgang gehabt und die Facultät hat mir diesen Namen am 16. Julius ertheilt ohne mich mit den meisten sonst üblichen Förmlichkeiten zu belästigen."

„Dass meine Reise nach Gotha rückgängig geworden ist, daran ist vornehmlich eine schwere Krankheit des von Zach schuld, an deren Folgen er noch jetzt leidet. Gegenwärtig ist es mir sehr lieb, weil ich nun erst mit Eifer meine disquisitiones arithmeticae zu vollenden wünsche."

„Da ich vor der Hand wol noch nicht bald in die Ketten

eines Amtes treten werde und in Braunschweig zu meinen Arbeiten zu wenig Hülfsmittel hatte, so fasste ich den Entschluss, mich hierher nach Helmstedt zu begeben, wo ich wol bis Ostern bleiben werde."

„Ich wohne hier bei dem Professor Pfaff, den ich ebenso sehr als einen vortrefflichen Geometer, wie als einen guten Menschen und meinen warmen Freund verehre; ein Mann von einem arglos kindlichen Karakter, ohne alle die Leidenschaften, die den Menschen so sehr entehren und bei Gelehrten so gewöhnlich sind."

Braunschweig 3. Dec. 1802.

„Ich lebe, seitdem ich 1800 Ostern Helmstedt verlassen habe, bisher beständig in Braunschweig, hauptsächtlich für meine Göttinnen, die Wissenschaften. Bis in den Sommer 1801 hat mich die Arbeit an meinem grossen Werke beschäftigt."

Aus den hier mitgetheilten Stellen dieser Briefe ergibt sich folgendes:

Gauss war in jenen Jahren zweimal in Helmstedt; zuerst im October 1798, nach dem Intervall der beiden ersten Briefe zu urtheilen, nur für einige Wochen. Er dachte also nicht daran, dort zu studiren oder Vorlesungen zu hören, da er, wie aus einer andern Stelle jenes Briefes hervorgeht, in Braunschweig auf der Wendenstrasse eine feste Wohnung gemiethet hatte. Gauss hat sich gegen mich in voller Uebereinstimmung mit diesen Briefen über diese Reise nach Helmstedt so ausgesprochen. „Ich ritt im Herbst 1798 nach Helmstedt, um die dortige Bibliothek, welche namentlich die verschiedenen Societätsschriften vollständig enthielt, zu benutzen. Bei dem Bibliothekar Bruns fand ich eine sehr freundliche Aufnahme, auch machte ich Pfaffs Bekanntschaft, in dessen Hause ich wohnte. Ich war indess damals so mit der Herausgabe der Disquisitiones beschäftigt, dass ich Pfaff oft den ganzen Tag über nicht zu sehen bekam."

Zum zweiten Male kam Gauss etwa ein halbes Jahr nach seiner Promotion nach Helmstedt in der nämlichen Absicht wie das erste Mal, als fertiger grosser Mathematiker, als der Schöpfer der Disquisitiones, die wenige Monate darauf erschienen sind. Er war der jugendliche Herausgeber des Werkes, welches er als eine seiner grössten Leistungen öfter bezeichnete, von dem er sagte, dass es der Geschichte angehöre; er war schon damals der Erfinder vieler neuer Theoreme; die Methode der kleinsten Quadrate war schon 6 Jahre früher in seinem Besitz.

Gauss wurde während dieses zweiten, 3 bis 4 Monate lang dauernden Aufenthaltes in Helmstedt mit Pfaff erst näher bekannt. Er sagte mir im Bezug auf dieses Verhältniss, was ich aufs Neue hervorheben muss, dass er mit Pfaff auf abendlichen Spatziergängen sich mit ihm über mathematische Gegenstände unterhalten, dass er aber dabei glaube mehr gegeben als empfangen zu haben.

Unter solchen Verhältnissen betrachtete sich der erste Mathematiker zweier Jahrhunderte mit vollem Recht nicht als einen Schüler, sondern als einen Freund Pfaffs und beanspruchte nur eine Parität, deren sich dieser letztere nicht zu schämen brauchte.

Ausser jenen brieflichen Mittheilungen haben wir uns auch von Gauss, kurz vor dem Schlusse seines Lebens eine Reihe von Mittheilungen, welche geradezu in Abrede stellen, dass er ein Schüler Pfaffs gewesen sei.

Nachdem der Briefwechsel von J. F. Pfaff mit dem Herzog Carl von Würtemberg erschienen war, besuchten Wilhelm Weber und ich, wie wir es öfter zu thun pflegten, Gauss in der Abendzeit. Er war heiter und sprach über vielerlei Gegenstände, namentlich über die historische Glaubwürdigkeit, und hob darauf die Unrichtigkeiten aus Pfaffs Briefwechsel hervor, ganz so wie es von mir dargestellt worden ist.

In ähnlicher Weise hat sich Gauss gegen meinen Collegen Herrn Professor Stern ausgesprochen, der mir darüber folgende Mittheilung gemacht hat, welche ich hier einschalte:

„Nicht lange nach dem Erscheinen der Schrift, „Sammlung von Briefen gewechselt zwischen J. F. Pfaff u. s. w.“ sagte mir Gauss, wenn ich vielleicht die Absicht hätte, diese Schrift in den Göttinger gel. Anz. zu besprechen, so möchte ich nicht übersehen, dass der Herausgeber sein Verhältniss zu J. F. Pfaff durchaus unrichtig dargestellt habe, er sei nie ein Schüler Pfaffs gewesen, habe auch keine Vorlesungen in Helmstedt gehört. Es ist dies, setzte er lächelnd hinzu, nicht die einzige Unrichtigkeit, welche in dieser Schrift vorkommt, denn S. 228. in einer Note wird Kirsten als Mathematiker, ordentlicher Professor in Göttingen, Kästners Schwiegersohn bezeichnet, während er weder das eine noch das andere war.“

Endlich habe ich hervorzuheben, dass sich in demselben Sinne Gauss gegen seinen Arzt, unsern Freund und Collegen Prof. Baum, und gegen seinen Assistenten, Observator Dr. Klin-

kerfuss ausgesprochen hat, welcher letztere in den astronomischen Nachrichten nächstens über diesen Gegenstand seine Erklärung abgeben wird.

Dieses sind die Thatsachen, welche unabänderlich vorliegen. Das wissenschaftliche Publicum wird nach Veröffentlichung derselben am Besten beurtheilen können, auf welcher Seite Anmaassung und Eitelkeit zu suchen sind.

Göttingen, d. 26. Januar 1857.

W. S. v. W.

Ich danke Herrn Sartorius von Waltershausen für die obigen Mittheilungen, und habe dieselben so bald als möglich in das Archiv aufgenommen, indem ich glaube, dass sie auch Herrn Dr. C. Pfaff und der Wittwe des seeligen J. F. Pfaff, die als eine überaus würdige Matrone mit dem einzigen Sohne, welchen das Schicksal ihr noch gelassen, die letzten Tage des Abends ihres Lebens in dem kleinen Heldrungen in Thüringen in stillster Zurückgezogenheit verlebt, nicht unangenehm sein werden, da sie den trefflichen J. F. Pfaff, der eine durchaus edle Natur war, von Neuem nur in vortheilhaftem Lichte erscheinen lassen. Darf ich selbst noch ein Wort in dieser Sache sprechen, so erlaube ich mir zu bemerken, dass Herr S. v. W. seinem hübschen Buche gewiss nicht geschadet, sondern nur wesentlich genützt haben würde, wenn er die von Gauss gesprochenen Worte: „er glaube in Helmstedt bei seinem Umgange mit Pfaff mehr gegeben als empfangen zu haben" lieber ganz unterdrückt hätte. Denn dass diese Worte durchaus nur eine ganz vertrauliche Aeusserung gegen einen jüngeren Freund waren, sieht jeder Unbefangene auf den ersten Blick; und dergleichen ganz vertrauliche Aeusserungen grosser Männer scheinen in der That sich nicht für die Oeffentlichkeit zu eignen. Der, gegen welchen sie gemacht wurden, wird immer am besten thun, sie in seinem eigenen Herzen zu verschliessen, oder zu vertraulichen Mittheilungen für ganz nahe Freunde aufzubewahren. Gauss selbst, in dessen Charakter gleichfalls Edelmuth der vorherrschende Grundzug war, würde, wenn er noch lebte, gewiss selbst Herrn S. v. W. wenig Dank wissen, dass er jene ganz vertrauliche Aeusserung vor die Oeffentlichkeit brachte. Wir aber danken Herrn S. v. W. nochmals für die obigen Mittheilungen und überhaupt für sein hübsches Buch, wie wir schon früher in wärmster Weise gethan.

G.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Das ständisch-polytechnische Institut zu Prag. Programm zur funfzigjährigen Erinnerungs-Feier an die Eröffnung des Instituts. 10. November 1856. Im Auftrage des Lehrkörpers redigirt von Dr. Carl Jelinek, öff. ord. Professor der Elementar- und höheren Mathematik am polytechnischen Institute. Prag. 1856. 8.

Lehranstalten, welche wie das ständisch-polytechnische Institut zu Prag vorzugsweise einen mathematischen Charakter haben, indem sie mit Recht die Mathematik nebst den Naturwissenschaften als die wichtigsten Grundlagen der gesammten höheren Technik betrachten, verdienen wohl in einer hauptsächlich der Förderung des mathematischen Unterrichts gewidmeten Zeitschrift vorzugsweise Berücksichtigung, besonders wenn die Geschichte ihrer Entstehung und Fortbildung, und die Darstellung ihrer gegenwärtigen Einrichtung in so lehrreicher und interessanter Weise gegeben wird, wie in dem vorliegenden 366 Seiten starken Programm. Das polytechnische Institut zu Prag feierte am 10. November 1856 das Jubelfest seines funfzigjährigen Bestehens. In Prag bestand früher eine auf Veranlassung und durch die Bemühungen des damaligen landschaftlichen Ingenieurs Christian Joseph Willenberg von den böhmischen Ständen gestiftete Ingenieur-Schule, deren Eröffnung am 7. Januar 1718 durch öffentlichen Anschlag nicht nur in Prag, sondern auch in allen Kreisen Böhmens kund gemacht wurde. Bei der allmäligen Entwickelung dieser Ingenieur-Schule trat ihre fortwährende Annäherung an den Zweck einer eigentlichen technischen Bildungsanstalt, an welcher es damals in Oesterreich durchaus fehlte, deutlich hervor, so dass es natürlich war, dass bei einem so thatkräftigen und für sein Vaterland so begeisterten Manne, wie dem nachher auch in wissenschaftlicher Beziehung so berühmt gewordenen Franz Joseph Ritter von Gerstner, der Gedanke zur Reife kommen musste, in Prag ein eigentliches polytechnisches Institut, — wohl das erste in Deutschland neben der älteren so berühmten école polytechnique in Paris, — in's Leben zu rufen. Und in der That ist auch dieser in so vielen Beziehungen ausgezeichnete Mann als der eigentliche Gründer jener trefflichen Lehranstalt zu betrachten, wobei es sich übrigens von selbst versteht, dass eine so grossartige Anstalt in's Leben zu rufen ohne die kräftige Beihülfe der böhmischen Stände einem einzelnen Manne nicht möglich gewesen

sein würde. Eröffnet wurde die Anstalt mit einer entsprechenden Feierlichkeit am 10. November 1806, und hat seitdem kräftigst gewirkt für die Förderung der gesammten Technik und ihrer sämmtlichen Grund- und Hülfswissenschaften. Eine ausführliche Darstellung der früheren und gegenwärtigen Einrichtung der trefflichen Anstalt liefert die vorliegende sehr interessante Schrift. Lebensbeschreibungen und Verzeichnisse der sämmtlichen Schriften aller früheren und jetzigen Lehrer verleihen derselben auch in literar-historischer Rücksicht eine Bedeutung, da sich darunter Männer wie Franz Joseph Ritter von Gerstner, dessen schön ausgeführtes Bildniss der Schrift beigegeben ist, der bekannte Astronom Bittner, der jetzige Director der Anstalt Dr. Lumbe, Doppler, Matzka, Koristka, Jelinek, Schuhersky, Balling, Zippe und andere, die, wenn auch keineswegs von geringerem Verdienst, uns doch weniger als Schriftsteller bekannt geworden sind, befinden. Wir empfehlen die interessante Schrift allen, die sich für polytechnische Lehranstalten interessiren, auf's Angelegentlichste, und wünschen dem trefflichen polytechnischen Institute in Prag bei dem Antritt des neuen halben Jahrhunderts seines Bestehens ferneres segensreiches Wirken und immer grössere Blüthe.

Druckfehler.

In diesem Hefte erfordert Taf. I. folgende Berichtigungen:

Taf. I. Fig. 1. ist xx' und aa' noch zu ziehen.

„ Fig. 3. und Fig. 4. fehlt der Buchstabe f, und die Punkte, wo derselbe hingehört, sind leicht von selbst ersichtlich.

„ Fig. 3. statt m' muss m gesetzt werden.

„ Fig. 5. muss das oberste t' bloss t heissen.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

IX.

Arithmetik.

J. G. Binder, Die Anfangsgründe der Algebra, populär vorgetragen. 8°. St. Gallen. geh. 27 Ngr.

J. Bootz, Elemente der allgemeinen Arithmetik. 2. Cursus. Lex. 8°. geh. Erlangen. 1 Thlr. 8 Ngr.

Choquet, Traité d'Algèbre. 8°. Paris. 2 Thlr. 15 Ngr.

Krause, Lehrbuch der Arithmetik und der niedern Algebra, für Gymnasien bearbeitet. geh. gr. 8°. Deutsch-Crone u. Landsberg a. d. W. 10 Ngr.

Fr. Mocnik, Lehrbuch der Algebra für das Ober-Gymnasium. 5. Aufl. gr. 8°. geh. Wien. Preis des vollständ. Buchs 27 Ngr.

E. Sedlaczek, Anleitung zum Gebrauche einiger logarithmisch getheilter Rechenschieber (sliding-rule, règle-à-calcul), solcher Instrumente, mittelst deren man alle mit Logarithmen lösbaren Aufgaben schnell und sicher vollführen kann. Zum Selbstunterrichte und zum Behufe für seine Vorträge bearb. 2. Aufl. 8°. Wien. 1 Thlr.

E. Sedlaczek, Ueber Visir- und Recheninstrumente. 8°. Wien. 8 Ngr.

K. Weierstrass, Theorie der Abel'schen Functionen. Berlin. 4°. 1 Thlr. (Abdruck aus dem „Journal für die reine und angewandte Mathematik von Crelle.")

A. Winckler, Neue Theoreme zur Lehre von den bestimmten Integralen. Lex. 8°. geh. Wien. 6 Ngr.

J. Witt, Aufgabe aus der wichtigen Lehre von den Pythagorischen Zahlen; ein kleiner Beitrag zur unbestimmten Analytik. Lex. 8°. Itzehoe. 8 Ngr.

Geometrie.

Krause, Lehrbuch der Geometrie für Gymnasien bearbeitet. gr. 8°. geh. Deutsch-Crone u. Landsberg a. d. W. 16 Ngr.

K. Snell, Lehrbuch der Geometrie für Schulen und zum Selbstunterricht. I. Thl. a. u. d. T.: Lehrbuch der gradlinigten Planimetrie. 2. Aufl. gr. 8°. geh. Leipzig. 24 Ngr.

P. Steffensen, Anwendung der Algebra auf die Geometrie. Eine Sammlung von Formeln und analytischen Gleichungen aus der Planimetrie mit Andeutungen über die Art und Weise der Entwicklung und Benutzung derselben. Schleswig. Mit eingedruckten Holzschnitten. 8°. 2 Thlr.

G. Winkler Edler v. Brückenbrand, Lehrbuch der Geometrie, der ebenen Trigonometrie und Polygonometrie. 5. Aufl. von F. Baur. gr. 8°. geh. Wien. 1 Thlr. 26 Ngr.

P. Zech, Die höhere Geometrie in ihrer Anwendung auf Kegelschnitte und Flächen zweiter Ordnung. gr. 8°. geh. Stuttgart. 16 Ngr.

Mechanik.

G. Decher, Handbuch der rationellen Mechanik. III. Bd. 3. Lief. gr. 8°. geh. Augsburg. 1 Thlr.

Furiet, Éléments de mécanique, exposés suivant le programme de M. le ministre de l'instruction publique et des cultes du 30 août 1852 pour le baccalauréat ès sciences. Paris. 8°. Mit Abbildungen im Text. 2 Thlr.

Praktische Mechanik.

Arth. Morin, Leçons de mécanique pratique. Résistance des materiaux. 2e édit. Paris. 8°. Mit 6 Taf. 2 Thlr. 15 Ngr

Optik.

Achille Brachet, Simples préliminaires sur le commentaire de la notice du meilleur microscope dioptrique composé achromatique du professeur Amici. Paris 1856. 8°. 5 Ngr.

Astronomie.

H. d'Arrest, Resultate aus Beobachtungen der Nebelflecken und Sternhaufen. I. Reihe. Leipzig. 4°. 24 Ngr. (Aus den „Abhandlungen der math. phys. Classe d. K. Sächs. Gesellsch. der Wissensch.")

Handatlas der Erde und des Himmels in 70 Liefer. Neu red. Ausg. 4. Lief. qu. Imp.-Fol. Weimar. 10 Ngr.

M. Kowalsky, Von den Finsternissen. Mit Holzschnittfiguren und 1 lithograph. Tafel. 8⁰. Kasan. 2 Thlr. 21 Ngr.

El. Loomis, The Recent Progress of Astronomy, especially in the United States. 3d edit., re-written and much enlarged. New York. 12⁰. 3 Thlr. 12 Ngr.

W. Oeltzen, Nachweis des Vorkommens von Sternen aus den Argelander'schen nördl. Zonen in andern Quellen. (2. Abth.) Wien, 1856. 8⁰. 12 Ngr. (Aus den Sitzungsberichten der mathematisch-naturw. Classe der Kais. Akademie der Wissenschaften.)

Akademische Sternkarten. Zone V. Blatt 6. gr. fol. Mit Verzeichniss der von Bradley, Piazzi, Lalande und Bessel beobachteten Sterne zwischen $4^h\ 56'$ bis $6^h\ 7'$ gerader Aufsteigung und 15⁰ südl. bis 15⁰ nördl. Abweichung, berechnet von Argelander. fol. Berlin. 1 Thlr.

M. Uhlemann, Grundzüge der Astronomie und Astrologie der Alten, besonders der Aegypter. gr. 8⁰. geh. Leipzig. 20 Ngr.

Physik.

Physikalische Abhandlungen der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Aus dem Jahre 1855. gr. 4⁰. Berlin. 4 Thlr.

Annales de l'observatoire physique central de Russie, publiées par A. T. Kupffer. Année 1853. 2 Nrs. St.-Pétersbourg. 4⁰. Mit 2 Taf. 7 Thlr.

Correspondance météorologique, publication trimestrielle de l'administration des mines de Russie, rédigée par A. T. Kupffer. Année 1854. St.-Pétersbourg. 4⁰. Mit 2 Taf. 5 Thlr.

H. W. Dove, Ueber die täglichen Veränderungen der Temperatur der Atmosphaere. gr. 4⁰. geh. Berlin. 14 Ngr.

v. Ebner, Ueber die Anwendung der Reibungs-Elektricität zum Zünden von Sprengladungen. Wien, 1856. 8⁰. Mit 5 Taf. 1 Thlr. (Aus den Sitzungsberichten der mathem.-naturw. Classe der Kais. Akademie der Wissenschaften.)

A. Fick, Die medizinische Physik. Mit in den Text eingedruckt. Holzschn. 3. u. 4. Lief. Braunschweig, 1856. 8⁰. p. 193—384. Jede Lief. 15 Ngr. (Supplementband zu Müller-Pouillet's Lehrbuch der Physik.)

Die Fortschritte der Physik im Jahre 1853. Dargestellt von der physikal. Gesellschaft zu Berlin. IX. Jahrg. Red. von A. Krönig. Berlin. 8⁰. 4 Thlr.

K. Kreil, Erste Ergebnisse der magnetischen Beobachtungen in Wien. Imp. 4⁰. Wien. 12 Ngr.

O. Marbach, Physikalisches Lexicon. Fortgesetzt von C. S. Cornelius. 2. Aufl. 51.52. Lief. Lex. 8⁰. geh. Leipzig. à $\frac{1}{2}$ Thlr.

W. H. Miller, Lehrbuch der Krystallographie. Uebers. und

erweitert durch J. Grailich. Mit einem Hefte von 19 Kupfertafeln. Wien. 8°. 3 Thlr. 20 Ngr.

Th. du Moncel, Exposé des applications de l'électricité. Tome Ier. Notions technologiques. 2e édition. Paris. 8°. Mit 8 Taf. 2 Thlr. 20 Ngr.

N. Pissarewski, Physik. Bd. II. Mit 582 eingedruckten Holzschnitten. 8°. geh. Petersburg. 4 Thlr. 15 Ngr. (Bd. I. erschien 1854, 4 Thlr. 15 Ngr.; vollständig in 3 Bdn.)

Rch. Potter, Physical Optics, or the Nature and Properties of Light: a descriptive and experimental Treatise. London. 8°. Mit vielen Holzschn. im Text. 2 Thlr. 18 Ngr.

Pouillet-Müller's Lehrbuch der Physik und Meteorologie. 5. umgearb. u. vermehrte Aufl. I. Bd. 3. 4. Lief. gr. 8°. Braunschweig. geh. 1 Thlr.

A. Reishuber, Untersuchungen über das atmosphärische Ozon. Lex. 8°. geh. Wien. $1/6$ Thlr.

Résumé général des observations météorologiques faites à l'observatoire particulier de la ville de Nîmes pendant les années 1846 à 1855 par Ed. Boyer et Delchamp. 4°. Nîmes.

G. Schilling, Akustik oder Lehre vom Klange. 2. Ausg. 8°. geh. Stuttgart. 12 Ngr.

O. Ule, Physikalische Bilder im Geiste kosmischer Anschauung. 2. Bd. A. u. d. T.: Die Erscheinungen der Wellenbewegung oder die Lehre von Schall, Licht und Wärme. 8°. geh. Halle. 1 Thlr.

W. F. A. Zimmermann, Naturkräfte und Naturgesetze. Ein populäres Handb. der Physik. 16. Lief. geh. 8°. Berlin. $7\frac{1}{2}$ Ngr.

Vermischte Schriften.

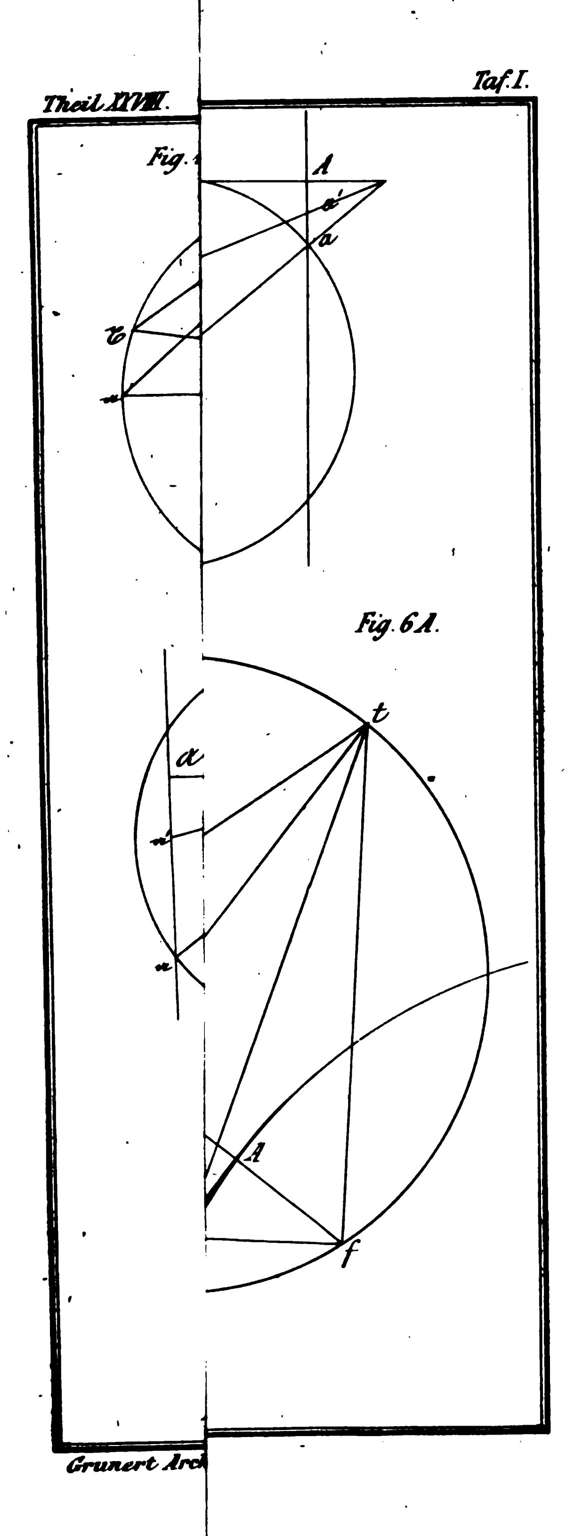
Galilei. — Le Opere di Galileo Galilei. Prima edizione completa condotta sugli autentici manoscritti Palatini. Supplemento. Firenze. 8°. Mit 2 Taf. 2 Thlr. 20 Ngr. (Das vollständ. Werk in 15 Bänden und 1 Band Supplement kostet 50 Thlr.)

Unterhaltungen im Gebiete der Astronomie, Geographie und Meteorologie. Jahrg. 1857. No. 1. gr. 8°. Halle. Preis für den vollständ. Jahrg. 3 Thlr.

R. Wolf, Taschenbuch für Mathematik, Physik, Geodäsie und Astronomie. 2. Aufl. 8°. geh. Bern. 1 Thlr.

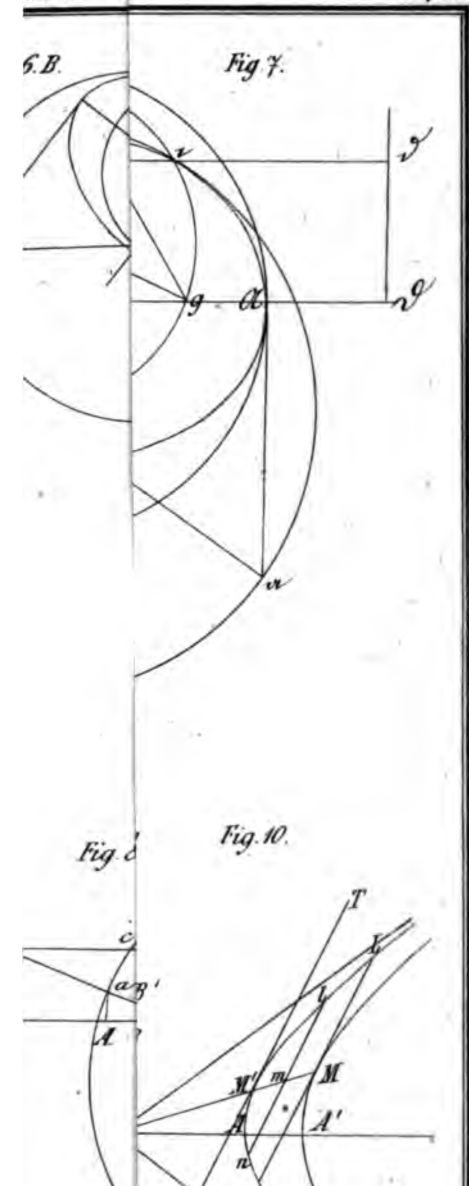
Denkschriften der Kais. Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissensch. Classe. XII. Bd. gr. 4°. geh. Wien. $9\frac{1}{3}$ Thlr.

Sitzungsberichte der k. k. Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturw. Classe. XXII. Bd. 1s Hft. (Jahrg. 1856.) Lex. 8°. geh. Wien. 1 Thlr. 20 Ngr.


Fig.
A
a'
a
c
u
Fig. 6 A.
t
a
u'
u
A
f



VIII. Taf. II.



rt Archiv.

VII.

Ueber das Wesen der Funktionen, insbesondere über Vieldeutigkeit, Unbestimmtheit, Veränderlichkeit, Differenziation und Stetigkeit.

Von

Herrn Baurath Dr. *Hermann Scheffler*,

zu Braunschweig.

Die Vieldeutigkeit, Unbestimmtheit und Stetigkeit der Funktionen ist noch fortwährend ein so reichlicher Quell von Irrthümern in der Mathematik, dass es nicht unzweckmässig sein wird, über das eigentliche Wesen jener Eigenschaften, so wie über die Ursachen ihrer Entstehung einige kritische Untersuchungen anzustellen und dabei zugleich die schwankenden Vorstellungen und Definitionen dergestalt zu fixiren, dass die Gefahr vor falschen Auslegungen thunlichst vermieden wird.

Die hierher gehörigen Begriffe erläutern und veranschaulichen sich am natürlichsten durch die geometrische Auffassung der Grössen. Dieselben ergeben sich daher unmittelbar aus den Prinzipien des Situationskalkuls, unter welchem Titel ich mir erlaubt habe, die zwischen Geometrie und Arithmetik bestehenden gesetzlichen Beziehungen in einem besonderen Werke systematisch zu entwickeln. Da es jedoch scheint, als wenn jene Prinzipien, durch welche das Imaginäre den Charakter des Unmöglichen verliert und als wirkliche Grösse dem Reellen an die Seite tritt, bei manchem Mathematiker immer noch wie Phantasiespiele zur bild-

lichen Erläuterung von Traumgestalten gelten, und dass von anderen Mathematikern, welche sich freilich über eine solche Selbsttäuschung bereits erhoben haben, doch noch nicht die Tragweite jener Prinzipien sowohl in geometrischem, wie in arithmetischem Sinne erkannt und das Licht gehörig gewürdigt ist, welches dieselben über das Grundwesen der Grössen und Operationen selbst der höheren Analysis verbreiten; so möchte behuf des angekündigten speziellen Zweckes eine Hervorhebung der desfallsigen Sätze nicht ohne Nutzen sein. In Betracht der Leichtigkeit, mit welcher sich diese Sätze aus der fraglichen Theorie ergeben, wird es übrigens genügen, dieselben möglichst kurz und ohne weitläufige Begründung anzuführen.

I. Vieldeutigkeit.

1. An einer Grösse kommen als mathematische Eigenschaften in arithmetischem Sinne ihre Quantität und ihr Zeichen in Betracht. Fasst man die Grösse geometrisch als gerade Linie auf; so ist ihre Quantität durch die Länge, und ihr Zeichen durch die Richtung jener Linie dargestellt.

2. Wenn a die Quantität oder Länge einer Grösse bezeichnet; so können darunter nur absolute Werthe gedacht werden, deren algebraische Vertreter die absoluten Zahlen von 0 bis ∞ und deren geometrische Vertreter die verschiedenen Längen einer geraden Linie sind, welche auf der Einen Seite durch den Nullpunkt begränzt, nach der anderen Seite aber unbegränzt ist.

3. Wenn man nur Grössen betrachtet, deren geometrische Stellvertreter die Linien in Ein und derselben Ebene sind; so ist das algebraische Zeichen irgend einer Grösse gleich $e^{\alpha i}$ (worin $i=\sqrt{-1}$). Dasselbe gesellt sich als Faktor oder Richtungskoeffizient zu dem Werthe a der Quantität, so dass der vollständige Ausdruck jener Grösse $ae^{\alpha\sqrt{-1}}$ ist.

Geometrisch stellt α den Neigungswinkel der betreffenden Linie gegen die positiv reelle Axe dar, welchen wir zu grösserer Bestimmtheit hier lieber den Drehungswinkel nennen wollen. Auch der Buchstabe α, welcher ebenso wie a, reine Quantitäten misst, kann nur absolute Werthe von 0 bis ∞ annehmen.

4. Die vorläufige Beschränkung auf Linien in Einer Ebene ist rein willkührlich, jedoch für viele Zwecke ausreichend. Mit der Zeit wird man, so wie es bereits im Situationskalkul geschehen

ben ist, die Operationen der Mathematik dergestalt erweitern, dass auch die reine Analysis sich der Betrachtung der drei Dimensionen des Raumes nicht entschlagen kann. Vorläufig abstrahiren wir jedoch der Einfachheit wegen von solchen allgemeineren Grössenbildungen.

5. Die Grösse $i=\sqrt{-1}$ im Richtungskoeffizienten ist zweideutig und kann sowohl $+\sqrt{-1}$, wie $-\sqrt{-1}$ sein. Will man diese Zweideutigkeit beseitigen, also $i=+\sqrt{-1}$ setzen, was in mancher Hinsicht rathsam ist, und hier durchgehends geschehen soll; so muss man den Charakter der Grösse a dahin ändern, dass dieselbe nun nicht mehr absolute, sondern überhaupt reelle, also positive und negative Werthe darstelle.

6. Für $\alpha=2k\pi$, worin k eine ganze Zahl bezeichnet, wird der Richtungskoeffizient $e^{\alpha i}=+1$ und für $\alpha=(2k+1)\pi$ wird derselbe $=-1$. Zwei Richtungskoeffizienten, in welchen sich die Grössen α durch ein unpaares Vielfaches von π unterscheiden, entsprechen den Grössen mit entgegengesetzten Zeichen oder den Linien mit entgegengesetzten Richtungen, also solchen Linien, welche sich von einem festen Nullpunkte aus in derselben Geraden nach beiden Seiten ins Unendliche erstrecken.

Es gereicht oftmals zur Vereinfachung der Untersuchung, wenn man für den Buchstaben a, welcher eigentlich die reine Quantität darstellen soll, nicht bloss absolute, sondern reelle, also positive und negative Werthe zulässt, in welchem Falle sich durch den blossen Zeichenwechsel von a (von + auf — oder von — auf +) Grössen von entgegengesetzten Richtungen kund geben. Diese Erweiterung der Bedeutung des Buchstaben a, welche auch wir zuweilen annehmen werden, erleichtert besonders die Schreibweise und Umgestaltung der Formeln, indem dann die eigentlich als Operationszeichen der Addition und Subtraktion dienenden Zeichen + und — auch kurz als Richtungszeichen für $e^{2k\pi i}$ und $e^{(2k+1)\pi i}$ gebraucht werden können.

7. Die Form $e^{\alpha i}=\cos\alpha+\sin\alpha . i$ des Richtungskoeffizienten, aus welcher der Drehungswinkel α genau erkannt werden kann, heisse der vollständige Richtungskoeffizient. Die Form $m+ni$ dagegen, aus welcher sich nur der Werth von $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$, nicht aber der Werth des Drehungswinkels α selbst genau ergibt, heisse der abgekürzte Richtungskoeffizient.

8. Wenn eine von Null verschiedene endliche Grösse mit vollständigem Richtungskoeffizienten, also in der Form

$ae^{\alpha i}$ gegeben ist; so ist sie stets vollkommen bestimmt, d. h. es bleibt weder hinsichtlich ihrer Quantität noch hinsichtlich ihrer Richtung, noch hinsichtlich ihres Drehungswinkels irgend eine Unbestimmtheit oder Vieldeutigkeit übrig. Ist eine Grösse aber nicht mittelst des vollständigen Richtungskoeffizienten, sondern in einer solchen Weise gegeben, dass der Richtungskoeffizient erst aus anderen Daten ermittelt werden muss; so ist im Allgemeinen nur die Quantität a und die Richtung, d. h. der absolute Werth des Richtungskoeffizienten $e^{\alpha i}$ der Grösse bestimmt, der Drehungswinkel α bleibt aber gewöhnlich vieldeutig.

Der letztere Umstand tritt immer ein, wenn eine Grösse mittelst des abgekürzten Richtungskoeffizienten $m+ni$, also in der Form $(m+ni)a$, oder wenn sie überhaupt als die Summe zweier Theile in der Form $b+ci$, oder endlich, wenn sie geometrisch nach Länge und Richtung gegeben ist. In diesen Fällen ist zwar die Länge a und die Richtung der fraglichen Linie genau bestimmt; in Beziehung auf die Richtung ergibt sich aber mit Bestimmtheit nur der Werth des eigentlichen Neigungswinkels, welcher den kleinstmöglichen positiven oder fundamentalen Werth des Drehungswinkels α darstellt. Der letztere Drehungswinkel bleibt also in der Weise unbestimmt, dass für denselben jeder beliebige Werth genommen werden kann, welcher sich von dem gedachten fundamentalen Neigungswinkel um irgend ein Vielfaches von 2π unterscheidet. In geometrischem Sinn liegt diese Unbestimmtheit darin, dass die gegebene Linie bei ihrer Erzeugung aus der Einheit noch beliebig viele ganze Umdrehungen um den Nullpunkt nach links oder rechts gemacht haben kann.

9. Die Grösse null hat ausserdem noch vor allen übrigen Grössen die Eigenthümlichkeit, dass wenn ihr Drehungswinkel nicht ausdrücklich gegeben ist, sie mit jedem beliebigen Drehungswinkel gedacht werden kann. Dieser Umstand macht die Null geeignet, das Anfangsglied einer jeden vom Nullpunkte auslaufenden geradlinigen Grössenreihe zu sein; in jeder einzelnen dieser unendlich verschiedenen Rollen, welche die Null als Nullpunkt einer solchen Grössenreihe zu spielen vermag, muss sie jedoch nothwendig als mit dem betreffenden Drehungswinkel begabt angesehen werden.

Ferner haftet der Null eine Unbestimmtheit hinsichtlich ihrer Quantität an, welche jedoch nur dann hervortritt, wenn die Null einer solchen Operation unterworfen werden soll, welche die Kennt-

sies ihres Verhältnisses zur Einheit erfordert. In diesem Falle kann die Null nur als unendlich kleiner Theil der Einheit $\left(\frac{1}{\infty}\right)$ gedacht werden, und es überträgt sich somit die dem Begriffe des Unendlichen hinsichtlich der Quantität inhärirende Unbestimmtheit auch auf den Begriff der Null.

Von den durch die Grössen 0 und ∞ hervorgerufenen Unbestimmtheiten wird übrigens erst weiter unten in Nr. 24. bis 28. die Rede sein.

10. Da sich die sub 8. und 9. erwähnten unendlich verschiedenen Werthe einer Grösse im geometrischen Sinne sämmtlich einander decken; so kann der Eine für den anderen zwar dann gebraucht werden, wenn es auf weiter Nichts, als eine einfache Anschauung jener Grösse nach Länge und Richtung ankommt.

Wenn jedoch mit einer solchen Grösse noch weiter operirt, d. h. wenn sie gewissen gesetzmässigen Veränderungen unterworfen, oder was Dasselbe ist, wenn eine Funktion von ihr gebildet werden soll, kommt es auf die Entstehung jener Grösse aus der Einheit sehr wesentlich an. In diesem Falle ist also die obige Vieldeutigkeit von grosser Wichtigkeit und es ist völlig unzulässig, den Einen jener Werthe für den anderen zu gebrauchen oder in derselben Rechnung unter der vieldeutigen Grösse an der einen Stelle diesen und an der andern Stelle jenen Werth zu verstehen.

11. Wenn man irgend Einen der in Rede stehenden vollkommen bestimmten Werthe solchen Operationen unterwirft, welche selbst völlig bestimmt sind, also in keiner Hinsicht eine Willkührlichkeit oder Vielfachheit des Verfahrens gestatten; so kann daraus immer nur ein einziger Werth hervorgehen. Jede völlig bestimmmte Funktion einer völlig bestimmten Grösse kann also nur einen einzigen Werth haben. Hierbei müssen wir jedoch ausdrücklich bevorworten, dass bei der Entwicklung der Funktion an keiner Stelle die Grösse 0 oder ∞ erscheine, indem hierdurch Unbestimmtheiten veranlasst werden, welche erst in Nr. 24. bis 28. näher erwogen werden sollen.

Substituirt man nach und nach die übrigen Werthe einer vieldeutigen Grösse in dieselbe bestimmte Funktion, so erhält man ebenso viel bestimmte Resultate. Bezeichnet also F eine bestimmte Funktion; so hat $F(x)$ gerade so viel Werthe, als x selbst. Indessen kann es sich jetzt sehr wohl ereignen, dass sich die unendlich vielen Werthe von $F(x)$ geometrisch nicht decken, dass dieselben vielmehr nach Länge oder nach Richtung oder

nach Beiden verschieden sind. In der Regel gruppiren sich übrigens diese verschiedenen Werthe von $F(x)$ in eine endliche Anzahl von Reihen, deren Glieder sich geometrisch decken, so dass, wenn es nur auf die Länge und Richtung von $F(x)$ ankommt, man jedes Glied Ein und derselben Reihe für das andere nehmen und der Grösse $F(x)$ nur so viel verschiedene Werthe zuschreiben kann, als Reihen vorhanden sind.

Demnach hat z. B. jede der Funktionen x^n, $\sqrt[n]{x}$, $\log x$ nur einen einzigen Werth, wenn x vollkommen bestimmt in der Form $ae^{\alpha i}$ gegeben ist, nämlich resp. den Werth $a^n e^{n\alpha i}$, $\sqrt[n]{a}.e^{\frac{\alpha}{n}i}$, $\log a + \alpha i$. Wenn dagegen von x nur die Länge und Richtung, nicht aber der Drehungswinkel gegeben ist, so dass x unendlich vieldeutig und demnach durch den vieldeutigen Ausdruck $ae^{(\alpha+2k\pi)i}$ dargestellt ist; so besitzt jede der vorstehenden Funktionen auch unendlich viele Werthe, welche resp.

$$a^n e^{n(\alpha+2k\pi)i}, \quad \sqrt[n]{a}.e^{\frac{1}{n}(\alpha+2k\pi)i}, \quad \log a + (\alpha + 2k\pi)i$$

sind. Diese unendlich vielen Werthe von $F(x)$ gruppiren sich übrigens für die rationale Funktion x^n in eine einzige Reihe, deren Glieder sich geometrisch sämmtlich decken; für die irrationale Funktion $\sqrt[n]{x}$ erhält man dagegen n solcher Reihen, also n Werthe, welche sich geometrisch nicht decken; für die logarithmische Funktion $\log x$ erzeugen sich sogar eine unendliche Menge solcher Reihen, von denen eine jede nur ein einziges Glied besitzt, also überhaupt unendlich viel ganz verschiedene, d. h. geometrisch sich nicht deckende Werthe von $F(x)$.

Zur besseren Unterscheidung wollen wir unbestimmte Grössen der bisher betrachteten Art, deren sukzessive Werthe keine stetig zusammenhängende, sondern eine diskontinuirliche Reihe bilden, vieldeutige nennen, indem wir den Ausdruck unbestimmte Grössen für solche reserviren, deren Werthe in einem stetigen Zusammenhange stehen, wie die Ordinaten einer stetigen Kurve.

12. Als erste Fehlerquelle bei manchen Entwicklungen kann man nun die unvermerkte Vertauschung des Fundamentalwerthes der Grösse x mit irgend einem anderen ihrer generellen Werthe während Ein und derselben Untersuchung bezeichnen.

Hierzu würde z. B. der Fall gehören, wenn man in der Meinung, es nur mit Fundamentalwerthen von x zu thun zu

haben, die Funktion $\sqrt{x}$ für $x=2$ gleich $+\sqrt{2}$ und für $x=-2\sqrt{-1}$ gleich $1-\sqrt{-1}$ schriebe. Denn in der That liegt der ersten Formel $\sqrt{2}=+\sqrt{2}$ der fundamentale Werth $x=2e^{0i}$ zu Grunde, welcher $\sqrt{x}=\sqrt{2}.e^{0i}=+\sqrt{2}$ ergibt; dagegen liegt der zweiten Formel $\sqrt{-2\sqrt{-1}}=1-\sqrt{-1}$ nicht der fundamentale Werth $x=2e^{\frac{3\pi}{2}i}$, sondern der Werth $x=2e^{\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi\right)i}$ zu Grunde, welcher

$$\sqrt{x}=\sqrt{2e^{\left(\frac{3\pi}{4}+\pi\right)i}}=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=1-\sqrt{-1}$$

ergibt.

Bei gleichmässiger Beharrung bei den Fundamentalwerthen von x, welche den kleinsten positiven Neigungswinkeln entsprechen, würde man gleichzeitig $\sqrt{2}=+\sqrt{2}$ und $\sqrt{-2\sqrt{-1}}=-1+\sqrt{-1}$ nehmen müssen.

13. Zu einem fehlerhaften Verfahren der vorstehenden Art verurtheilt man sich bei einer Untersuchung zuweilen selbst, indem man in der besten Absicht, behuf Erreichung möglichster Strenge, die Unbestimmtheit mancher Zeichen und Regeln durch eine feste Vorschrift zu verbannen sucht, nach welcher man in den betreffenden Fällen unabänderlich verfahren will. Diese Regel ist zuweilen nicht auf das innere Wesen der Dinge begründet, stützt sich vielmehr auf spezielle Eigenschaften oder spezielle Grössenreihen, welche keine allgemeine Gültigkeit haben, oder auf sonstige zufällige Nebensachen, ohne die Hauptsache zu treffen, oder sie verlangt Etwas, was nur unter gewissen Umständen den beabsichtigten Erfolg hat, in allgemeineren Fällen aber den Zweck verfehlt, oder sie geht darauf hinaus, Etwas zu erzwingen, was gar nicht erzwungen zu werden braucht und sich auch nicht erzwingen lässt, ohne zugleich gewisse höhere Prinzipien zu verletzen.

Hierher ist es z. B. zu rechnen, wenn man behuf vermeintlicher Beseitigung von Unsicherheiten unter positiven Grössen allgemein diejenigen verstehen will, deren reeller Theil positiv ist (z. B. die Grösse $2-3\sqrt{-1}$) und nun die Bedingung ausspricht, dass von der in der Untersuchung vorkommenden Wurzelgrösse $\sqrt{x}$ stets der positive Werth genommen werden solle. Diess würde, wie in dem sub 12. angeführten Beispiele, dahin führen, dass man von $\sqrt{x}$ für $x=2$ den fundamentalen, dagegen für $x=-2\sqrt{-1}$ nicht den fundamentalen Werth nähme,

wodurch die lästige Vieldeutigkeit zwar beseitigt, dafür aber Grössen aus ganz verschiedenen Grundreihen, welche in gar keinem organischen Zusammenhange stehen, mit einander in Vergleichung gebracht sind, also eine offenbare Verwirrung in den Grundbedingungen, deren sich keine mathematische Spekulation entschlagen darf, herbeigeführt ist.

14. In dem obigen Satze 11. ist bei der Bildung einer Funktion $F(x)$ aus der Grösse x ausdrücklich von bestimmten, d. h. von solchen Operationen geredet, über deren gesetzliche Veränderungen durchaus keine Vieldeutigkeit, Unbestimmtheit oder Willkührlichkeit obwaltet.

In diesem Sinne bestimmt sind zwar alle eigentlichen Grundoperationen der Arithmetik und Analysis oder können doch wenigstens bestimmt ausgesprochen werden. Gleichwol führen dieselben nicht immer zu einem völlig bestimmten Resultate, selbst wenn die Grundgrösse x und die übrigen damit zu verknüpfenden Grössen völlig bestimmt gegeben sind. So liefert z. B. die Multiplikation, Division, Potenzirung, Wurzelausziehung und Exponentiation, wenn die zu verknüpfenden Grössen genau gegeben sind, ganz bestimmte Werthe. Die Addition und Subtraktion zweier völlig bestimmten Werthe erzeugt jedoh eine Grösse, welche nur nach Länge und Richtung bestimmt ist, deren Drehungswinkel aber in der sub 8. erwähnten unendlichen Grössenreihe vieldeutig bleibt.

Wenn diesen Umständen nicht gehörig Rechnung getragen und die zuletzt erwähnte Vieldeutigkeit nicht bei allen miteinander zu vergleichenden Grössen nach einem gemeinschaftlichen Prinzipe gehoben wird, ist man abermals der Gefahr von Irrthümern ausgesetzt.

15. Zu den behuf Bildung einer Funktion vorgeschriebenen Operationen gesellen sich oftmals noch andere, welche nicht vorgeschrieben sind, welche aber auf den ersten flüchtigen Blick als unschädlich und zulässig erscheinen und bald bewusst, bald unbewusst — bald in diesem bald in jenem Stadium der Entwicklung — bald mit grösserer, bald mit geringerer Intensität ausgeführt werden.

Diess sind die willkürlichen Zusätze der Werthe $2k\pi i$ in den Exponenten der Richtungskoeffizienten oder in geometrischer Sprache die ganzen Umdrehungen, welche man mit den bei der Entwicklung der Funktion allmählich er-

zeugten Grössen und zuletzt auch wol noch mit dem Gesammtwerthe jener Funktion vornimmt.

Dass solche ganze Umdrehungen im Allgemeinen statthaft sind, unterliegt keinem Zweifel, insofern auf dieselben, wie auf die übrigen, direkt vorgeschriebenen Operationen gehörig Rücksicht genommen wird, und insofern dieselben, wenn die Funktion $F(x)$ für verschiedene Werthe von x zu berechnen ist, stets bei denselben Entwicklungsstufen und in derselben Art und Weise vorgenommen werden. Fehlt man hiergegen, so kann man zu ganz falschen Schlussfolgerungen geleitet werden.

So z. B. wird wol jeder Mathematiker die Grösse $-x$ unbedenklich für Einen der möglichen Werthe der Funktion $\sqrt{x^2}$ halten; aber nicht alle werden sich darüber Rechenschaft geben, dass diess ganz unmöglich sein würde, wenn bei der Bildung jener Funktion keine anderen, als die wirklich vorgeschriebenen Operationen, welche zuerst in einer Quadrirung und sodann in einer Radizirung bestehen, zur Ausführung kämen. Denn unter solchen Umständen nimmt jene Funktion, selbst wenn man für $x = ae^{\alpha i}$ den allgemeinsten Ausdruck $ae^{(\alpha+2k\pi)i}$ setzt, da dann $x^2 = a^2e^{2(\alpha+2k\pi)i}$ wird und $\sqrt{x^2} = (x^2)^{\frac{1}{2}}$ ist, immer nur den Werth $ae^{(\alpha+2k\pi)i}$ an, welcher entschieden $= x$ und niemals $= -x$ ist, was für eine ganze Zahl man auch für k setzen möge.

Der Werth $-x$ kann auch noch nicht einmal dadurch hervorgebracht werden, dass man dem Gesammtwerthe der Funktion $\sqrt{x^2}$ noch mehrere ganze Umdrehungen beilegt. Denn hierdurch erhielte man immer nur den Ausdruck $\sqrt{x^2} = ae^{[\alpha+(2k+2k')\pi]i}$, welcher für keine Werthe von k und k' gleich $-x$ werden kann.

Dieser Werth $-x$ kann vielmehr nur dadurch erzeugt werden, dass man nach der Quadrirung und vor der Radizirung beliebige Umdrehungen vornimmt, wodurch x^2 die Form $a^2e^{2[\alpha+(2k+k')\pi]i}$ und demgemäss $\sqrt{x^2}$ die Form $ae^{[\alpha+(2k+k')\pi]i}$ annimmt, welche für alle paaren Werthe von k' gleich x und für alle unpaaren gleich $-x$ ist.

Hieraus erkennt man, dass die Formel $\sqrt{(\pm x)^2} = x$ einen Widerspruch enthält, und dass es ganz unstatthaft ist, in derselben Entwicklung ohne weitere Distinktion die Funktion $\sqrt{x^2}$ sowol für positive, wie für negative Werthe von x stets positiv zu nehmen, weil man es unter Beachtung der nicht vorgeschriebenen, aber dennoch ausgeführten Operationen in beiden Fällen gewissermassen nicht mehr mit derselben, sondern mit zwei ganz verschiedenen Funktionen zu thun hat.

Ohne die erwähnten ungewöhnlichen Drehungen ist also immer $\sqrt{(\pm x)^2} = \pm x$ zu setzen. Demnach ist z. B.

$$\frac{1}{\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1}}{-1} = -\sqrt{-1}$$

und nicht

$$= \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{(-1)^2}} = \frac{\sqrt{-1}}{1} = \sqrt{-1}$$

zu setzen. Dieses erkennt man auch direkt durch die präzisere Formel

$$\frac{1}{\sqrt{-1}} = \frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}} = e^{-\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}} = \cos(-\tfrac{\pi}{2}) + \sin(-\tfrac{\pi}{2})\sqrt{-1} = -\sqrt{-1}.$$

Um von Vorstehendem eine fernere praktische Anwendung zu zeigen; so bemerken wir, dass die Formel

$$y = \frac{b}{c}\sqrt{x^2}$$

ein spezieller Fall der Gleichung der Hyperbel ist und in dieser Gestalt zwei im Mittelpunkte O sich durchschneidende gerade Linien AB und CD darstellt. Nimmt man die Wurzelgrösse in dem ursprünglichen Sinne; so bezieht sich jene Formel in der Gestalt

$$y = \frac{b}{c}x$$

auf die Grade AB, und nimmt man dieselbe mit entgegengesetztem Zeichen; so entspricht die Formel in der Gestalt

$$y = -\frac{b}{c}x$$

der Geraden CD. Wollte man aber die Wurzelgrösse für jeden beliebigen Werth von x unbedingt positiv nehmen; so würde die Formel

$$y = \frac{b}{c}\sqrt{x^2}$$

den gebrochenen Linienzug AOD darstellen. Die goniometrische Tangente des Neigungswinkels φ der Geraden AB gegen die Abscissenaxe wird für jede zwei beliebige Werthe x', x'' der Abscisse x ausgedrückt durch

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{y'-y''}{x'-x''} = \frac{b}{c}\cdot\frac{\sqrt{x'^2}-\sqrt{x''^2}}{x'-x''}.$$

Hierin muss unter $\sqrt{x^2}$ offenbar stets Ein und dieselbe Funktion verstanden werden, und wenn diess geschieht, nimmt $\operatorname{tang}\varphi$, wie es auch sein muss, den konstanten Werth $\frac{b}{c}$ an, welche positiven und negativen Werthe auch x' und x'' haben mögen. Verstände man jedoch unter $\sqrt{x^2}$ immer den absoluten Werth von x; so würde die vorstehende Formel nur für diejenigen Fälle richtig sein, und den konstanten Werth $\frac{b}{c}$ ergeben, wo x' und x'' beide positiv wären: für diejenigen Fälle aber, wo die erste Abszisse positiv $=x'$ und die zweite Abszisse negativ $=-x''$ wäre, würde jene Formel unrichtig sein und den variabelen Werth $\frac{b}{c}\cdot\frac{x'-x''}{x'+x''}$ ergeben.

Ebenso nimmt wol Mancher (für positive x) Einen der unendlich vielen Werthe von $\log(-x)^2$ ohne Weiteres reell und dem absoluten Betrage nach gleich $2\log x$, also auch $\frac{1}{2}\log(-x)^2 = \log x$ an. Diess würde unmöglich sein, wenn man bei der Bildung der Funktion $\log(-x)^2$ nur $-x$ quadrirt und von diesem Quadrate den Logarithmus genommen dächte. Denn aldann würde der generelle Werth von $\log(-x)^2$, wenn man allgemein $-x = xe^{(1+2k)\pi i}$ setzt, gleich

$$2\log x + 2(1+2k)\pi i \text{ also auch } \tfrac{1}{2}\log(-x)^2 = \log x + (1+2k)\pi i$$

stets imaginär und für keinen denkbaren Werth von k reell sein können. Reelle Werthe kann diese Funktion nur annehmen, wenn man voraussetzt, das Quadrat $(-x)^2$ erleide noch vor der Logarithmirung eine k'malige Drehung um den Nullpunkt. Diess gibt den generellen Ausdruck

$$\tfrac{1}{2}\log(-x)^2 = \log x + (1+2k+k')\pi i,$$

welcher für unpaare Werthe von k' reell wird.

Hieraus geht auch der Irrthum hervor, in welchem diejenigen Schriftsteller befangen sind, welche das Integral $\int\frac{\partial x}{x}$ nicht $=\log x$, sondern $=\frac{1}{2}\log x^2$ setzen wollen, in der Meinung, der letztere Ausdruck sei für negative x stets reell, der erstere dagegen stets imaginär, der erstere Ausdruck sei daher richtiger, weil sich nachweisen lässt, dass das bestimmte Integral

von $\frac{\partial x}{x}$ zwischen zwei negativen Gränzen in der That stets reell ist. Die Täuschung liegt darin, dass für negative x der Ausdruck $\frac{1}{2}\log x^2$ keineswegs nothwendig reell zu sein braucht, vielmehr ohne Einführung ungewöhnlicher Drehungen eben so gut imaginär ist, wie $\log x$. Hierzu gesellt sich ein zweiter Irrthum, welcher darin besteht, dass ein bestimmtes Integral nicht reell sein könne, wenn das allgemeine Integral imaginär ist, was doch sehr wol möglich ist, wenn das Imaginäre, wie hier, in einem konstanten Gliede liegt.

Die Gleichung $(-1)^2 = +1$, wenn sie nicht mit Rücksicht auf die Drehungen aufgefasst wird, wenn man also über diese Drehungen nicht nach einer bestimmten Regel, sondern nach Willkür schaltet, ist in einer solchen unbeschränkten Allgemeinheit falsch. Folgende Rechnung zeigt, zu welchem handgreiflichen Irrthume man mittelst jener Gleichung gelangen kann. Sieht man nämlich von dem geometrischen Werthe der Zahlen gänzlich ab; so kann man schreiben:

$$2\pi\sqrt{-1} = 2\log(-1) = \log(-1)^2 = \log 1 = 0,$$

also den absurden Schluss $2\pi\sqrt{-1} = 0$ herbeiführen.

Noch paradoxer wird dieser Schluss, wenn man setzt:

$$1 = (\sqrt{-1})^4 = \left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{2\pi}\right)^4 = \left(\frac{2\log(-1)}{2\pi}\right)^4 = \left(\frac{\log(-1)^2}{2\pi}\right)^4$$
$$= \left(\frac{\log 1}{2\pi}\right)^4 = 0,$$

wonach sich also $1 = 0$ ergibt!

16. Wenn einmal die in der vorstehenden Nummer bezeichneten Umdrehungen als zulässige Zwischenoperationen angesehen werden; so müssen dieselben, um den allgemeinsten Ausdruck einer Funktion zu bilden, nach jeder einzelnen der durch die Funktion vorgeschriebenen einfachen Operationen ausgeführt werden. Unter solchen Umständen wird aber der generelle Werth der Funktion im Allgemeinen abhängig von der Reihenfolge der vorgeschriebenen Operationen, was bei Weglassung jener Drehungen oftmals nicht der Fall ist; und eine strenge Definition der betreffenden Funktion erfordert nothwendig eine feste Vorschrift über die Reihenfolge, in welcher die gedachten Operationen vorgenommen werden sollen.

So ist z. B. bei allgemeinster Auffassung $\sqrt{x^2}$ eine andere Funktion, als $(\sqrt{x})^2$, indem die erstere, wenn wir uns unter x eine positive Grösse denken, die in $\sqrt{x^2} = xe^{(k+k')\pi i}$ enthaltenen zwei verschiedenen Grundwerthe $+x$ und $-x$, dagegen die letztere nur den in $(\sqrt{x})^2 = xe^{2(k+2k')\pi i}$ enthaltenen einzigen Grundwerth $+x$ besitzt.

Erhebt man die Einheit nach und nach auf die Potenzen vom Grade 2, 3, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$; so ergeben sich je nach der Reihenfolge, in welcher diese Potenzirungen ausgeführt werden, folgende Grundwerthe der Funktion $1^{2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}$.

Für die Reihenfolge $\frac{1}{2}.2.\frac{1}{3}.3$, so wie auch für die Reihenfolge $\frac{1}{3}.\frac{1}{2}.2.3$ der einzige Werth $+1$.

Für die Reihenfolge $\frac{1}{3}.2.\frac{1}{2}.3$ die zwei Werthe $+1$ und -1.

Für die Reihenfolge $\frac{1}{2}.3.\frac{1}{3}.2$ die drei Werthe $+1$, $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Für die Reihenfolge $2.\frac{1}{2}.3.\frac{1}{3}$, so wie auch für die Reihenfolge $2.3.\frac{1}{3}.\frac{1}{2}$ die sechs Werthe $+1$, -1, $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Der generelle Werth einer Funktion lässt sich in jedem speziellen Falle leicht bilden, wenn man die Wirkung der fraglichen Umdrehungen und die Reihenfolge der vorgeschriebenen Operationen gehörig berücksichtigt. In dem Situationskalkul, §. 4., habe ich den generellen Ausdruck für mehrere der einfacheren Funktionen beiläufig angemerkt. Danach hat man z. B., wenn der Grundwerth der Grösse A gleich $ae^{\alpha i}$ ist,

$$(((A^m)^n)^p)^q = a^{mnpq} e^{(mnpq\alpha + mnpqk_1 + npqk_2 + pqk_3 + qk_4 + k_5)2\pi i},$$

$$\log A^n = n \log a + [n(\alpha + 2k\pi) + 2k_1\pi]i.$$

Hieraus erhellet unter Anderem, dass allgemein keineswegs $(A^n)^m = (A^m)^n = A^{mn}$ oder $\log A^n = n \log A$ gesetzt werden dürfe, u. d. gl. m.

17. Unter dem Fundamentalwerthe einer Grösse $ae^{\alpha i}$, deren Drehungswinkel α wegen der mehrgedachten willkürlichen Drehungen in gewisser Weise variabel oder vieldeutig ist, versteht man gewöhnlich entweder den Werth mit dem kleinsten

positiven Drehungswinkel (welcher Letztere dann jedenfalls $< 2\pi$ sein wird, aber möglicherweise $> \pi$ sein kann) oder aber den Werth mit dem absolut kleinsten Drehungswinkel (welcher Letztere dann positiv oder negativ, aber absolut $\leqq \pi$ sein wird).

Gegen diese Annahme lässt sich nichts erinnern, so lange es sich um eine einfache geometrisch gegebene Grösse handelt. Kommen aber die Werthe von Funktionen in Betracht, was der allgemeinere Fall ist; so führt jene Annahme leicht zu Verwirrungen, weil es sich ereignen kann, dass der hiernach bestimmte Fundamentalwerth einer Funktion $F(x)$ nicht dem Fundamentalwerthe der Grundgrösse x entspricht, aus welcher die Funktion gebildet werden soll, oder dass mit Nothwendigkeit die sub 15. und 16. erwähnten Drehungen als Zwischenoperationen zugelassen werden müssen, um einen solchen Werth der Funktion $F(x)$ zu erzeugen. Da die Grösse x die Basis der von der Funktion verlangten Operationen ist, und da oftmals auch die gedachten Drehungen als Zwischenoperationen ausgeschlossen bleiben sollen; so scheint es angemessener und zur Aufrechterhaltung der wesentlichsten Relationen geeigneter, unter dem Fundamentalwerthe der Funktion $F(x)$ den dem Fundamentalwerthe der Grundgrösse x entsprechenden Werth zu verstehen, welcher sich bei Weglassung aller Drehungen ergibt. Jedefalls muss man aber, wenn die gewöhnliche Bestimmung beibehalten wird, sehr sorgfältig zwischen dem Fundamentalwerthe der Funktion $F(x)$ und den dem Fundamentalwerthe der Grundgrösse x entsprechenden Werthe jener Funktion unterscheiden.

So würde nach der gewöhnlichen Definition der Fundamentalwerth der Funktion $\sqrt{(-x)^2}$ (worin x positiv gedacht wird) $= x$ sein. Oben sub 15. ist aber gezeigt, dass diese Funktion den Werth x nicht anders annehmen kann, als wenn das Quadrat $(-x)^2$ vor der Wurzelausziehung erst noch einer Drehung unterworfen wird. Nach unserer Meinung würde $-x$ besser der Fundamentalwerth der gegebenen Funktion zu nennen sein, weil sich derselbe auf den Fundamentalwerth der Grundgrösse x stützt, und von allen willkürlichen Zwischenoperationen unabhängig ist.

Ebenso würde nach der gewöhnlichen Definition der Fundamentalwerth von $\sqrt[3]{(-x\sqrt{-1})^2} = \sqrt[3]{(xe^{\frac{3\pi}{2}i})^2}$, wenn ausdrücklich alle Drehungen als Zwischenoperationen ausgeschlossen sein sollen, so dass dann der generelle Werth jener Funktion

$$= \sqrt[3]{x^2} \cdot e^{(1+\frac{4k}{3})\pi i}$$

ist,

$$= \sqrt[3]{x^2} \cdot e^{\frac{\pi}{3}i} = \sqrt[3]{x^2}(\tfrac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)$$

sein. Dieser Werth erfordert aber die Substitution $k = 1$, beruhet also nicht auf dem Fundamentalwerthe der Grundgrösse. Das Letztere thut für $k = 0$ nur der Werth $\sqrt[3]{x^2} . e^{\pi i} = -\sqrt[3]{x^2}$, welcher demnach am natürlichsten den Fundamentalwerth der gegebenen Funktion repräsentiren möchte.

Dass der Sinn der Rechnung oftmals selbst bei den einfachsten Operationen der niederen Arithmetik denjenigen Werth einer Funktion verwirft, welcher nach der gewöhnlichen Definition den Fundamentalwerth dieser Funktion darstellen würde, und nothwendig denjenigen Werth fordert, welcher dem Fundamentalwerth der Grundgrösse entspricht, lehrt das Beispiel der Funktion $\frac{1}{\sqrt{-1}}$, welche in allen Rechnungen stets $= -\sqrt{-1}$ und nicht $= \sqrt{-1}$ gesetzt wird, obgleich doch der letztere Ausdruck nach der gewöhnlichen Definition den Fundamentalwerth des gegebenen darstellt. Dieser Fundamentalwerth $\sqrt{-1}$ ist hier, wie in den meisten anderen Fällen, unwichtig und würde nur Verwirrungen herbeiführen, da derselbe nicht anders gedacht werden kann, als dass in der Funktion $\frac{1}{\sqrt{-1}}$ von der Grundgrösse 1 nicht der Fundamentalwerth $1e^0$, sondern der Werth $1e^{2\pi i}$ genommen sei, wogegen $-\sqrt{-1}$ als Werth der Funktion $\frac{1}{\sqrt{-1}}$ dem Fundamentalwerthe $1e^0$ der Grundgrösse vollkommen entspricht.

Unzulässig in allen Fällen ist es aber, etwaige reelle Werthe einer Funktion deren Fundamentalwerthe zu nennen, da es oftmals deren mehr als Einen oder gar keinen gibt.

Auch leuchtet ein, dass niemals der absolute Werth einer Funktion (also die Quantität a der Grösse $ae^{\alpha i}$ oder der Model $\sqrt{b^2 + c^2}$ der Grösse $b + ci$) den Begriff des Fundamentalwerthes ersetzen kann.

18. Durch eine sichere Bestimmung über die von der Funktion $F(x)$ verlangten Operationen, über die Reihenfolge derselben, über die einzuschaltenden Drehungen als Zwischenoperationen

und über die fundamentalen oder in festgesetzter Weise aus den fundamentalen erzeugten Werthe der in jene Funktion eintretenden oder als untergeordnete Entwicklungsstufen bei der Berechnung jeder Funktion sich ergebenden Grössen wird man in allen Fällen die aus der Vieldeutigkeit jener Funktion fliessende Unsicherheit beseitigen können, ohne die mit jener Vieldeutigkeit verbundene Allgemeinheit zu beeinträchtigen. Man erhält auf diese Weise unzweideutige Ausdrücke, in welchen die mit denselben Buchstaben und Zeichen belegten Grössen und Operationen stets die nämliche Bedeutung behalten und das Gesetz des Zusammenhanges der einzelnen Grössen und Theile unter sich und in Beziehung zum Ganzen ungestört und leicht erkennbar bleibt.

Es ist schon oben sub 13. und 15. bemerkt, wie misslich es ist, eine solche oftmals sehr erwünschte Unzweideutigkeit durch andere Bestimmungen herbeizuführen, welche sich an gewisse Nebensachen und Zufälligkeiten halten, ohne das eigentliche Wesen der Dinge zu berücksichtigen, da hierdurch leicht Verstösse gegen die Grundbedingungen des mathematischen Denkens begangen werden können.

Eine sehr bedenkliche Bestimmung dieser Art ist z. B., wie schon vorhin gezeigt worden, die Forderung, die Wurzelgrösse $\sqrt{x^2}$ für alle positiven und negativen Werthe von x stets positiv zu nehmen, wogegen es ganz unbedenklich ist, von jener Funktion stets denjenigen Werth zu nehmen, welcher dem Fundamentalwerthe der Grundgrösse mit Ausschluss aller Drehungen entspricht, und welcher unzweideutig $= x$ ist.

Ebenso misslich würde die Bestimmung sein, dass von der Wurzelgrösse $\sqrt[n]{x}$ für positive Werthe von x stets der absolute Werth genommen werden solle, eine Bestimmung, welche man vielleicht dadurch rechtfertigen zu können glauben möchte, dass man festsetzte, unter $\sqrt[n]{x}$ solle der nach der Binomialformel

$$\sqrt[n]{a+b}=(a+b)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}a^{\frac{1}{n}-1}b+\text{etc.}$$

zu berechnende Werth verstanden werden.

Denn wenn auch wirklich die als eine zusammengesetzte Funktion gedachte Grösse x nach der Voraussetzung stets positiv bleibt; so könnte es sich doch ereignen, dass dieselbe einmal als paare Potenz einer negativen oder überhaupt als eine Potenz einer komplexen Grösse erschiene, und dass man durch die vorgeschrie-

bene Beschränkung zu ähnlichen Irrthümern geleitet würde, wie wenn man allgemein $\sqrt{(\pm x)^2}=x$ setzte.

Auch die Berufung auf die Binomialformel zu vorstehendem Zwecke ist trüglich. Diese Formel stellt keineswegs bloss einen einzigen reellen, sondern überhaupt alle n verschiedenen Werthe von $\sqrt[n]{a+b}$ dar. Diess erkennt man sofort, wenn man erwägt, dass für die Grösse a allgemein $ae^{2k\pi i}$ gesetzt werden kann. Macht man diese Substitution, setzt auch $a+b=a(1+\frac{b}{a})$ und beachtet, dass die Substitution des allgemeinen Ausdruckes $be^{2k\pi i}$ für b keinen Einfluss auf das Resultat hat; so ergibt sich sofort

$$\sqrt[n]{a+b}=e^{\frac{2k\pi}{n}i}\sqrt[n]{a}\left[1+\frac{1}{n}\frac{b}{a}+\frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)}{1.2}\left(\frac{b}{a}\right)^2+\text{etc.}\right],$$

durch welche Formel n verschiedene Werthe dargestellt sind, welche sämmtlich gleiche absolute Werthe, aber verschiedene Richtungen haben.

Die Festsetzung, dass von einer Grösse stets ihr absoluter Werth genommen und dieser absolute Werth gewissermaassen als eine Funktion der fraglichen Grösse angesehen werden solle, führt besonders dann zu sehr prekären Resultaten, wenn die fragliche Grösse nicht bloss reell, sondern auch komplex, also allgemein von der Form $ae^{\alpha i}$ sein kann. Denn setzt man $ae^{\alpha i}=x$, so ist der absolute Werthe dieser Grösse $a=\frac{x}{e^{\alpha i}}=xe^{-\alpha i}$. Der Ausdruck $xe^{-\alpha i}$ ist aber keineswegs ein solcher, welchen man nach den gewöhnlichen desfallsigen Definitionen eine Funktion von x nennen kann, weil die behuf Bildung dieses Ausdruckes mit der Grundgrösse x zu vollziehenden Operationen nicht bestimmt oder für alle Werthe von x konstant, vielmehr von dem Drehungswinkel α dieser Grösse abhängig sind. Ausdrücke wie $+x$, $-x$, $x\sqrt{-1}$, u. s. w., welche nach der gewöhnlichen Auffassung für verschiedene Funktionen von x gelten, würden hiernach Ein und dieselbe Funktion von x darstellen, und hieraus erkennt man, welche sorgfältige und oft verwickelte Nebenbetrachtungen bei einer solchen Erweiterung des Begriffes Funktion angestellt werden müssten, um die Rechnung vor Fehlschlüssen zu bewahren.

Bei Vermeidung solcher und ähnlicher anderer schwankenden und trüglichen Bestimmungen kann man durch die im Eingange dieser Nummer bezeichneten Festsetzungen stets bewirken, dass

nicht bloss der Werth einer Funktion, sondern auch das durch sie ausgesprochene Bildungsgesetz als etwas vollkommen Bestimmtes und Unzweideutiges erscheint, was für die Präzision der mathematischen Begriffe von äusserster Wichtigkeit ist. Man wird alsdann die mehrfachen Gesetze, welche in manchen Formeln liegen, leicht von einander trennen und ein jedes für sich betrachten können. So würde man z. B. in der Gleichung $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ des Kreises zwei verschiedene Gesetze erkennen, von welchen das erste $y = + \sqrt{r^2 - x^2}$ dem oberen und das zweite $y = - \sqrt{r^2 - x^2}$ dem unteren Halbkreise angehört.

Es wird nicht schaden, wenn wir hier nochmals, wie schon ad 14. geschehen, darauf aufmerksam machen, dass die durch Addition oder Subtraktion verbundenen Glieder einer Funktion stets Grössen mit vieldeutigen Drehungswinkeln erzeugen, dass also die Präzision der Formel im Allgemeinen eine Bestimmung darüber erfordert, ob eine solche Summe oder Differenz mit ihrem fundamentalen oder mit irgend Einem ihrer generellen Werthe genommen werden solle.

II. Unbestimmtheit, Veränderlichkeit und Differenziation.

19. Wenn zwischen den beiden Unbekannten x, y nur eine einzige Gleichung gegeben ist; so ist dieselbe, oder vielmehr deren Auflösung, d. h. jedes Paar zusammengehöriger Werthe von x und y, welches jene Gleichung erfüllt, im eigentlichen Sinne unbestimmt. Es bleibt nämlich die Eine Unbekannte x in ganz beliebiger Weise, also auch in einer stetig zusammenhängenden Grössenreihe variabel, und demzufolge werden auch die entsprechenden Werthe von $y = F(x)$ allmähliche Uebergänge in einander bilden.

Beschränkt man die Stetigkeit dieser Veränderung durch eine Nebenbedingung, z. B. durch die Forderung, dass die Eine Unbekannte x oder dass beide x und y nur ganze Werthe erhalten sollen; so nimmt die Funktion $y = F(x)$ diejenige Eigenschaft an, welche wir im Vorstehenden der Kürze wegen Vieldeutigkeit genannt haben.

Es ist freilich üblich, die Benennung Vieldeutigkeit nur da anzuwenden, wo die Unbestimmtheit bloss in der Veränderlichkeit der Drehungswinkel $\alpha + 2k\pi$, mit beliebigen gan-

zen Werthen von k, besteht, und in dem vorbemerkten Falle die Bezeichnung Unbestimmtheit unter Hinzufügung der beschränkenden Bedingung beizubehalten, indem man z. B. von der Auflösung einer unbestimmten Gleichung in ganzen Zahlen redet: man sieht aber, dass dem wahren Wesen nach eine solche beschränkte Unbestimmtheit mit dem Begriffe der Vieldeutigkeit genau übereinstimmt, und dass, wenn man charakteristische Unterscheidungen machen will, dieselben nur danach bemessen werden können, ob die Grösse, von welcher die Unbestimmtheit abhängt, in stetiger oder in unterbrochener Reihenfolge variabel sei.

20. Wenn die Gleichung $y=F(x)$ mit der Erlaubniss gegeben ist, darin die Grösse x durch eine gewisse Reihe von Werthen zu verändern; so folgt daraus noch nicht die Nothwendigkeit, diese Veränderung vorzunehmen. In sehr vielen Fällen liegt auch nur ein Interesse vor, für diesen oder jenen speziellen Werth von x den zugehörigen Werth von y zu kennen, oder umgekehrt. Alsdann erscheint für einen jeden solchen Spezialwerth von x die Funktion $F(x)$ als eine durchweg bestimmte oder doch nur in gewisser Hinsicht vieldeutige, wie wir sie in den früheren Nummern betrachtet haben.

Unter solchen Umständen spielt offenbar der Charakter der Veränderlichkeit von x und y nach stetiger Reihenfolge gar keine wesentliche Rolle. Beide Grössen erscheinen vielmehr in jedem speziellen Falle, wo man auf die gegebene Gleichung rekurrirt, als unbekannte Konstanten, welche nach Maassgabe dieser Gleichung bald diese, bald jene Werthe annehmen können.

Anders ist es, wenn jene Gleichung mit der Bedingung gegeben ist, x stetig zu variiren. Unter solchen Umständen nehmen die Grössen x und y diejenige Eigenschaft an, welche man im strengsten oder eigentlichsten Sinne Veränderlichkeit nennen sollte, und jetzt erst qualifiziren sich dieselben vollständig zu der Benennung von Veränderlichen oder Variabeln.

21. Wenn man in der Funktion $y=F(x)$ der unabhängig Veränderlichen x den Charakter der Unabhängigkeit im ausgedehntesten Sinne ertheilen wollte; so müsste man an derselben nicht bloss die Quantität, sondern auch den Drehungswinkel als unbeschränkt veränderlich ansehen. Bei dieser Voraussetzung würde x den Vektor eines Punktes darstellen, welcher nach und nach alle Punkte einer Ebene durchliefe, und die Folge hiervon würde sein, dass auch die abhängig Verän-

derliche y die Vektoren aller Punkte einer solchen Ebene darstellte.

Eine derartige unbeschränkte Variation von x wird indessen nicht beabsichtigt. Dieselbe würde, wenn man für x den allgemeineren Ausdruck $xe^{\varphi i}$ setzt, auf eine gleichzeitige Variation der zwei Grössen x und φ in der Reihe der reellen Grössen, also auf die Bildung einer Funktion $y = F(xe^{\varphi i})$ mit zwei unabhängig Veränderlichen x und φ hinauslaufen.

Wenn man von Funktionen mit Einer Veränderlichen redet, intendirt man eine solche Verallgemeinerung nicht. Es ist daher nöthig, sich von der Beschränkung, welcher die Variation von x unterworfen sein soll, klar Rechenschaft zu geben, um nicht durch ein zufälliges Aufgeben dieser Beschränkung, d. h. durch die zufällige Substitution eines jener Beschränkung entzogenen Werthes von x, in Irrungen zu verfallen.

Die fragliche Beschränkung für x besteht zunächst darin, dass die Grösse nicht die Vektoren der Punkte einer Ebene, sondern einer bestimmten Linie darstellen soll. Diess hat zur Folge, dass auch y eine Linie darstellt. Einem bestimmten Punkte der Linie der x entspricht dann ein bestimmter Punkt der Linie der y, und die gegenseitige Lage dieser korrespondirenden Punkte liefert ein deutliches Bild von der Beziehung, in welcher x und y zu einander stehen.

Das Charakteristische solcher veränderlichen Grössen und Funktionen besteht hiernach darin, dass während die konstanten Grössen nur auf einzelne Punkte des Raumes führen, durch die veränderlichen Grössen Linienzüge des Raumes dargestellt werden.

Durch die eben ausgesprochene Bedingung, dass x den Punkten einer Linie entsprechen soll, ist übrigens die mehr erwähnte Beschränkung noch nicht vollständig ausgesprochen. Denn wollte man durch x irgend eine krumme Linie darstellen, so käme diess darauf hinaus, dass man für x den allgemeineren Ausdruck $xe^{\varphi i}$ mit der Bedingung setzte, dass φ eine gewisse Funktion $f(x)$ von x, also eine abhängig Veränderliche sei, wodurch die Grundgrösse in der Funktion y selbst zu einer abhängig Veränderlichen werden würde, so dass man dann $y = F[xe^{f(x)i}]$ schreiben könnte, worin nun x bloss in der Reihe der reellen Grössen veränderlich bliebe.

Abgesehen davon, dass die Absicht, eine Funktion einer einzigen unabhängig Veränderlichen zu konstituiren, durch die Erlaubniss der Variation von x nach einer krummen Linie

nicht erfüllt werden würde; so entspricht eine solche Variation von x auch desshalb dem Zwecke der Aufgabe nicht, weil auf dem tieferen Grunde dieser Operation das Bestreben ruht, die Werthe von x oder die Variationen dieser Werthe oder den ganzen Linienzug der x in Beziehung auf Längen-, Richtungs- und Geschwindigkeits- oder Neigungsverhältnisse als Maassstab für den Linienzug der y zu benutzen. Zu einem solchen Maassstabe eignet sich aber nur eine im Nullpunkte beginnende gerade Linie.

Die Variation der x wird demgemäss im Allgemeinen, und insofern eine grössere Freiheit nicht ausdrücklich zugestanden ist, dahin eingeschränkt, dass diese Grösse die verschiedenen vom Nullpunkte aus gemessenen Stücke einer geraden Linie darstelle.

Hiernach könnte man allgemeiner $x = xe^{\varphi i}$ setzen und darin φ konstant halten, während x die absoluten Werthe von 0 bis ∞ durchläuft.

Der konstante Faktor $e^{\varphi i}$ könnte ebenfalls noch unterdrückt werden, da man ja, wenn man überhaupt eine Variation von x in der unter dem Winkel φ geneigten Linie beabsichtigt, nur die Funktion $y = F(x)$ in $F(xe^{\varphi i})$ zu verwandeln und alsdann x als eine in der positiven Grundaxe unter den absoluten Zahlen 0 bis ∞ veränderliche Grösse zu betrachten brauchte. Es ist jedoch üblich, die Variationen von x in der Funktion $y = F(x)$ auf die reellen, d. h. auf die positiven und negativen Werthe auszudehnen, also zu gestatten, dass x sowol in der positiven, durch xe^{0i} dargestellten, als auch in der negativen, durch $xe^{\pi i}$ dargestellten Grundaxe variire, was offenbar die Zulässigkeit eines allgemeineren Ausdruckes $xe^{\varphi i}$ für x involvirt.

Will man diesen allgemeineren Ausdruck für x ausschliessen, ohne doch die allgemeinere Erlaubniss der Variation von x in den beiden entgegengesetzten Theilen der Grundaxe aufzuheben, so kann diess zwar durch die einfache Bedingung geschehen, dass x in der Reihe der positiven und negativen reellen Zahlen variiren solle; man darf dann aber nicht unbeachtet lassen, dass diess stets zwei verschiedene Zahlenreihen sind, und dass die ganze Operation gewissermaassen auf die Betrachtung zweier verschiedenen Funktionen $F(xe^{0i}) = F(+x)$ und $F(xe^{\pi i}) = F(-x)$ oder auf die Betrachtung der zweideutigen Funktion $F(\mp x)$ hinausläuft, worin dann x nur innerhalb der absoluten Zahlen variirt.

22. Es wird mit Nachdruck wiederholt, dass es zwar üblich

ist, die Funktionen in eine solche Form zu bringen, dass die Grundgrösse x nur in den Reihen der reellen Zahlen zu variiren braucht, um gewisse Bildungsgesetze zur Erkenntniss zu bringen, dass jedoch eine solche Beschränkung nicht durchaus nothwendig ist, dass man aber, selbst bei grösserer Verallgemeinerung, die Grösse x durch irgend eine von der Natur der Untersuchung abhängige stetige Zahlenreihe, welche den Vektoren einer bestimmten Kurve entspricht, laufen lässt, und dass diess auch für die Werthe der Funktion $F(x)$ eine bestimmte Zahlenreihe erzeugt, deren Glieder unter einander in einem organischen Zusammenhange stehen. Der Organismus dieser zusammenhängenden Reihen ist in vielen Fällen geeignet, die Unbestimmtheit, welche einzelnen Gliedern bei völlig isolirter Betrachtung anhaftet, aufzuheben, wie wir weiter unten bei den Werthen 0, ∞ und $\frac{0}{0}$ sehen werden.

Gleichwol soll durch Vorstehendes der Fall keineswegs als eine logische Unmöglichkeit ausgeschlossen sein, dass man die Variation der Grundgrösse x von der letzteren Einschränkung in das Gesetz einer bestimmten Reihe befreite und ihr gestattete, nach den Vektoren einer Ebene beliebig nach allen Richtungen hin sich zu verändern. Dieser Fall erfordert jedoch immer eine besondere Festsetzung, da er zu den ungewöhnlichen gehört.

23. Die Vorstellung vom Unendlichen, obgleich sie eine völlig unzweideutige ist, erzeugt doch keinen Grössenwerth von bestimmter Quantität. Demgemäss stellt das Zeichen ∞ eine Grösse dar, deren Quantität in ihrem Verhältnisse zur Einheit in gewisser Hinsicht unbestimmt bleibt, wogegen die Richtung jener Grösse vollkommen bestimmt ist und der der positiven reellen Grössen genau entspricht.

Allgemein stellt $\infty e^{\alpha i}$ die unter dem bestimmten Drehungswinkel α sich neigende unendliche Linie dar.

Erst wenn auch α unendlich gross, also seiner Quantität nach unbestimmt wäre, würde $\infty e^{\infty i}$ eine nach Quantität und Richtung unbestimmte unendliche Linie darstellen.

24. Die Null als Grösse muss, wie jede andere in eine mathematische Entwickelung eintretende Grösse, in ihrem Verhältnisse zur Einheit aufgefasst werden, kann also nur als unendlich kleiner Theil der Einheit gedacht werden. Hierdurch überträgt sich die Unbestimmtheit des Unendlichen in quantitativer Hinsicht auch auf die Null. Diese Unbestimmtheit

beeinträchtigt jedoch die Vorstellung von dem Werthe der Null nur in untergeordnetem Grade, weil die Gränze, welcher der Nullwerth zustrebt, wenn man denselben im Geiste aus der Einheit zu bilden sucht, eine fest bestimmte, nämlich der Nullpunkt ist, also jener Werth niemals zwischen endlichen Gränzen schwanken kann. Die fragliche Unbestimmtheit macht sich vielmehr nur bei solchen Operationen, wie z. B. der Division oder Wurzelausziehung geltend, wo die Null als Repräsentant des Bildungsgesetzes aus der Einheit erscheint und die umgekehrte Anwendung dieses Gesetzes, also die Erzeugung eines unendlich Grossen verlangt.

Wenn man also für die meisten Fälle auch von derjenigen Unbestimmtheit absehen kann, welche die Null in Rücksicht auf Quantität darbietet, so verbleibt an ihr doch in Rücksicht auf Richtung eine andere Unbestimmtheit im eigentlichen Sinne des Wortes. Der Null kann man nämlich jeden beliebigen Drehungswinkel oder Richtungskoeffizienten zuschreiben, also $0e^{\alpha i}$ dafür setzen, worin α jeden Werth haben kann.

Wie wichtig dieser Umstand ist, erkennt man bei der Division und Wurzelausziehung, indem die Grösse $\frac{1}{0e^{\alpha i}} = \infty e^{-\alpha i}$ zwar unendlich gross, also der Quantität nach in gewisser Weise unbestimmt, der Richtung nach aber ganz bestimmt ist, da ihr der Drehungswinkel $-\alpha$ angehört.

Hiernach ist $\frac{1}{+0} = \infty$, dagegen $\frac{1}{-0} = -\infty$.

Bei der Wurzelausziehung kann das Zeichen der Null sogar die Quantität der zu berechnenden Grösse affiziren. Denn für $a > 1$ ist

$$\sqrt[+0]{a} = a^{\frac{1}{+0}} = a^{\infty} = \infty;$$

dagegen

$$\sqrt[-0]{a} = a^{\frac{1}{-0}} = a^{-\infty} = a^{\frac{1}{\infty}} = 0.$$

Hiernach kommt es in vielen Fällen wesentlich darauf an, zu untersuchen, ob dem Nullwerthe nach dem Wesen der Aufgabe eine bestimmte Richtung zuzuschreiben sei, oder ob diese Richtung willkürlich bleibe.

25. Es scheint im Wesen der Dinge zu liegen und darum

für mathematische Untersuchungen ebenso nothwendig als nützlich zu sein, dass man sich unter dem Unendlichen nicht eine konstante, wenn auch noch so grosse, Grösse, auch nicht einmal einen momentan fixirten Werth einer Variabelen, sondern eine in fortwährendem Wachsthume begriffene, also ewig veränderliche Grösse denke.

Hiernach erscheint denn auch der Nullwerth einer Grössenreihe als eine ewig veränderliche und zwar fortwährend abnehmende, dem Verschwinden, oder genauer gesagt, dem Nullpunkte oder der Nullgränze ohne Ende sich nähernde Grösse.

Diese Auffassung entspricht auch der Unerschöpflichkeit des Aktes, welchen das Denkvermögen bei der Vergegenwärtigung des Begriffes vom Unendlichen zu vollziehen sich bemühet.

Ausserdem gewährt dieselbe sofort eine klare Vorstellung von dem Wesen der relativ unendlich kleinen und grossen Grössen, welche, obgleich an sich oder absolut unbestimmt, doch sehr wohl zu einander in ganz bestimmten und auch in unendlichen Verhältnissen stehen könne.

Ist nämlich vorgeschrieben, dass zwischen zwei Veränderlichen x und y ein bestimmtes funktionelles Verhältniss $y=F(x)$ stattfinde, so werden den allmählichen Veränderungen von x gewisse gesetzmässige, durch jene Funktion bestimmte Veränderungen von y entsprechen. Wird also für ein unendlich grosses oder kleines x auch y unendlich gross oder klein, so kann doch der unendlich grosse oder kleine Werth von x nicht gleich dem von y angesehen werden: beide stellen sich vielmehr im Allgemeinen als verschiedene Grössen heraus, welche stets in der durch die fragliche Funktion bedingten Beziehung zu einander verbleiben, eine Beziehung, welche je nach den Umständen das Verhältniss zwischen den unendlich grossen oder kleinen Werthen von x und y ebenso wol als eine bestimmte endliche, wie auch als eine unendliche Zahl erscheinen lassen kann.

26. Schliesslich muss hinsichtlich der Unbestimmtheit des Begriffes von 0 und ∞ in quantitativer Hinsicht oder des Begriffes vom unendlich Kleinen und unendlich Grossen noch bemerkt werden, dass das Verhältniss dieser Grössen zu endlichen Grössen, obgleich nicht genau darstellbar, doch in der Hinsicht unzweideutig ist, dass das Gesetz, welches bei unausgesetzter Anwendung jenes Verhältniss erzeugen würde, vollkommen bestimmt, nur unerschöpflich ist, und dass überhaupt kein endlicher Werth darunter gedacht werden kann. Demzufolge sieht die Mathematik die

Werthe 0 und ∞, wenn sie isolirt oder nur in Verbindung mit endlichen, von Null verschiedenen Werthen auftreten, gewöhnlich auch wie bestimmte Resultate an.

27. Was dagegen die Unbestimmtheit hinsichtlich der Richtung der Null anlangt, so wird diese Unbestimmtheit zur unbeschränkten Willkürlichkeit, sobald die Null völlig isolirt, ausser Zusammenhang mit einer bestimmten Grössenreihe gedacht werden soll.

Dieser Fall kommt selten vor. In der Regel kommt die Null als Anfangs- oder Endglied einer gewissen stetigen Reihe oder einer Abtheilung einer solchen Reihe in Betracht. Alsdann ist auch ihre Richtung oder ihr Drehungswinkel bestimmt, und sie selbst erscheint als ein Ausdruck von der Form $0e^{\alpha i}$.

So ist z. B. die 0 als erstes Glied der von 0 bis 90° wachsenden Winkel entschieden positiv und demnach auch cosec 0 als erstes Glied dieser Winkelreihe entschieden positiv $=\frac{1}{0}=\infty$. Als erstes Glied der von 180° bis 270° wachsenden Winkel ist dagegen $\sin 180^0=0$ negativ, also $=-0$ oder $=0e^{\pi i}$, und demnach auch cosec 180° als erstes Glied der letzteren Reihe negativ $=\frac{1}{-0}=-\infty$.

Wenn man in der Funktion $y=x-3$ die Grundgrösse in den reellen Zahlen von 0 bis ∞ variiren lässt, so passirt y für $x=3$ den Werth 0, indem einzelne Glieder dieser Reihe -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 sind. Offenbar ist y für $x=3$ als negativ anzusehen, sobald es als Endglied der negativen Abtheilung dieser Reihe oder als derjenige Werth erscheint, welchen $x-3$ für wachsende x bei $x=3$ annimmt. Dagegen ist y für $x=3$ als positiv anzusehen, sobald es als Anfangsglied der positiven Abtheilung jener Reihe oder als derjenige Werth erscheint, welchen $x-3$ für abnehmende x bei $x=3$ annimmt.

Liesse man in der Funktion $x-3$ die Grösse x durch die stetige Zahlenreihe

$$-3\sqrt{-1},\ 1-2\sqrt{-1},\ 2-\sqrt{-1},\ 3,\ 4+\sqrt{-1},\ 5+2\sqrt{-1},\ 6+3\sqrt{-1}\ \text{u. s. w.}$$

laufen, so würde man für y die Reihe

$$-3-3\sqrt{-1},\ -2-2\sqrt{-1},\ -1-\sqrt{-1},\ 0,\ 1+\sqrt{-1},\ 2+2\sqrt{-1},\ 3+3\sqrt{-1}$$

erhalten. Die diesseit dem Nullgliede liegenden Glieder dieser Reihe wie $-3-3\sqrt{-1}$, $=3(-1-\sqrt{-1})=3e^{-\frac{\pi}{4}i}$ haben den Drehungswinkel -45^{0}, die jenseit liegenden, wie $3+3\sqrt{-1}$ $=3(1+\sqrt{-1})=3e^{\frac{\pi}{4}i}$ den Drehungswinkel $+45^{0}$. Jenachdem nun der durch Substitution von $x=3$ entstehende Werth $y=0$ als Endwerth der ersteren oder als Anfangswerth der letzteren Glieder erscheint, ist sein Richtungskoeffizient $-1-\sqrt{-1}=e^{-\frac{\pi}{4}i}$ oder resp. $1+\sqrt{-1}=e^{\frac{\pi}{4}i}$. Keinenfalls aber ist dieser Koeffizient, wie bei der vorher betrachteten Substitution reeller Werthe von x als positiv oder negativ anzusehen.

Welcher Werth dem Richtungskoeffizienten einer für $x=a$ sich annullirenden Funktion $y=F(x)$ gebührt, lässt sich immer leicht erkennen, wenn man in dem allgemeinen Ausdrucke für y die absolute Quantität von dem eigentlichen Richtungskoeffizienten trennt. Die Substitution $x=a$ wird dann immer die Quantität von y annulliren, dem Richtungskoeffizienten aber einen bestimmten Werth verleihen. Um aber den allgemeinen Ausdruck für y zu erhalten, muss man, wenn der allgemeine Terminus derjenigen Reihe, durch welche x variiren soll, eine komplexe Grösse von der Form $re^{\varphi i}=p+qi$ ist, vor der Substitution $x=a$ und vor der Trennung der Quantität von dem Richtungskoeffizienten der Funktion $F(x)$, auch diesen allgemeinen Terminus erst in die Funktion $F(x)$ einführen, also $y=F(re^{\varphi i})$ setzen.

In dem letztvorhergehenden Beispiele ist $y=x-3$. Der Terminus der Reihe, durch welche x variiren soll, ist

$$x=3+z(1+\sqrt{-1}),$$

der allgemeine Ausdruck für y also $y=z(1+\sqrt{-1})$. In diesem Ausdrucke findet die Trennung der Quantität z vor dem Richtungskoeffizienten $1+\sqrt{-1}$ bereits statt, so lange z positive Werthe hat: würde z negativ $=-z$, so müsste der Ausdruck in die Form $(-1-\sqrt{-1})$ gestellt werden. Der Substitution $x=3$, wofür $y=0$ wird, entspricht jetzt die Substitution $z=0$. Dieselbe gibt als Endwerth der Glieder mit negativem z den Werth $y=0(-1-\sqrt{-1})=0e^{-\frac{\pi}{4}i}$, und als Anfangswerth der Glieder mit positivem z den Werth $y=0(1+\sqrt{-1})=0e^{\frac{\pi}{4}i}$, wie vorhin.

28. Der Terminus der Reihe für x wird sich immer in die Form $x=m+n\sqrt{-1}$ und der allgemeine Ausdruck der Funktion y, nachdem dieser Werth von x darin gesetzt ist, in die ähnliche Form $y=p+q\sqrt{-1}$ bringen lassen. Eine Trennung der Quantität von dem Richtungskoeffizienten führt dann die Form

$$y=\sqrt{p^2+q^2}\left(\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}+\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}\sqrt{-1}\right)$$

herbei. Soll nun für einen speziellen Werth von x die Funktion $y=0$ werden; so muss deren Quantität $\sqrt{p^2+q^2}=0$, also gleichzeitig $p=0$ und $q=0$ werden. Hierdurch stellt sich der zu bestimmende Richtungskoeffizient des dem speziellen Werthe von x entsprechenden Werthes von y in die Form

$$\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}+\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}\sqrt{-1}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{q}{p}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{p}{q}\right)^2}}\sqrt{-1}$$

$$=\tfrac{0}{0}+\tfrac{0}{0}\sqrt{-1}.$$

Man sieht hieraus, dass es behuf Feststellung des wahren Werthes dieses Richtungskoeffizienten auf die Bestimmung von Grössen von der Form $\frac{0}{0}$ ankommt, wovon weiter unten in Nr. 31. in grösserer Allgemeinheit die Rede sein wird.

In vielen Fällen entgeht man übrigens der Form $\frac{0}{0}$, wie die Beispiele in der vorstehenden Nummer, sowie auch das nachfolgende Beispiel lehrt.

Es sei

$$y=x^2-26+(3x+42)\sqrt{-1}$$

und der Terminus der Reihe für x habe die Form $x=2z-5\sqrt{-1}$. Für $x=6-5\sqrt{-1}$ oder für $z=3$ wird $y=0$. Der Richtungskoeffizient dieses Nullwerthes ergibt sich aber als ein bestimmter Werth, wenn man den Terminus von x in die Funktion y setzt, welche hierdurch

$$y=4z^2-36-(14z-42)\sqrt{-1}$$

wird. Trennt man hierin die Quantität vom Richtungskoeffizienten, so kommt

$$y=2(z-3)\sqrt{4z^2+24z+85}\left(\frac{2(z+3)}{\sqrt{4z^2+24z+85}}-\frac{7}{\sqrt{4z^2+24z+85}}\sqrt{-1}\right).$$

Für $z=3$ erhält man hieraus

$$y=0\left(\frac{12}{\sqrt{193}}-\frac{7}{\sqrt{193}}\sqrt{-1}\right),$$

worin

$$\left(\frac{12}{\sqrt{193}}-\frac{7}{\sqrt{193}}\sqrt{-1}\right)$$

den gesuchten Richtungskoeffizienten darstellt.

In Nr. 32. wird gezeigt werden, wie sich der Richtungskoeffizient eines solchen Nullwerthes ganz allgemein sehr einfach mit gänzlicher Vermeidung der Form $\frac{0}{0}$ bestimmen lässt.

29. Bei der gewöhnlichen Differenziation der Funktion $y=F(x)$ wird, gleichviel ob diese Funktion reell oder komplex ist, doch immer stillschweigend die Voraussetzung gemacht, dass die Grundgrösse x in der Reihe der reellen Zahlen variire. Ein allgemeineres Resultat wird gewonnen, wenn man annimmt, dass x in einer Reihe komplexer Zahlen, welche auch keineswegs den Vektoren einer geraden, sondern irgend einer krummen Linie zu entsprechen brauchen, variire, so also, dass man $x=re^{\varphi i}$ oder auch $=m+ni$ setzt, worin gleichzeitig r und φ oder m und n variabel werden.

Allerdings kann man dasselbe Resultat auch dadurch erzielen, dass man diesen allgemeineren Werth von x, worin nun r und φ oder m und n Funktionen einer anderen unabhängig veränderlichen reellen Grösse z werden, in die Funktion $y=F(x)$ substituirt und hierauf die Differenziation in Beziehung zu der reellen Grundgrösse z vornimmt. Die Operation und ihr Effekt behält jedoch den Charakter der Ursprünglichkeit und bessere Anschaulichkeit, wenn man vorläufig x als Grundgrösse stehen lässt und unmittelbar die Veränderungen von y mit denen vergleicht, welche den Variationen von x entsprechen, was in Folgendem geschehen soll.

Wenn x die allgemeine Form

$$x=re^{\varphi i}=m+ni$$

hat; so entspricht diese Grösse den Vektoren OM einer Kurve MN (Taf. III. Fig. 1.), für welche OA die positiv reelle Axe, O der Anfangspunkt und die positive Drehungsrichtung von rechts nach links angenommen ist.

Die Funktion

$$y = F(x) = se^{\psi i} = p + qi$$

stellt dann ebenfalls die Vektoren *OP* einer Kurve *PO* (Taf. III. Fig. 2.) dar, für welche *OB* als positiv reelle Axe angenommen ist.

Nach dem gewöhnlichen Prinzipe der Koordinatensysteme in der analytischen Geometrie nimmt man in derselben Ebene, in welcher die reelle Axe der x liegt, rechtwinklig auf dieser die reelle Axe *OC* der y an (Taf. III. Fig. 1.) und trägt von dem Endpunkte *M* der Abszisse x den entsprechenden Werth von y als Ordinate *MP* auf, wodurch sich die Kurve *PQ* ergibt. Eine solche Kombination der Koordinaten x und y beruhet lediglich auf einer Konvenienz oder gemachten Voraussetzung: sie ist für das allgemeine Abhängigkeitsverhältniss zwischen den Werthen von x und y irrelevant, und wenn x und y komplexe Werthe annehmen können; sogar unzweckmässig, weil diese Werthe alsdann gar nicht mehr parallele Richtungen behalten, die Vorstellung von rechtwinkligen Koordinaten also gänzlich aufhört.

Wie man die Kurven durch Koordinaten viel naturgemässer und einfacher darstellen könne, ist im Situationskalkul gezeigt. Hier begnügen wir uns mit einer getrennten Auffassung der Werthe von x und y, und wenn dieselben als Koordinaten Ein und desselben Punktes gedacht werden sollen, bleiben wir bei dem eben erwähnten gewöhnlichen Prinzipe der analytischen Geometrie stehen, indem wir dann nach Taf. III. Fig. 1. *OA* als positiv reelle Axe der x und *OC* als positiv reelle Axe der y ansehen und die positiven Drehungen für Beide von rechts nach links herum nehmen.

30. Wenn x in der Kurve *MN* variirt, so erhält man

$$dx = dr \, . \, e^{\varphi i} + ie^{\varphi i} r d\varphi = dm + dn \, . \, i,$$

Hierin sind r und φ oder m und n Funktionen irgend einer anderen Veränderlichen z, wesshalb dr und $d\varphi$ oder dm und dn in einem gewissen Verhältnisse zu einander stehen, welches von der Natur der Kurve *MN* abhängt, und hier nicht näher betrachtet zu werden braucht. In allen Fällen stellt das vorstehende Differenzial dx die Linie *MN* nach Grösse und Richtung dar. In der Form $dr . e^{\varphi i} + ie^{\varphi i} r d\varphi$ erscheint dieses Differenzial als die Summe des Theiles $MR = dr . e^{\varphi i}$, welcher die Grösse dr der Längenvariation des Vektors r und die Richtung $e^{\varphi i}$ dieses Vektors $OM = x$ hat, und des Theiles $RN = ie^{\varphi i} . r d\varphi$, welcher die

Grösse $rd\varphi$ des der Winkelvariation vom Radius r entsprechenden Bogens und die rechtwinklig auf dem Vektor OM stehende Richtung $ie^{\varphi i}$ hat. In der Form $dm + dn.i$ dagegen erscheint jenes Differenzial als die Summe der Theile $SN = dm$ und $MS = dn.i$, welche resp. die Grössen der Längenvariationen der rechtwinkligen Koordinaten m und n und die Richtungen dieser Koordinaten haben.

Bezeichnet nun $F'(x)$ den Differenzialkoeffizienten der Funktion $y = F(x)$ in Beziehung zu der Grösse x nach den gewöhnlichen Begriffen der Differenzialrechnung, wie wenn x eine reelle Grösse wäre, so dass also auch $F'(x)$ eine Funktion von x bleibt, so ist das vollständige Differenzial von y

$$dy = F'(x).dx = F'(x)(dr.e^{\varphi i} + ie^{\varphi i}.rd\varphi)$$
$$= F'(x)(dm + dn.i).$$

Das vollständige Differenzial von y wird also aus dem gewöhnlichen Differenzialkoeffizienten $F'(x)$ durch Multiplikation mit dem vollständigen Differenziale von x oder mit der Linie MN erhalten.

In Taf. III. Fig. 2. stellt PQ das vollständige Differenzial dy dar. In Taf. III. Fig. 1. dagegen ist PQ, wenn man dasselbe auf OA als positiv reelle Axe beziehen will, $= dx + idy$.

Der gewöhnliche Differenzialkoeffizient $F'(x)$ stellt nach Obigem immer das Verhältniss $\frac{dy}{dx}$ des vollständigen Differenzials von y zum vollständigen Differenzial von x dar. Hierdurch kann natürlich jetzt, wo es sich um komplexe Werthe von x und y handelt, nicht mehr die goniometrische Tangente des Neigungswinkels α der Linie PQ in Taf. III. Fig. 1. oder der Berührungslinie der Kurve PQ am Punkte P gegen die Axe OA dargestellt werden. Vielmehr hat man in dieser Figur, wo

$$PQ = dx + idy = dm + idn + i(dp + idq) = (dm - dq) + (dn + dp)i$$

ist,

$$\sin\alpha = dn + dp \quad \cos\alpha = dm - dq \quad \text{tang}\,\alpha = \frac{dn + dp}{dm - dq}.$$

31. Es bleiben jetzt noch die Ausdrücke von der Form $\frac{0}{0}$ zu betrachten, auf welche sich mit Hülfe der Beziehung $\frac{1}{0} = \infty$ oder $\frac{1}{\infty} = 0$ bekanntlich auch die Ausdrücke von den Formen $\frac{\infty}{\infty}$, $0 . \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞ zurückführen lassen.

Wenn der Ausdruck $\frac{0}{0}$ ganz isolirt steht, bezeichnet er eine in jeder Beziehung, also sowol nach Quantität, wie nach Richtung willkührliche Grösse.

Als Glied einer Reihe von Werthen einer in allgemeiner Gestalt gegebenen Funktion hat er jedoch einen bestimmten Werth. Ist nämlich $\frac{0}{0}$ der Spezialwerth des Ausdruckes $\frac{F(x)}{f(x)}$ für $x=a$, sodass $F(a)=0$ und $f(a)=0$ und demnach $\frac{F(a)}{f(a)}=\frac{0}{0}$ wird; so erhält man nach den Regeln der Differenzialrechnung, wenn $F'(x)$, $f'(x)$ die ersten Differenzialkoeffizienten der Funktionen $F(x)$, $f(x)$ bezeichnen, als besonderen Werth der Substitution $x=a$

$$\frac{F(a)}{f(a)}=\frac{F'(a)}{f'(a)}.$$

Würde zufällig auch $F'(a)=0$ und $f'(a)=0$, so muss man bekanntlich zu den zweiten Differenzialkoeffizienten $F''(x)$, $f''(x)$ übergehen, so dass dann

$$\frac{F(a)}{f(a)}=\frac{F'(a)}{f'(a)}=\frac{F''(a)}{f''(a)}$$

wird u. s. w.

Bei dieser Entwicklung setzt man gewöhnlich x als variabel innerhalb der Reihe der reellen Zahlen voraus. Denkt man sich jetzt aber allgemeiner, dass x durch irgend eine beliebige stetige Reihe komplexer Grössen variire, welche den Vektoren irgend einer Kurve entsprechen, und dass in dieser Reihe der Spezialwerth a (welcher ebenso gut reell wie komplex sein kann) passirt werde, so findet man ganz auf demselben Wege, auf welchem gewöhnlich das vorstehende Resultat erzielt wird, dass für den Spezialwerth $x=a$ der Bruch

$$\frac{F(x)}{f(x)}-\frac{dF(x)}{df(x)}=\frac{F'(x).dx}{f'(x).dx}=\frac{F'(x)}{f'(x)}$$

sein müsse, indem das allgemeine Differenzial von x, gleichviel ob dasselbe reell oder komplex ist, aus Zähler und Nenner verschwindet.

Wie also auch die Grösse x durch den Spezialwerth a passiren möge, immer behält der daraus entstehende Ausdruck $\frac{0}{0}$ Ein und denselben bestimmten Werth:

$$\frac{F(a)}{f(a)}=\frac{F'(a)}{f'(a)}.$$

So ist z. B. der Werth von $\frac{x^2-9x+14}{x-7}$ für $x=7$, welcher in der Form $\frac{0}{0}$ erscheint, stets $=\frac{2x-9}{1}=5$, gleichviel ob x die Reihe der reellen Zahlen 5, 6, 7, 8, 9 oder irgend eine stetige Reihe komplexer Zahlen, wovon etwa $5-\sqrt{-1}$, $6-\frac{1}{2}\sqrt{-1}$, 7, $8+\frac{1}{2}\sqrt{-1}$, $9+\sqrt{-1}$ einige Glieder sein mögen, durchläuft.

32. Nachdem man in den Stand gesetzt ist, den wahren Werth eines Ausdruckes von der Form $\frac{0}{0}$ zu bestimmen, kann man nach der Andeutung in Nr. 28. auch stets den wahren Richtungskoeffizienten der für $x=a$ gleich Null werdenden Funktion $y=F(x)$ darstellen. Diess lässt sich jedoch noch einfacher durch folgende Betrachtung bewirken.

Wird nämlich für $x=a$ die Funktion $F(x)=F(a)=0$, so geht für diesen Werth die Kurve, deren Vektoren durch y dargestellt werden, durch den Nullpunkt. Alsdann fällt aber für den nächsten Fortschritt von x auf $x+dx$ der Werth von y mit dem Differenziale dy zusammen, während für den nächsten Rückschritt von x auf $x-dx$ der Werth von y mit dem entgegengesetzten Werthe des Differenzials, also mit $-dy$ zusammenfällt. Der Richtungskoeffizient des annullirten Werthes von $y=F(a)=0$ ist also, wenn man denselben als Anfangsglied der fortschreitenden Reihe betrachtet, gleich dem von $dy=F'(x)dx$, und wenn man denselben als Endglied der rückwärts liegenden Reihe betrachtet, gleich dem von $-dy=-F'(x)dx$ für $x=a$.

So hat man für das Beispiel in Nr. 28., wo

$$y=x^2-26+(3x+42)\sqrt{-1} \quad \text{und} \quad x=2z-5\sqrt{-1}$$

war,

$$dy=(2x+3\sqrt{-1})dx \quad \text{und} \quad dx=2dz,$$

also

$$dy=2(4z-7\sqrt{-1})dz.$$

Für $x=6-5\sqrt{-1}$ oder für $z=3$ wird $y=0$. Da aber für diesen Werth $dy=2(12-7\sqrt{-1})dz$ wird, so hat jener Nullwerth denselben Richtungskoeffizienten, wie die Grösse $2(12-7\sqrt{-1})$ oder wie die Grösse $12-7\sqrt{-1}$, mithin den Richtungskoeffizienten $\frac{12}{\sqrt{193}}-\frac{7}{\sqrt{193}}\sqrt{-1}$, wie auch in Nr. 28. gefunden ist.

Würde für $x=a$ auch $dy=0$, so müsste man den Richtungskoeffizienten von $F(a)=0$ aus dem des zweiten Differenzials von y, also aus dem von d^2y bestimmen, u. s. f.

III. Stetigkeit.

33. Jede Funktion $y=F(x)$ hat die Eigenschaft, allmählich sich verändernde, d. h. nur durch unendlich kleine Differenzen unterschiedene Werthe zu liefern, wenn die Grundgrösse x in irgend einer reellen oder komplexen Zahlenreihe allmählich variirt, dergestalt also, dass bei der Variation von x der Endpunkt des Vektors y eine zusammenhängende Linie beschreibt. Ausgenommen hiervon ist nur der einzige Fall, wo für einen gewissen Werth $x=a$ die Funktion y unendlich wird.

Da x allgemein eine Funktion einer reellen Variabelen z ist, so wollen wir der Einfachheit wegen auch y sogleich als Funktion von z betrachten, indem wir annehmen, z variire allmählich in der Reihe der reellen Zahlen. Setzt man $y=p+qi$, so sind p und q reelle Funktionen von z. Da für $z+dz$ die Funktion y in $y+dy=p+dp+(q+dq)i$ übergeht und $dy=dp+dq.i$ ist, so erkennt man, dass, so lange p und q reell und endlich bleiben, für ein unendlich kleines Inkrement von z auch das Inkrement von y unendlich klein ist. Sondert man in der Funktion y die Quantität r von dem Richtungskoeffizienten ab, schreibt also $y=r(m+ni)$, so wird

$$y+dy=(r+dr)[m+dm+(n+dn)i],$$

woraus erhellet, dass, so lange p und q, also auch

$$r=\sqrt{p^2+q^2} \text{ und } m=\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}, \quad n=\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}$$

reell und endlich bleiben, sowol die Quantität, als auch die Richtung von y nur allmählich sich ändern.

Die Ausnahmen können hiernach nur in solchen Fällen gesucht werden, wo die Grösse p oder q komplex oder wo sie unendlich wird. Angenommen, p sei nur bis zur Gränze $z=c$ reell und werde dann, ohne einen unendlich grossen Werth anzunehmen, komplex $=p'+p''i$, worin p', p'' reelle Funktionen von z sind, während für den Gränzwerth $z=c$ die Grösse $p=p_1$ ist. Da offenbar p', q' der allmählichen Veränderung unterworfen sind und für $z=c$ die Funktion $p=p'=p_1$ und $p''=0$ wird, so folgt, dass, wenn z den Werth c passirt, die Grösse p

doch immer nur mit allmählicher Veränderung ihrer Quantität aus dem reellen in den komplexen Zustand übergehen kann. Was die bei diesem Uebergange erfolgende Veränderung der Richtung der Grösse p betrifft, so wird dieselbe ebenfalls in allen den Fällen eine allmähliche sein, wo der Spezialwerth p_1 von p für $z=c$ nicht gleich null wird. Wäre dieser Werth aber gleich null, so würde p seine reelle Richtung plötzlich in die der komplexen Grösse $dp'+dp''.i$ angehörige Richtung verwandeln. Eine solche plötzliche Richtungsveränderung von p hat jedoch, da sie mit einer vollständigen Annullirung von p verbunden ist (indem nun für $z=c$ gleichzeitig $p'=0$, $p''=0$, also $p=0$ wird), erst dann eine plötzliche Veränderung der Richtung der Gesammtfunktion $y=p+qi$ zur Folge, wenn für den Gränzwerth $z=c$ gleichzeitig auch q gleich null wird.

Immerhin wird, selbst in dem letzteren Falle, wo die Grösse p oder die Grösse q für $z=c$ anfangen komplex zu werden, gleichzeitig aber beide Grössen durch den Nullwerth gehen, der Zusammenhang der Werthe der Funktion y nicht zerrissen sein, da für $p=0$, $q=0$ die ganze Quantität von y null wird und alsdann die plötzliche Richtungsveränderung jenen Zusammenhang nicht stört.

Hiernach bleibt nur noch der Fall zu betrachten, wo p oder q, also die Quantität r von y für $z=c$ unendlich gross würde. In diesem Falle, wo der Nenner von p oder q den Nullwerth passirt, wird im Allgemeinen auch eine plötzliche Richtungsveränderung von p oder q, also auch von y eintreten und der Zusammenhang der Werthe von y vernichtet sein. Auch wenn keine Richtungsveränderung eintritt, kann man den Zusammenhang als getrennt betrachten, sobald y für $z=c$ einen unendlich grossen Werth annimmt.

34. Obgleich nach Vorstehendem eine allmähliche Veränderung der Funktion $y=p+qi=r(m+ni)$ immer besteht, wenn auch p oder q komplex werden, so nimmt doch, wenn der letztere Fall eintritt, sofort sowol der Ausdruck r für die Quantität, als auch der Ausdruck $m+ni$ für den Richtungskoeffizienten eine andere Form an; die Funktion y ändert also ihre Konstitution oder ihren Charakter, indem die Trennung in Quantität und Richtungskoeffizienten in anderer Weise geschehen muss.

Dieser Umstand hat auch zur Folge, dass für den Gränzwerth $z=c$, für welchen er eintritt, die sonst zusammenhängende Reihe der Werthe des Differenzials dy eine plötzliche Unterbrechung erleidet, indem jedenfalls die Richtung von

dy sich abrupt ändert, dergestalt, dass die durch die Endpunkte der Vektoren y gebildete Linie für $z=c$ eine scharfe Ecke oder einen Knick erhält.

Die wahre Bedingung für die Stetigkeit einer Funktion muss nun darin gestellt werden, dass die Funktion solche plötzliche Störungen in ihrem Charakter oder in dem durch sie repräsentirten Gesetze nicht erleide, dass also für keinen endlichen Werth $z=c$ die Grösse p oder q komplex oder unendlich werde. Von einer solchen Funktion wird dann auch der erste Differenzialkoeffizient und demgemäss auch der zweite und überhaupt jeder höhere Differenzialkoeffizient eine stetige Funktion darstellen. Die durch die Endpunkte der Vektoren y gebildete, im Allgemeinen krumme Linie wird mithin nicht bloss eine überall zusammenhängende, sondern auch eine solche sein, deren Richtung sich nur allmählich ändert, welche also nirgends einen Knick enthält.

Für das Differenzial von y hat man nämlich den Ausdruck $dy = dp + dq.i$. Bleibt nun p und q stets reell, so muss offenbar auch dp und dq stets reell, das Differenzial dy also stetig variabel bleiben. Denn da der benachbarte Werth von p gleich $p+dp$ ist, so muss, wenn p und $p+dp$ reell sein sollen, auch dp reell sein, was auch für dq gilt.

Wird dagegen von $z=c$ an p komplex, so muss, da dann p reell und $p+dp$ komplex ist, dp komplex werden, was eventuell auch von dq gilt. Wenn nun auch die Quantität des Differenzials von y, welche durch $\sqrt{dp^2+dq^2}$ dargestellt ist, bei dem Komplexwerden von dp oder dq, als unendlich kleine Grösse, welche bei genugsamer Verkleinerung von dz bis auf den Nullwerth gebracht werden kann, nur allmählich sich ändert, so wird im Allgemeinen für diesen Fall doch der Richtungskoeffizient des Differenzials dy, welcher durch

$$\frac{dp}{\sqrt{dp^2+dq^2}} + \frac{dq}{\sqrt{dp^2+dq^2}}\, i$$

dargestellt ist, einen plötzlichen Sprung machen, weil das Verhältniss $\frac{dp}{dq}$ es thun wird.

35. Zur Erläuterung der beiden vorstehenden Nummern mögen folgende Beispiele dienen, in welchen die Funktion y immer in ihre Quantität und ihren Richtungskoeffizienten getrennt, also in die Form $r(m+ni)$ gebracht ist.

a) Die Funktion $y=\sqrt{3-z}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1}\right)$ wechselt auf der Gränze $z=3$ ihren Charakter, indem von da an p und q imaginär werden würden. Jenseit dieser Gränze ist dieselbe in die Form $y'=\sqrt{z-3}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1}\right)$ zu bringen. Die Quantität von y schreitet für $z=3$ allmählich durch den Nullwerth; der Richtungskoeffizient wechselt aber plötzlich, indem sich der Drehungswinkel um 90 Grad ändert. Der Differenzialkoeffizient

$$\frac{dy}{dz}=\frac{1}{2\sqrt{3-z}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1}\right)$$

wird für $z=3$ unendlich, und da für höhere Werthe von z die Grösse $\sqrt{3-z}$ imaginär wird, so ändert sich mit $z=3$ plötzlich seine Form in

$$\frac{1}{2\sqrt{z-3}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1}\right),$$

also auch seine Richtung. Man erkennt, dass durch die Endpunkte der Vektoren y bis zum Gränzwerthe $z=3$ die um 45 Grad gegen die positiv reelle Axe OA geneigte gerade Linie MO (Taf. III. Fig. 3.) und dass über jenen Gränzwerth hinaus durch die Endpunkte der Vektoren y' die unter dem Winkel von 135 Grad geneigte gerade Linie ON dargestellt wird, dass also die gegebene Funktion, welche für $z=3$ ihren Charakter ändert, den gebrochenen Linienzug MON in der durch die Pfeile angedeuteten, einen fortwährenden Zusammenhang bekundenden Fortschrittsrichtung repräsentirt. Hierbei ist die Wurzelgrösse stets als positiv gedacht; nimmt man sie negativ, so kommen die Verlängerungen der Linien MO, ON zur Erscheinung.

b) Die Funktion $y=\frac{1}{\sqrt{3-z}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1}\right)$ wechselt für $z=3$ ihre Form in $y'=\frac{1}{\sqrt{z-3}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1}\right)$. Für den Gränzwerth $z=3$ wird ihre Quantität unendlich, während ihre Richtung um -90 Grad sich ändert. Der Zusammenhang des durch die Endpunkte von y dargestellten Linienzuges wird also für $z=3$ zerrissen. Während nämlich in Taf. III. Fig. 4. für wachsende z die Funktion y die Gerade OM in der durch den Pfeil angedeuteten Fortschrittsrichtung darstellt, ergibt jenseit der Gränze $z=3$ die Funktion y' für ebenfalls wachsende z die Gerade NO in der durch den Pfeil bezeichneten Richtung,

in welcher sie mit dem ersten Zweige OM in keinem Zusammenhange steht.

c) Die Funktion $y=(2+\sqrt{3-z})\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1}\right)$ ändert für $z=3$ ihren Charakter und nimmt für grössere Werthe eine Form an, welche sich durch folgende Rechnung ergibt:

$$y'=(2+\sqrt{z-3}\sqrt{-1})\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1}\right)$$

$$=\sqrt{4+z-3}\left(\frac{2}{\sqrt{4+z-3}}+\frac{\sqrt{z-3}}{\sqrt{4+z-3}}\sqrt{-1}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1}\right)$$

$$=\sqrt{z+1}\left(\frac{2-\sqrt{z-3}}{\sqrt{2(z+1)}}+\frac{2+\sqrt{z-3}}{\sqrt{2(z+1)}}\sqrt{-1}\right).$$

Bei diesem Uebergange erleidet zwar die **Quantität** und auch die **Richtung** nur eine allmähliche Veränderung. Der **Differenzialkoeffizient**, welcher gleich dem von q aus dem Beispiele a) ist, wechselt **plötzlich** seine Richtung, wesshalb sich für $z=3$ ein **Knick** in dem fraglichen Linienzuge ergibt. Dieser Linienzug ist der durch Taf. III. Fig. 3. dargestellte, wenn man die scharfe Ecke in den durch $2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1}\right)$ dargestellten Punkt transportirt.

d) Die Funktion $y=r\left(\frac{1}{\sqrt{4-z}}+\frac{\sqrt{3-z}}{\sqrt{4-z}}\sqrt{-1}\right)$ ändert ihren Charakter von dem Werthe $z=3$ an, für welchen $y=r$ wird, während sie für grössere Werthe y in der Form

$$y'=r\left(\frac{1-\sqrt{z-3}}{\sqrt{4-z}}\right)$$

ganz reell bleibt. Für den Werth $z=4$, für welchen $y'=\frac{0}{0}=0$ wird, tritt abermals ein Wechsel des Charakters ein, indem für höhere Werthe y' rein imaginär wird und die Form

$$y''=r\left(\frac{\sqrt{z-3}-1}{\sqrt{z-4}}\right)\sqrt{-1}$$

annimmt.

Der Linienzug, dessen Vektoren die Werthe der gegebenen Funktion darstellen, ist der Umfang des Quadranten MNO (Taf. III. Fig. 5.) vom Radius r. Indem y von $z=-\infty$ bis $z=3$ dem Kreis-

bogen MN, ferner y' von $z=3$ bis $z=4$ den Radius NO und y'' von $z=4$ bis $z=\infty$ den Radius OM ergibt.

e) Die gewöhnliche Gleichung des Kreises ist

$$y=z+\sqrt{r^2-z^2}\sqrt{-1},$$

worin nach den gewöhnlichen Prinzipien der analytischen Geometrie z die Abscisse und $\sqrt{r^2-x^2}$ die rechtwinklige Ordinate bezeichnet. Trennt man darin die Quantität vom Richtungskoeffizienten, so nimmt diese Gleichung die Form $y=r\left(\frac{z}{r}+\frac{\sqrt{r^2-z^2}}{r}\sqrt{-1}\right)$ an. Von $z=r$ an aufwärts und von $z=-r$ an abwärts ändert die Gleichung ihren Charakter und man erhält dafür den reellen Ausdruck $y'=z-\sqrt{z^2-r^2}$. Hieraus folgt, dass y von $z=-r$ bis $z=+r$ den oberen Halbkreis MNP (Taf. III. Fig. 6.), dagegen y' von $z=r$ bis $z=\infty$ den Radius PO und von $z=-r$ bis $z=-\infty$ die unendliche Verlängerung MO des Radius OM darstellt. Nimmt man die Wurzelgrösse negativ, so stellt die Funktion in ähnlicher Weise den unteren Halbkreis und die Linie MO und PA dar.

36. Bei der gewöhnlichen Behandlung des Minuszeichens kommt man, wie weiter oben schon mehrfach gezeigt ist, leicht in die Lage, eine Funktion als identisch mit einer anderen anzusehen, von welcher sie in der That sehr verschieden ist, indem man die Ungleichheit der ganzen Umwälzungen, welche gewisse Grössen in beiden Funktionen machen müssen, um das beabsichtigte Resultat zu erzielen, unbeachtet lässt und demzufolge unvermerkt einen reellen Ausdruck mit einem komplexen verwechselt.

Bei der genauen Berücksichtigung aller Umstände nach dem ersten Abschnitte dieser Abhandlung wird man sich immer vor derartigen Irrthümern schützen können. Ein ferneres Beispiel zur Erläuterung dürfte indessen nicht unnütz sein.

Für die gewöhnlichen Koordinaten der analytischen Geometrie stellt $y=\sqrt[3]{x^2}$ die Gleichung der Neil'schen Parabel dar. Da y für x und $-x$ denselben Werth darzustellen scheint, so nimmt man an, die beiden kongruenten Schenkel OM, ON (Taf. III. Fig. 7.) seien das Resultat derselben eben genannten Funktion, indem man darin x stetig von $-\infty$ durch 0 bis $+\infty$ variiren lasse.

Bei allgemeinerer Auffassung und wenn man alle Grössen auf

Ein und dieselbe reelle Axe OA bezieht, müsste man der Gleichung dieser Kurve die Gestalt

$$r = x + y\sqrt{-1} = x + \sqrt[3]{x^2}\sqrt{-1}$$

geben, und es müsste, wenn beide Schenkel MO, ON durch diese Funktion dargestellt sein sollten, $\sqrt[3]{x^2}$ sowol für positive, wie für negative x reell bleiben. Die hierin liegende Täuschung erkennt man, wenn man beachtet, dass in der Funktion $\sqrt[3]{x^2}$, wenn sie stets dieselbe bleiben soll, die Grösse x immer nur mit derselben Zahl von Umwälzungen, also entweder mit gar keiner, oder mit Einer, oder mit zwei Umwälzungen, d. h. entweder als xe^{0i}, oder als $xe^{2\pi i}$, oder als $xe^{4\pi i}$ u. s. w. gedacht werden darf. Jenachdem man die erste, zweite, dritte Annahme macht, ist dann aber auch $-x$ oder $xe^{\pi i}$ resp. gleich $xe^{\pi i}$, oder gleich $xe^{3\pi i}$, oder gleich $xe^{5\pi i}$ u. s. w. zu setzen. Hierdurch ergeben sich folgende zusammengehörige Werthe.

Für keine Umwälzung von x:

$$x = xe^{0i}, \qquad y = x^{\frac{2}{3}}e^{0i} = \sqrt[3]{x^2},$$

$$-x = xe^{\pi i}, \qquad y = x^{\frac{2}{3}}e^{\frac{2}{3}\pi i} = \sqrt[3]{x^2}\left(-\tfrac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1}\right);$$

für eine Umwälzung von x:

$$x = xe^{2\pi i}, \qquad y = x^{\frac{2}{3}}e^{\frac{4}{3}\pi i} = \sqrt[3]{x^2}\left(-\tfrac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1}\right),$$

$$-x = x^{3\pi i}, \qquad y = x^{\frac{2}{3}}e^{2\pi i} = \sqrt[3]{x^2};$$

für zwei Umwälzungen von x:

$$x = xe^{4\pi i}, \qquad y = x^{\frac{2}{3}}e^{\frac{8}{3}\pi i} = \sqrt[3]{x^2}\left(-\tfrac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1}\right),$$

$$-x = xe^{5\pi i}, \qquad y = x^{\frac{2}{3}}e^{\frac{10}{3}\pi i} = \sqrt[3]{x^2}\left(-\tfrac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1}\right).$$

Die Funktion, welche für positive x den Schenkel ON erzeugt, liefert also für negative x keineswegs den Schenkel OM, sondern eine ganz andere Kurve, deren Ordinate y nicht mehr reell, sondern komplex ist. Die Funktion dagegen, welche für negative x den Schenkel OM ergibt, stellt für positive x eine ganz andere Kurve mit komplexer Ordinate dar, und überhaupt kann aus $\sqrt[3]{x^2}$ für negative x nur dann ein reeller Werth

hervorgehen, wenn man sich x als mit 1 oder 4 oder 7 oder 10 u. s. w. ganzen Umwälzungen behaftet denkt.

37. Ohne Berücksichtigung der geometrischen Bedeutung der imaginären Grössen und der Regeln des ersten Abschnittes kann das Wesen einer Funktion ganz unverständlich werden.

Ein Beispiel hierzu liefert die Funktion x^x. Für negative Werthe von x nimmt dieselbe die Form $y=(-x)^{-x}=\frac{1}{(-x)^x}$ an. Lässt man jetzt x stetig von 0 bis ∞ variiren, so würde diess nach der gewöhnlichen Auffassung für y immer nur dann einen brauchbaren, nämlich reellen Werth liefern, sobald x einen Bruch mit unpaarem Nenner darstellt. Wäre dagegen dieser Nenner paar, so würde y einen unbrauchbaren, nämlich imaginären Werth annehmen. Für die irrationalen Werthe von x wüsste man aber nicht, ob dieselben als Zahlen mit paarem oder mit unpaarem Nenner anzusehen sein, ob dieselben also einen möglichen oder einen unmöglichen Werth von y lieferten.

Die durch die Vektoren y dargestellte positiv reelle Axe oder die nach gewöhnlichen Prinzipien mittelst rechtwinkliger Koordinaten durch die Gleichung $y=\frac{1}{(-x)^x}$ dargestellte Kurve würde hiernach nicht wie ein zusammenhängender, sondern wie ein punktirter Linienzug erscheinen.

Ganz anders und verständlicher gestaltet sich das Wesen der gegebenen Funktion bei allgemeinerer Auffassung der algebraischen Grössen.

Denn setzt man $-x=xe^{\pi i}$, so ergibt sich

$$y=(-x)^{-x}=\frac{1}{x^x}e^{-x\pi i}=\frac{1}{x^x}\,[\cos(-x\pi)+\sin(-x\pi)\sqrt{-1}].$$

Hiernach stellt ganz einfach y einen Vektor dar, dessen Länge $\frac{1}{x^x}$ und dessen Drehungswinkel $-x\pi$ ist. Die Endpunkte aller dieser Vektoren bilden eine Kurve MN (Taf. III. Fig. 8.), für welche man gleichzeitig $x=0$, $y=\infty e^{0i}=+\infty$ und $x=\infty$, $y=0e^{-\infty i}$ hat, also eine Kurve, an deren einer Seite die Axe OA Asymptote ist und deren andere Seite sich in unendlichen Windungen um den Nullpunkt schlingt.

38. Manche Kriterien, welche man für die Stetigkeit einer

Funktion aufgestellt findet, und wobei ausserdem nur an den speziellen Fall reeller Funktionen gedacht ist, erweisen sich als unzugänglich.

Wenn z. B. gesagt wird, die Funktion $y = F(x)$ bleibe an der Stelle $x = \xi$ kontinuirlich oder erleide daselbst eine Unterbrechung der Stetigkeit, jenachdem die Differenz

$$F(\xi + \delta) - F(\xi - \varepsilon)$$

mit δ und ε gleichzeitig verschwinde oder nicht, dergestalt, dass für gewöhnliche rechtwinklige Koordinaten die Gleichung $y = F(x)$ für $x = \xi = OR$ (Taf. III. Fig. 9.) zwei verschiedene Werthe RN und RP liefere, von welchen der eine RN das Endglied der rückwärtsliegenden, den Abscissen $\xi - \varepsilon$ entsprechenden Reihe, der andere RP dagegen das Anfangsglied der vorwärtsliegenden, den Abscissen $\xi + \delta$ entsprechenden Reihe sei, so erkennt man nach dem Früheren leicht, dass bei dieser Definition zwischen Zusammenhang und wahrer Stetigkeit nicht unterschieden ist, indem hiernach auch ein eckiger Zug, wenn er nur nicht zerrissen wäre, als ein stetiger erscheinen könnte, ferner dass zerrissene Züge wie die in Taf. III. Fig. 9. fingirten MN und PQ durch ein und dieselbe Funktion bei stetiger Variation von x überhaupt gar nicht dargestellt werden können, dass auch eine Funktion für gewisse Werthe von x nicht eine grössere Anzahl von Werthen liefern kann, als für andere.

Der Werth $F(\xi + \delta)$ kann von dem Werthe $F(\xi - \varepsilon)$ für verschwindende δ und ε nur in dem einzigen Falle verschieden sein, wo beide unendlich gross werden, und diess ist der einzige Fall, in welchem nach No. 33. der Zusammenhang der Werthe der Funktion y aufgehoben wird. In jedem anderen Falle sind beide Werthe gleich. Wären sie gleich null, so könnten zwar ihre Richtungen verschieden sein; da aber ihre Quantität gleich null ist, so liefert diess doch noch keine Trennung. Ueber eigentliche Stetigkeit sagt also die Gleichheit der gedachten beiden Werthe gar nichts aus, diese Gleichheit besteht vielmehr auch bei nicht stetigen Funktionen, z. B. bei der Funktion $\sqrt{1-x}$ für $x = 1$, wo dieselbe imaginär wird und eine scharfe Ecke zeigt, wogegen doch $F(\xi + \delta) = \sqrt{1-(1+\delta)} = \sqrt{-\delta}$ und $F(\xi - \varepsilon) = \sqrt{1-(1-\varepsilon)} = \sqrt{\varepsilon}$ für $\delta = 0$ und $\varepsilon = 0$ beide einander gleich werden.

39. Es versteht sich von selbst, dass man durch besondere Festsetzungen aus einer stetigen Reihe von Grössen

gewisse Werthe von der augenblicklichen Betrachtung ausschliessen kann. Hierdurch kann man künstlich die Stetigkeit einer Funktion beschränken, ohne jedoch die in ihrem wahren Wesen liegende natürliche Stetigkeit im mindesten zu ändern.

So kann man sich z. B. vornehmen, nur die reellen Werthe einer Funktion in's Auge zu fassen, wie es die gewöhnlichen Lehrbücher der analytischen Geometrie thun. Durch eine solche, auf Willkür beruhende Ausschliessung der imaginären Werthe kann eine Funktion von einem gewissen Werthe ihrer Grundgrösse an plötzlich aufhören, Werthe zu liefern, wie z. B. die Funktion $+\sqrt{r^2-x^2}$ von $x=r$ an.

Wenn man will, kann man die so abgebrochene Reihe der Werthe einer Funktion mit einer anderen Reihe von Werthen in Verbindung setzen, welche diese Funktion liefert, wenn man ihre Vieldeutigkeit berücksichtigt, also die Reihe der Werthe von $+\sqrt{r^2-x^2}$ für $x=-r$ bis $x=+r$ mit der Reihe der Werthe von $-\sqrt{r^2-x^2}$ für $x=+r$ bis $x=-r$, durch welches Verfahren sogar ein Linienzug, nämlich der obere Halbkreis, mit einem anderen Linienzuge, dem unteren Halbkreise, in eine stetige Verbindung gebracht werden kann.

Durch eine derartige Ausschliessung der imaginären Werthe kann auch ein Linienzug wie der in No. 37. in eine diskontinuirliche Reihe von Punkten verwandelt werden.

Noch weiter wird die künstliche Beschränkung in der Variation der Funktionen durch diejenigen Untersuchungen getrieben, welche den gewöhnlichen Gegenstand der unbestimmten Analytik oder der Theorie der Zahlen ausmachen, indem man hier nicht bloss die imaginären, sondern von den reellen auch noch die irrationalen oder die gebrochenen Werthe ausschliesst und sein Augenmerk lediglich auf die rationalen oder gar nur auf die ganzen Werthe richtet.

Solche Untersuchungen sind offenbar zulässig und zu gewissen Zwecken sogar sehr nützlich; man darf aber darüber nicht die allgemeine Natur der Funktionen vergessen und eine willkürliche Bedingung, wodurch diese Allgemeinheit beschränkt wird, unvermerkt als ein im Wesen der Funktionen liegendes Gesetz betrachten.

VIII.

Allgemeine Theorie der Krümmung der Flächen für jedes beliebige rechtwinklige Coordinatensystem.

Von
dem Herausgeber.

In einer früheren Abhandlung habe ich die Theorie der Krümmung des allgemeinen dreiaxigen Ellipsoids nach einer besonderen Methode entwickelt, und dort zugleich bemerkt, dass die gewöhnliche Darstellung der allgemeinen Theorie der Krümmung der Flächen überhaupt nicht sehr geeignet sei, um von derselben mit Leichtigkeit Anwendungen auf besondere Arten der Flächen zu machen, weil dabei meistens eine grössere Anzahl von Transformationen der Coordinaten in Anspruch genommen werde, wenn auch in dieser Beziehung namentlich in dem bekannten Werke von **Moigno** allerdings schon einiges Verdienstliche geleistet worden sei. Ich werde daher nach einer ganz ähnlichen Methode wie die, durch welche ich in der vorher erwähnten früheren Abhandlung, wie ich glaube, zu manchen sehr bemerkenswerthen Resultaten in Betreff des allgemeinen dreiaxigen Ellipsoids gelangt bin, in der vorliegenden Abhandlung die Theorie der Krümmung der Flächen ganz im Allgemeinen in einer solchen Weise entwickeln, dass die aus dieser Entwickelung sich ergebenden Formeln ohne irgend welche Transformation der Coordinaten eine unmittelbare Anwendung auf alle besonderen Arten der Flächen gestatten. Die Gewinnung solcher ganz allgemeinen Formeln ist das Hauptziel, welches diese Abhandlung zu erreichen sucht, so dass ich mich also in derselben auf die Entwickelung mancher allerdings sehr interessanten, aber meistens schon bekannten Re-

lationen zwischen den Krümmungshalbmessern verschiedener ebener Schnitte der Flächen ausführlicher nicht einlassen werde.

I.

Indem wir immer bloss rechtwinklige Coordinaten zu Grunde legen und die veränderlichen oder laufenden Coordinaten durch X, Y, Z bezeichnen, sei

$$f(X, Y, Z) = 0$$

im Allgemeinen die Gleichung der gegebenen krummen Fläche. Ein beliebiger, aber bestimmter Punkt dieser krummen Fläche sei (xyz), so dass also auch

$$f(x, y, z) = 0$$

ist; wenn aber $f(x, y, z)$ im Allgemeinen als eine Function dreier veränderlicher Grössen betrachtet wird, so soll im Folgenden

$$u = f(x, y, z)$$

gesetzt werden. Alle im Folgenden vorkommenden Differentialquotienten von u sind partielle Differentialquotienten.

Die Gleichung der Berührungsebene der krummen Fläche in dem Punkte (xyz) ist nach den allgemeinen Lehren der analytischen Geometrie:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial u}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial u}{\partial z}(Z-z)=0.$$

Die Gleichung einer beliebigen durch den Punkt (xyz) gelegten Ebene sei

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0.$$

Dann sind die Gleichungen der Berührenden der Curve, in welcher die Fläche von dieser Ebene geschnitten wird, in dem Punkte (xyz) dieser Curve:

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial u}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial u}{\partial z}(Z-z)=0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt, wenn G einen gewissen Factor bezeichnet:

$$X-x=G(B\frac{\partial u}{\partial z}-C\frac{\partial u}{\partial y}),$$

$$Y-y=G(C\frac{\partial u}{\partial x}-A\frac{\partial u}{\partial z}),$$

$$Z-z=G(A\frac{\partial u}{\partial y}-B\frac{\partial u}{\partial x});$$

also sind

$$\frac{X-x}{B\frac{\partial u}{\partial z}-C\frac{\partial u}{\partial y}}=\frac{Y-y}{C\frac{\partial u}{\partial x}-A\frac{\partial u}{\partial z}}=\frac{Z-z}{A\frac{\partial u}{\partial y}-B\frac{\partial u}{\partial x}}$$

die Gleichungen der in Rede stehenden Berührenden, wobei wir gleich bemerken wollen, dass wir die Curve, in welcher die durch die Gleichung

$$f(X,\,Y,\,Z)=0$$

charakterisirte Fläche von der durch die Gleichung

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0$$

charakterisirten Ebene geschnitten wird, im Folgenden der Kürze wegen überhaupt den Schnitt nennen werden.

Ist nun

$$A'(X-x)+B'(Y-y)+C'(Z-z)=0$$

die Gleichung der Normalebene des Schnitts in dem Punkte (xyz), so ist nach den Lehren der analytischen Geometrie:

$$\frac{A'}{B\frac{\partial u}{\partial z}-C\frac{\partial u}{\partial y}}=\frac{B'}{C\frac{\partial u}{\partial x}-A\frac{\partial u}{\partial z}}=\frac{C'}{A\frac{\partial u}{\partial y}-B\frac{\partial u}{\partial x}},$$

und folglich

$$(B\frac{\partial u}{\partial z}-C\frac{\partial u}{\partial y})(X-x)+(C\frac{\partial u}{\partial x}-A\frac{\partial u}{\partial z})(Y-y)+(A\frac{\partial u}{\partial y}-B\frac{\partial u}{\partial x})(Z-z)=0$$

die Gleichung der Normalebene des Schnitts in dem Punkte (xyz) desselben.

Also sind

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0,$$

$$(B\frac{\partial u}{\partial z}-C\frac{\partial u}{\partial y})(X-x)+(C\frac{\partial u}{\partial x}-A\frac{\partial u}{\partial z})(Y-y)+(A\frac{\partial u}{\partial y}-B\frac{\partial u}{\partial x})(Z-z)=0$$

die Gleichungen der Normale des Schnitts in dem Punkte (xyz).

Aus diesen beiden Gleichungen folgt, wenn G' wieder einen gewissen Factor bezeichnet:

$$X-x=G'\{B(A\frac{\partial u}{\partial y}-B\frac{\partial u}{\partial x})-C(C\frac{\partial u}{\partial x}-A\frac{\partial u}{\partial z})\},$$

$$Y-y=G'\{C(B\frac{\partial u}{\partial z}-C\frac{\partial u}{\partial y})-A(A\frac{\partial u}{\partial y}-B\frac{\partial u}{\partial x})\},$$

$$Z-z=G'\{A(C\frac{\partial u}{\partial x}-A\frac{\partial u}{\partial z})-B(B\frac{\partial u}{\partial z}-C\frac{\partial u}{\partial y})\};$$

oder:

$$X-x=G'\{A(A\frac{\partial u}{\partial x}+B\frac{\partial u}{\partial y}+C\frac{\partial u}{\partial z})-(A^2+B^2+C^2)\frac{\partial u}{\partial x}\},$$

$$Y-y=G'\{B(A\frac{\partial u}{\partial x}+B\frac{\partial u}{\partial y}+C\frac{\partial u}{\partial z})-(A^2+B^2+C^2)\frac{\partial u}{\partial y}\},$$

$$Z-z=G'\{C(A\frac{\partial u}{\partial x}+B\frac{\partial u}{\partial y}+C\frac{\partial u}{\partial z})-(A^2+B^2+C^2)\frac{\partial u}{\partial z}\};$$

so dass also

$$\frac{X-x}{A(A\frac{\partial u}{\partial x}+B\frac{\partial u}{\partial y}+C\frac{\partial u}{\partial z})-(A^2+B^2+C^2)\frac{\partial u}{\partial x}}$$

$$=\frac{Y-y}{B(A\frac{\partial u}{\partial x}+B\frac{\partial u}{\partial y}+C\frac{\partial u}{\partial z})-(A^2+B^2+C^2)\frac{\partial u}{\partial y}}$$

$$=\frac{Z-z}{C(A\frac{\partial u}{\partial x}+B\frac{\partial u}{\partial y}+C\frac{\partial u}{\partial z})-(A^2+B^2+C^2)\frac{\partial u}{\partial z}}$$

die Gleichungen der Normale des Schnitts in dem Punkte (xyz) desselben sind.

Für einen zweiten Punkt $(x_1y_1z_1)$ des Schnitts, wo also

$$f(x_1, y_1, z_1)=0, \quad u_1=f(x_1, y_1, z_1)$$

und

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$$

ist, sind die Gleichungen der Normale des Schnitts eben so:

$$\frac{X-x_1}{A(A\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+B\frac{\partial u_1}{\partial y_1}+C\frac{\partial u_1}{\partial z_1})-(A^2+B^2+C^2)\frac{\partial u_1}{\partial x_1}}$$

$$=\frac{Y-y_1}{B(A\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+B\frac{\partial u_1}{\partial y_1}+C\frac{\partial u_1}{\partial z_1})-(A^2+B^2+C^2)\frac{\partial u_1}{\partial y_1}}$$

$$=\frac{Z-z_1}{C(A\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+B\frac{\partial u_1}{\partial y_1}+C\frac{\partial u_1}{\partial z_1})-(A^2+B^2+C^2)\frac{\partial u_1}{\partial z_1}}.$$

Setzen wir also der Kürze wegen

$$U=A(A\frac{\partial u}{\partial x}+B\frac{\partial u}{\partial y}+C\frac{\partial u}{\partial z})-(A^2+B^2+C^2)\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$V=B(A\frac{\partial u}{\partial x}+B\frac{\partial u}{\partial y}+C\frac{\partial u}{\partial z})-(A^2+B^2+C^2)\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$W=C(A\frac{\partial u}{\partial x}+B\frac{\partial u}{\partial y}+C\frac{\partial u}{\partial z})-(A^2+B^2+C^2)\frac{\partial u}{\partial z}$$

und

$$U_1=A(A\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+B\frac{\partial u_1}{\partial y_1}+C\frac{\partial u_1}{\partial z_1})-(A^2+B^2+C^2)\frac{\partial u_1}{\partial x_1},$$

$$V_1=B(A\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+B\frac{\partial u_1}{\partial y_1}+C\frac{\partial u_1}{\partial z_1})-(A^2+B^2+C^2)\frac{\partial u_1}{\partial y_1},$$

$$W_1=C(A\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+B\frac{\partial u_1}{\partial y_1}+C\frac{\partial u_1}{\partial z_1})-(A^2+B^2+C^2)\frac{\partial u_1}{\partial z_1};$$

so sind die Gleichungen der beiden Normalen des Schnitts in den Punkten (xyz) und $(x_1y_1z_1)$:

$$\frac{X-x}{U}=\frac{Y-y}{V}=\frac{Z-z}{W},$$

$$\frac{X-x-(x_1-x)}{U_1}=\frac{Y-y-(y_1-y)}{V_1}=\frac{Z-z-(z_1-z)}{W_1}.$$

Aus diesen Gleichungen erhält man, wenn X, Y, Z die Coordinaten des Durchschnittspunkts der beiden Normalen bezeichnen:

$$\frac{X-x}{U}=\frac{Y-y}{V}=\frac{Z-z}{W}=\frac{V_1(x_1-x)-U_1(y_1-y)}{UV_1-VU_1},$$

oder, wie man nach einer leichten Transformation des Bruchs auf der rechten Seite sogleich findet:

$$\frac{X-x}{U}=\frac{Y-y}{V}=\frac{Z-z}{W}=\frac{V-U\frac{y_1-y}{x_1-x}+(V_1-V)-(U_1-U)\frac{y_1-y}{x_1-x}}{U\frac{V_1-V}{x_1-x}-V\frac{U_1-U}{x_1-x}}.$$

Nach dem Taylor'schen Lehrsatze ist

$$u_1-u=\frac{\partial u}{\partial x}(x_1-x)+\frac{\partial u}{\partial y}(y_1-y)+\frac{\partial u}{\partial z}(z_1-z_1)+\mathrm{R},$$

wo R eine Grösse bezeichnet, die in Bezug auf die Grössen x_1-x, y_1-y, z_1-z von der zweiten Ordnung ist. Weil aber $u_1-u=0$ ist, so haben wir die beiden folgenden Gleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_1-x)+\frac{\partial u}{\partial y}(y_1-y)+\frac{\partial u}{\partial z}(z_1-z)=-\mathrm{R},$$

$$A(x_1-x)+B(y_1-y)+C(z_1-z)=0;$$

oder:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{y_1-y}{x_1-x}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{z_1-z}{x_1-x}=-\frac{\mathrm{R}}{x_1-x},$$

$$A+B\frac{y_1-y}{x_1-x}+C\frac{z_1-z}{x_1-x}=0;$$

aus denen sich leicht:

$$\frac{y_1-y}{x_1-x}=\frac{C\frac{\partial u}{\partial x}-A\frac{\partial u}{\partial z}}{B\frac{\partial u}{\partial z}-C\frac{\partial u}{\partial y}}+\frac{\frac{C\mathrm{R}}{x_1-x}}{B\frac{\partial u}{\partial z}-C\frac{\partial u}{\partial y}},$$

$$\frac{z_1-z}{x_1-x}=\frac{A\frac{\partial u}{\partial y}-B\frac{\partial u}{\partial x}}{B\frac{\partial u}{\partial z}-C\frac{\partial u}{\partial y}}-\frac{\frac{B\mathrm{R}}{x_1-x}}{B\frac{\partial u}{\partial z}-C\frac{\partial u}{\partial y}}$$

ergiebt. Weil R in Bezug auf x_1-x, y_1-y, z_1-z von der zweiten Ordnung ist, so nähern

$$\frac{B\mathrm{R}}{x_1-x},\quad\frac{C\mathrm{R}}{x_1-x}$$

sich offenbar der Null, wenn x_1-x sich der Null nähert; also ist, immer unter der Voraussetzung, dass x_1-x sich der Null nähert:

$$\operatorname{Lim}\frac{y_1-y}{x_1-x}=\frac{C\frac{\partial u}{\partial x}-A\frac{\partial u}{\partial z}}{B\frac{\partial u}{\partial z}-C\frac{\partial u}{\partial y}},\quad \operatorname{Lim}\frac{z_1-z}{x_1-x}=\frac{A\frac{\partial u}{\partial y}-B\frac{\partial u}{\partial x}}{B\frac{\partial u}{\partial z}-C\frac{\partial u}{\partial y}}.$$

Ferner ist nach dem Obigen:

$$\begin{aligned}U_1-U=A\{&A\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-\frac{\partial u}{\partial x}\right)+B\left(\frac{\partial u_1}{\partial y_1}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)+C\left(\frac{\partial u_1}{\partial z_1}-\frac{\partial u}{\partial z}\right)\}\\ &-(A^2+B^2+C^2)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-\frac{\partial u}{\partial x}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V_1-V=B\{&A\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-\frac{\partial u}{\partial x}\right)+B\left(\frac{\partial u_1}{\partial y_1}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)+C\left(\frac{\partial u_1}{\partial z_1}-\frac{\partial u}{\partial z}\right)\}\\ &-(A^2+B^2+C^2)\left(\frac{\partial u_1}{\partial y_1}-\frac{\partial u}{\partial y}\right).\end{aligned}$$

Nach dem Taylor'schen Lehrsatze ist nun

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_1-x)+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(y_1-y)+\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}(z_1-z)+\mathrm{R}',$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial y_1}-\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(x_1-x)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(y_1-y)+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}(z_1-z)+\mathrm{R}'',$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial z_1}-\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}(x_1-x)+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}(y_1-y)+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(z_1-z)+\mathrm{R}''';$$

wo die Grössen R', R'', R''' in Bezug auf x_1-x, y_1-y, z_1-z von der zweiten Ordnung sind. Weil nun

$$\frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-\frac{\partial u}{\partial x}}{x_1-x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cdot\frac{y_1-y}{x_1-x}+\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\cdot\frac{z_1-z}{x_1-x}+\frac{\mathrm{R}'}{x_1-x},$$

$$\frac{\frac{\partial u_1}{\partial y_1}-\frac{\partial u}{\partial y}}{x_1-x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cdot\frac{y_1-y}{x_1-x}+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\cdot\frac{z_1-z}{x_1-x}+\frac{\mathrm{R}''}{x_1-x},$$

$$\frac{\frac{\partial u_1}{\partial z_1}-\frac{\partial u}{\partial z}}{x_1-x}=\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\cdot\frac{y_1-y}{x_1-x}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cdot\frac{z_1-z}{x_1-x}+\frac{\mathrm{R}'''}{x_1-x}$$

ist, und die Grössen

$$\frac{\mathrm{R}'}{x_1-x},\quad \frac{\mathrm{R}''}{x_1-x},\quad \frac{\mathrm{R}'''}{x_1-x}$$

sich der Null nähern, wenn $x_1 - x$ sich der Null nähert, so ist, immer unter der Voraussetzung, dass $x_1 - x$ sich der Null nähert:

$$\mathrm{Lim}\frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-\frac{\partial u}{\partial x}}{x_1-x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\mathrm{Lim}\frac{y_1-y}{x_1-x}+\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\mathrm{Lim}\frac{z_1-z}{x_1-x},$$

$$\mathrm{Lim}\frac{\frac{\partial u_1}{\partial y_1}-\frac{\partial u}{\partial y}}{x_1-x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\mathrm{Lim}\frac{y_1-y}{x_1-x}+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\mathrm{Lim}\frac{z_1-z}{x_1-x},$$

$$\mathrm{Lim}\frac{\frac{\partial u_1}{\partial z_1}-\frac{\partial u}{\partial z}}{x_1-x}=\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\mathrm{Lim}\frac{y_1-y}{x_1-x}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\mathrm{Lim}\frac{z_1-z}{x_1-x};$$

also nach dem Obigen:

$$\mathrm{Lim}\frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-\frac{\partial u}{\partial x}}{x_1-x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cdot\frac{C\frac{\partial u}{\partial x}-A\frac{\partial u}{\partial z}}{B\frac{\partial u}{\partial z}-C\frac{\partial u}{\partial y}}$$
$$+\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\cdot\frac{A\frac{\partial u}{\partial y}-B\frac{\partial u}{\partial x}}{B\frac{\partial u}{\partial z}-C\frac{\partial u}{\partial y}},$$

$$\mathrm{Lim}\frac{\frac{\partial u_1}{\partial y_1}-\frac{\partial u}{\partial y}}{x_1-x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cdot\frac{C\frac{\partial u}{\partial x}-A\frac{\partial u}{\partial z}}{B\frac{\partial u}{\partial z}-C\frac{\partial u}{\partial y}}$$
$$+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\cdot\frac{A\frac{\partial u}{\partial y}-B\frac{\partial u}{\partial x}}{B\frac{\partial u}{\partial z}-C\frac{\partial u}{\partial y}},$$

$$\mathrm{Lim}\frac{\frac{\partial u_1}{\partial z_1}-\frac{\partial u}{\partial z}}{x_1-x}=\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\cdot\frac{C\frac{\partial u}{\partial x}-A\frac{\partial u}{\partial z}}{B\frac{\partial u}{\partial z}-C\frac{\partial u}{\partial y}}$$
$$+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cdot\frac{A\frac{\partial u}{\partial y}-B\frac{\partial u}{\partial x}}{B\frac{\partial u}{\partial z}-C\frac{\partial u}{\partial y}}.$$

Hiernach erhalten wir nun nach gehöriger Substitution mittelst leichter Rechnung, wenn der Kürze wegen

$$Q^2=(A^2+B^2+C^2)\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}-\left(A\frac{\partial u}{\partial x}+B\frac{\partial u}{\partial y}+C\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$$

$$=\left(A\frac{\partial u}{\partial y}-B\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(B\frac{\partial u}{\partial z}-C\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(C\frac{\partial u}{\partial x}-A\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$$

und

$$\begin{aligned}\Theta= & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(B\frac{\partial u}{\partial z}-C\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\\ & +\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(C\frac{\partial u}{\partial x}-A\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\\ & +\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\left(A\frac{\partial u}{\partial y}-B\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\\ & +2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\left(B\frac{\partial u}{\partial z}-C\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(C\frac{\partial u}{\partial x}-A\frac{\partial u}{\partial z}\right)\\ & +2\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\left(C\frac{\partial u}{\partial x}-A\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(A\frac{\partial u}{\partial y}-B\frac{\partial u}{\partial x}\right)\\ & +2\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\left(A\frac{\partial u}{\partial y}-B\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(B\frac{\partial u}{\partial z}-C\frac{\partial u}{\partial y}\right)\end{aligned}$$

gesetzt wird:

$$V-U\,\mathrm{Lim}\frac{y_1-y}{x_1-x}=\frac{CQ^2}{B\frac{\partial u}{\partial z}-C\frac{\partial u}{\partial y}}$$

und

$$U\,\mathrm{Lim}\frac{V_1-V}{x_1-x}-V\,\mathrm{Lim}\frac{U_1-U}{x_1-x}=\frac{C(A^2+B^2+C^2)\Theta}{B\frac{\partial u}{\partial z}-C\frac{\partial u}{\partial y}}.$$

Weil nun aber bekanntlich der Mittelpunkt des Krümmungskreises des Schnitts in dem Punkte (xyz) desselben die Gränze ist, welcher der Durchschnittspunkt der beiden den Punkten (xyz) und $(x_1y_1z_1)$ entsprechenden Normalen des Schnitts sich nähert, wenn der Punkt $(x_1y_1z_1)$ dem Punkte (xyz) immer näher und näher rückt, also x_1-x sich der Null nähert, und unter dieser Voraussetzung offenbar

$$\mathrm{Lim}(U_1-U)=0,\quad \mathrm{Lim}(V_1-V)=0,$$

also auch

$$\operatorname{Lim}(U_1 - U) . \operatorname{Lim} \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = 0$$

ist; so ist wegen der aus dem Obigen bekannten Formel

$$\frac{\mathrm{X} - x}{U} = \frac{\mathrm{Y} - y}{V} = \frac{\mathrm{Z} - z}{W}$$

$$= \frac{V - U\dfrac{y_1 - y}{x_1 - x} + (V_1 - V) - (U_1 - U)\dfrac{y_1 - y}{x_1 - x}}{U\dfrac{V_1 - V}{x_1 - x} - V\dfrac{U_1 - U}{x_1 - x}},$$

wenn von jetzt an X, Y, Z die Coordinaten des Mittelpunkts des Krümmungskreises bezeichnen, offenbar

$$\frac{\mathrm{X} - x}{U} = \frac{\mathrm{Y} - y}{V} = \frac{\mathrm{Z} - z}{W} = \frac{V - U \operatorname{Lim} \dfrac{y_1 - y}{x_1 - x}}{U \operatorname{Lim} \dfrac{V_1 - V}{x_1 - x} - V \operatorname{Lim} \dfrac{U_1 - U}{x_1 - x}},$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$\frac{\mathrm{X} - x}{U} = \frac{\mathrm{Y} - y}{V} = \frac{\mathrm{Z} - z}{W} = \frac{Q^2}{(A^2 + B^2 + C^2)\Theta}.$$

Wenn R den Krümmungshalbmesser bezeichnet, so ist

$$R^2 = (\mathrm{X} - x)^2 + (\mathrm{Y} - y)^2 + (\mathrm{Z} - z)^2,$$

also:

$$R^2 = \frac{(U^2 + V^2 + W^2)\,Q^4}{(A^2 + B^2 + C^2)^2\,\Theta^2}.$$

Nun ist aber, wie man mittelst leichter Rechnung findet,

$$U^2 + V^2 + W^2 = (A^2 + B^2 + C^2)\,Q^2,$$

also

$$R^2 = \frac{Q^6}{(A^2 + B^2 + C^2)\,\Theta^2},$$

und folglich

$$R = \pm \frac{Q^3}{\Theta \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

das Zeichen so genommen, dass R positiv wird.

II.

Wir wollen nun die Normalschnitte betrachten.

Wenn die durch die Gleichung

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0$$

charakterisirte Ebene einen Normalschnitt bestimmen, also auf der durch die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial u}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial u}{\partial z}(Z-z)=0$$

charakterisirten Berührungsebene der krummen Fläche senkrecht stehen soll, so muss nach den allgemeinen Principien der analytischen Geometrie

$$A\frac{\partial u}{\partial x}+B\frac{\partial u}{\partial y}+C\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

sein. Deshalb ist nach I. in diesem Falle

$$U=-(A^2+B^2+C^2)\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$V=-(A^2+B^2+C^2)\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$W=-(A^2+B^2+C^2)\frac{\partial u}{\partial z}$$

und

$$Q^2=(A^2+B^2+C^2)\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\};$$

also:

$$X-x=-\frac{(A^2+B^2+C^2)\frac{\partial u}{\partial x}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}}{\Theta},$$

$$Y-y=-\frac{(A^2+B^2+C^2)\frac{\partial u}{\partial y}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}}{\Theta},$$

$$Z-z=-\frac{(A^2+B^2+C^2)\frac{\partial u}{\partial z}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}}{\Theta}$$

und

$$R^2=\frac{(A^2+B^2+C^2)^2\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}^2}{\Theta^2}.$$

Nehmen wir nun an, dass der Normalschnitt durch die durch die Gleichungen

$$\frac{X-x}{\cos\theta}=\frac{Y-y}{\cos\omega}=\frac{Z-z}{\cos\overline{\omega}}$$

charakterisirte gerade Linie bestimmt werde, so ist

$$A\cos\theta+B\cos\omega+C\cos\overline{\omega}=0$$

und natürlich wie vorher ausserdem:

$$A\frac{\partial u}{\partial x}+B\frac{\partial u}{\partial y}+C\frac{\partial u}{\partial z}=0.$$

Also kann man offenbar setzen:

$$A=\cos\omega\frac{\partial u}{\partial z}-\cos\overline{\omega}\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$B=\cos\overline{\omega}\frac{\partial u}{\partial x}-\cos\theta\frac{\partial u}{\partial z},$$

$$C=\cos\theta\frac{\partial u}{\partial y}-\cos\omega\frac{\partial u}{\partial x};$$

woraus sich

$$A^2+B^2+C^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2-(\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x}+\cos\omega\frac{\partial u}{\partial y}+\cos\overline{\omega}\frac{\partial u}{\partial z})^2$$

ergiebt. Nehmen wir nun aber an, dass die durch die Gleichungen

$$\frac{X-x}{\cos\theta}=\frac{Y-y}{\cos\omega}=\frac{Z-z}{\cos\overline{\omega}}$$

charakterisirte gerade Linie in der Berührungsebene liege, so ist

$$\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x}+\cos\omega\frac{\partial u}{\partial y}+\cos\overline{\omega}\frac{\partial u}{\partial z}=0,$$

also nach dem Obigen:

$$A^2+B^2+C^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2,$$

$$X-x=-\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}^2}{\Theta},$$

$$Y-y=-\frac{\frac{\partial u}{\partial y}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}^2}{\Theta},$$

$$Z-z=-\frac{\frac{\partial u}{\partial z}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}^2}{\Theta}$$

und

$$R^2=\frac{\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}^5}{\Theta^2}.$$

Nun ist aber, wie man mit Rücksicht auf die Gleichung

$$\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x}+\cos\omega\frac{\partial u}{\partial y}+\cos\bar{\omega}\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

leicht findet:

$$B\frac{\partial u}{\partial z}-C\frac{\partial u}{\partial y}=-\cos\theta\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\},$$

$$C\frac{\partial u}{\partial x}-A\frac{\partial u}{\partial z}=-\cos\omega\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\},$$

$$A\frac{\partial u}{\partial y}-B\frac{\partial u}{\partial x}=-\cos\bar{\omega}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\};$$

also nach I., wenn der Kürze wegen

$$\Omega=\cos\theta^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\cos\omega^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\cos\bar{\omega}^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$+2\cos\theta\cos\omega\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2\cos\omega\cos\bar{\omega}\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}+2\cos\bar{\omega}\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}$$

gesetzt wird:

$$\Theta=\Omega\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}^2,$$

und folglich:

$$X-x=-\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\Omega},\quad Y-y=-\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\Omega},\quad Z-z=-\frac{\frac{\partial u}{\partial z}}{\Omega}$$

und

$$R^2 = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}{\Omega^2}.$$

III.

Wir wollen jetzt zwei Normalschnitte betrachten, die auf einander senkrecht stehen, indem wir annehmen, dass diese beiden Normalschnitte durch die Gleichungen

$$\frac{X-x}{\cos\theta} = \frac{Y-y}{\cos\omega} = \frac{Z-z}{\cos\overline{\omega}} \text{ und } \frac{X-x}{\cos\theta_1} = \frac{Y-y}{\cos\omega_1} = \frac{Z-z}{\cos\overline{\omega}_1}$$

bestimmt sind. Dann haben wir die Gleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\omega + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\overline{\omega} = 0,$$

$$\cos\theta^2 + \cos\omega^2 + \cos\overline{\omega}^2 = 1$$

und

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta_1 + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\omega_1 + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\overline{\omega}_1 = 0,$$

$$\cos\theta_1{}^2 + \cos\omega_1{}^2 + \cos\overline{\omega}_1{}^2 = 1;$$

und ausserdem die Gleichung

$$\cos\theta\cos\theta_1 + \cos\omega\cos\omega_1 + \cos\overline{\omega}\cos\overline{\omega}_1 = 0.$$

Also ist, wenn G_1 einen gewissen Factor bezeichnet:

$$\cos\theta_1 = G_1\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cos\overline{\omega} - \frac{\partial u}{\partial z}\cos\omega\right),$$

$$\cos\omega_1 = G_1\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial x}\cos\overline{\omega}\right),$$

$$\cos\overline{\omega}_1 = G_1\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\omega - \frac{\partial u}{\partial y}\cos\theta\right);$$

wo

$$\frac{1}{G_1{}^2} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\omega - \frac{\partial u}{\partial y}\cos\theta\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\cos\overline{\omega} - \frac{\partial u}{\partial z}\cos\omega\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial x}\cos\overline{\omega}\right)^2,$$

also, wie man sogleich übersieht:

$$\frac{1}{G_1^2}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\omega+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\varpi\right)^2,$$

und folglich nach dem Obigen:

$$\frac{1}{G_1^2}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$$

ist.

Weil

$$\cos\theta=-\frac{\frac{\partial u}{\partial y}\cos\omega+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\varpi}{\frac{\partial u}{\partial x}},$$

$$\cos\omega=-\frac{\frac{\partial u}{\partial z}\cos\varpi+\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta}{\frac{\partial u}{\partial y}},$$

$$\cos\varpi=-\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\omega}{\frac{\partial u}{\partial z}}$$

ist, so ist:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2(\cos\omega^2+\cos\varpi^2)+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cos\omega+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\varpi\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2(\cos\varpi^2+\cos\theta^2)+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cos\varpi+\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2(\cos\theta^2+\cos\omega^2)+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\omega\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2;$$

also, wie man sogleich übersieht, wenn man die Quadrate entwickelt:

$$\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}(\cos\omega^2+\cos\varpi^2)-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cos\varpi-\frac{\partial u}{\partial z}\cos\omega\right)^2$$
$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2,$$

$$\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}(\cos\varpi^2+\cos\theta^2)-\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cos\theta-\frac{\partial u}{\partial x}\cos\varpi\right)^2$$
$$=\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2,$$

$$\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}(\cos\theta^2+\cos\omega^2)-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\omega-\frac{\partial u}{\partial y}\cos\theta\right)^2$$
$$=\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2;$$

woraus sich unmittelbar die folgenden sehr bemerkenswerthen Relationen ergeben:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cos\varpi-\frac{\partial u}{\partial z}\cos\omega\right)^2=\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}\sin\theta^2-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cos\theta-\frac{\partial u}{\partial x}\cos\varpi\right)^2=\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}\sin\omega^2-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\omega-\frac{\partial u}{\partial y}\cos\theta\right)^2=\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}\sin\varpi^2-\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2.$$

Ferner findet man, wenn man die nachstehenden Producte durch gewöhnliche Multiplication entwickelt, und in denselben nach der Reihe

$$\frac{\partial u}{\partial z}\cos\varpi=-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\omega\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta=-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cos\omega+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\varpi\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\cos\omega=-\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cos\varpi+\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta\right)$$

setzt, ohne alle Schwierigkeit:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cos\varpi-\frac{\partial u}{\partial z}\cos\omega\right)\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cos\theta-\frac{\partial u}{\partial x}\cos\varpi\right)$$
$$=-\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}\cos\theta\cos\omega-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cos\theta-\frac{\partial u}{\partial x}\cos\varpi\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\omega-\frac{\partial u}{\partial y}\cos\theta\right)$$
$$=-\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}\cos\omega\cos\varpi-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial z},$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\omega-\frac{\partial u}{\partial y}\cos\theta\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cos\varpi-\frac{\partial u}{\partial z}\cos\omega\right)$$
$$=-\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}\cos\varpi\cos\theta-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Also ist nach dem Obigen:

$$\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}\cos\theta_1{}^2$$

$$=\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}\sin\theta^2-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2,$$

$$\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}\cos\omega_1{}^2$$

$$=\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}\sin\omega^2-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2,$$

$$\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}\cos\overline{\omega}_1{}^2$$

$$=\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}\sin\overline{\omega}^2-\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$$

und

$$\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}\cos\theta_1\cos\omega_1$$

$$=-\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}\cos\theta\cos\omega-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}\cos\omega_1\cos\overline{\omega}_1$$

$$=-\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}\cos\omega\cos\overline{\omega}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial z},$$

$$\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}\cos\overline{\omega}_1\cos\theta_1$$

$$=-\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}\cos\overline{\omega}\cos\theta-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial u}{\partial x};$$

oder:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2=\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}(\sin\theta^2-\cos\theta_1{}^2),$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}(\sin\omega^2-\cos\omega_1{}^2),$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2=\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}(\sin\overline{\omega}^2-\cos\overline{\omega}_1{}^2)$$

und

$$-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}(\cos\theta\cos\omega+\cos\theta_1\cos\omega_1),$$

$$-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}=\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}(\cos\omega\cos\overline{\omega}+\cos\omega_1\cos\overline{\omega}_1),$$

$$-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}(\cos\overline{\omega}\cos\theta+\cos\overline{\omega}_1\cos\theta_1).$$

Setzen wir nun

$$\Omega_1=\cos\theta_1{}^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\cos\omega_1{}^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\cos\overline{\omega}_1{}^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$+2\cos\theta_1\cos\omega_1\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2\cos\omega_1\cos\overline{\omega}_1\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}+2\cos\overline{\omega}_1\cos\theta_1\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x},$$

so ist nach den vorhergehenden Formeln, wie auf der Stelle erhellet:

$$\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}\Omega_1$$

$$=\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}\left\{\begin{array}{l}\sin\theta^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\sin\omega^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\sin\overline{\omega}^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\\ -2\cos\theta\cos\omega\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-2\cos\omega\cos\overline{\omega}\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\\ \qquad -2\cos\overline{\omega}\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\end{array}\right\}$$

$$-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$-2\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-2\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x},$$

und weil nun bekanntlich

$$\Omega=\cos\theta^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\cos\omega^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\cos\overline{\omega}^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$+2\cos\theta\cos\omega\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2\cos\omega\cos\overline{\omega}\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}+2\cos\overline{\omega}\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}$$

ist, so erhält man auf der Stelle die folgende sehr bemerkenswerthe Gleichung:

$$\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}(\Omega+\Omega_1)$$

$$=\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$-2\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-2\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x},$$

oder:

$$\Omega+\Omega_1=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$-\frac{\left\{\begin{array}{c}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\\+2\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}+2\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\end{array}\right\}}{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

Aus dieser Gleichung erhellet, dass die Summe $\Omega+\Omega_1$ eine constante Grösse ist, und dass Ω_1 aus Ω immer leicht gefunden werden kann.

Zur Bestimmung von X_1, Y_1, Z_1 und R_1, wo die Bedeutung dieser Symbole ohne weitere Erläuterung sogleich von selbst erhellen wird, hat man nach II. die folgenden Formeln:

$$X_1-x=-\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\Omega_1},\quad Y_1-y=-\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\Omega_1},\quad Z_1-z=-\frac{\frac{\partial u}{\partial z}}{\Omega_1}$$

und

$$R_1{}^2=\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}{\Omega_1{}^2}.$$

IV.

Hiernach wollen wir uns nun mit der Bestimmung der Normalschnitte der grössten und kleinsten Krümmung beschäftigen.

Zwischen den Winkeln θ, ω, $\bar{\omega}$ haben wir bekanntlich die zwei folgenden Gleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\omega+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\varpi=0,$$

$$\cos\theta^2+\cos\omega^2+\cos\varpi^2=1;$$

aus denen durch Differentiation erhalten wird:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\sin\theta-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial\cos\omega}{\partial\theta}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial\cos\varpi}{\partial\theta}=0,$$

$$\sin\theta\cos\theta-\cos\omega\frac{\partial\cos\omega}{\partial\theta}-\cos\varpi\frac{\partial\cos\varpi}{\partial\theta}=0.$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich sogleich:

$$\frac{\partial\cos\omega}{\partial\theta}=-\sin\theta\frac{\cos\theta\frac{\partial u}{\partial z}-\cos\varpi\frac{\partial u}{\partial x}}{\cos\varpi\frac{\partial u}{\partial y}-\cos\omega\frac{\partial u}{\partial z}},$$

$$\frac{\partial\cos\varpi}{\partial\theta}=-\sin\theta\frac{\cos\omega\frac{\partial u}{\partial x}-\cos\theta\frac{\partial u}{\partial y}}{\cos\varpi\frac{\partial u}{\partial y}-\cos\omega\frac{\partial u}{\partial z}}.$$

Wenn man aber den Ausdruck

$$\Omega=\cos\theta^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\cos\omega^2\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\cos\varpi^2\frac{\partial^2u}{\partial z^2}$$

$$+2\cos\theta\cos\omega\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+2\cos\omega\cos\varpi\frac{\partial^2u}{\partial y\partial z}+2\cos\varpi\cos\theta\frac{\partial^2u}{\partial z\partial x}$$

differentiirt, so erhält man:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\theta}=-2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+2\cos\omega\frac{\partial\cos\omega}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+2\cos\varpi\frac{\partial\cos\varpi}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial^2u}{\partial z^2}$$

$$-2(\sin\theta\cos\omega-\cos\theta\frac{\partial\cos\omega}{\partial\theta})\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}$$

$$+2(\cos\omega\frac{\partial\cos\varpi}{\partial\theta}+\cos\varpi\frac{\partial\cos\omega}{\partial\theta})\frac{\partial^2u}{\partial y\partial z}$$

$$-2(\sin\theta\cos\varpi-\cos\theta\frac{\partial\cos\varpi}{\partial\theta})\frac{\partial^2u}{\partial z\partial x},$$

also nach gehöriger Substitution mittelst des Vorhergehenden, wie sich durch leichte Rechnung sogleich ergiebt:

$$\frac{\cos\bar\omega\frac{\partial u}{\partial y}+\cos\omega\frac{\partial u}{\partial z}}{2\sin\theta}\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial\theta}$$

$$\begin{aligned}
=&-\cos\theta\left(\cos\bar\omega\frac{\partial u}{\partial y}-\cos\omega\frac{\partial u}{\partial z}\right)\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\\
&-\cos\omega\left(\cos\theta\frac{\partial u}{\partial z}-\cos\bar\omega\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\\
&-\cos\bar\omega\left(\cos\omega\frac{\partial u}{\partial x}-\cos\theta\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\\
&-\left\{\cos\theta\left(\cos\theta\frac{\partial u}{\partial z}-\cos\bar\omega\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\cos\omega\left(\cos\bar\omega\frac{\partial u}{\partial y}-\cos\omega\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right\}\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}\\
&-\left\{\cos\omega\left(\cos\omega\frac{\partial u}{\partial x}-\cos\theta\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\cos\bar\omega\left(\cos\theta\frac{\partial u}{\partial z}-\cos\bar\omega\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right\}\frac{\partial^2u}{\partial y\partial z}\\
&-\left\{\cos\bar\omega\left(\cos\bar\omega\frac{\partial u}{\partial y}-\cos\omega\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\cos\theta\left(\cos\omega\frac{\partial u}{\partial x}-\cos\theta\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\}\frac{\partial^2u}{\partial z\partial x}\\
=&\quad\cos\theta^2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}\right)\\
&+\cos\omega^2\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2u}{\partial y\partial z}\right)\\
&+\cos\bar\omega^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2u}{\partial z\partial x}\right)\\
&+\cos\theta\cos\omega\left\{\frac{\partial u}{\partial z}\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2u}{\partial y\partial z}\right)\right\}\\
&+\cos\omega\cos\bar\omega\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial^2u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\right)-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2u}{\partial z\partial x}\right)\right\}\\
&+\cos\bar\omega\cos\theta\left\{\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial^2u}{\partial z^2}-\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\right)-\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}\right)\right\},
\end{aligned}$$

und weil nun die gemeinschaftliche Bedingung des Maximums oder Minimums von Ω oder R bekanntlich

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\theta}=0$$

ist, so haben wir zur Bestimmung der Winkel θ, ω, $\bar\omega$ für den Normalschnitt, welchem ein Maximum oder Minimum des Krümmungshalbmessers entspricht, die drei folgenden Gleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\omega+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\overline{\omega}=0,$$

$$\left.\begin{array}{l}
\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)\cos\theta^2\\
+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)\cos\omega^2\\
+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)\cos\overline{\omega}^2\\
+\left\{\frac{\partial u}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)\right\}\cos\theta\cos\omega\\
+\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)\right\}\cos\omega\cos\overline{\omega}\\
+\left\{\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)-\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)\right\}\cos\overline{\omega}\cos\theta
\end{array}\right\}=0,$$

$$\cos\theta^2+\cos\omega^2+\cos\overline{\omega}^2=1.$$

Wenn die Winkel θ_1, ω_1, $\overline{\omega}_1$ einem auf dem durch die Winkel θ, ω, $\overline{\omega}$ bestimmten Normalschnitte senkrecht stehenden Normalschnitte entsprechen, so ist nach III. das Product der Grösse

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$$

in die Grösse

$$\begin{array}{l}
\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)\cos\theta_1{}^2\\
+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)\cos\omega_1{}^2\\
+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)\cos\overline{\omega}_1{}^2\\
+\left\{\frac{\partial u}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)\right\}\cos\theta_1\cos\omega_1\\
+\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)\right\}\cos\omega_1\cos\overline{\omega}_1\\
+\left\{\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)-\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)\right\}\cos\overline{\omega}_1\cos\theta_1,
\end{array}$$

wie sogleich erhellet:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)\left\{\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\sin\theta^2-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right\}$$

$$+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)\left\{\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\sin\omega^2-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\}$$

$$+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)\left\{\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\sin\overline{\omega}^2-\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}$$

$$-\left\{\frac{\partial u}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)\right\}$$

$$\times\left\{\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\cos\theta\cos\omega+\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\right\}$$

$$-\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)\right\}$$

$$\times\left\{\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\cos\omega\cos\overline{\omega}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\right\}$$

$$-\left\{\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)-\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)\right\}$$

$$\times\left\{\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\cos\overline{\omega}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right\},$$

und setzt man nun hierin statt

$$\sin\theta^2,\quad \sin\omega^2,\quad \sin\overline{\omega}^2$$

die Ausdrücke

$$1-\cos\theta^2,\quad 1-\cos\omega^2,\quad 1-\cos\overline{\omega}^2$$

und berücksichtigt, dass dann nach dem Vorhergehenden das Aggregat aller Glieder, welche die Winkel θ, ω, $\overline{\omega}$ enthalten, offenbar verschwindet, so wird obige Grösse:

$$\left\{\begin{array}{l}
\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)\\
+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)\\
+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)
\end{array}\right\}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}$$

$$-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$$

$$-\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

$$-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$$

$$-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\left\{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\right\}$$

$$+\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)$$

$$+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)$$

$$+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right),$$

und verschwindet folglich offenbar. Daher ist

$$\left.\begin{array}{l}
\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)\cos\theta_1^2\\
+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)\cos\omega_1^2\\
+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)\cos\overline{\omega}_1^2\\
+\left\{\frac{\partial u}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)\right\}\cos\theta_1\cos\omega_1\\
+\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)\right\}\cos\omega_1\cos\overline{\omega}_1\\
+\left\{\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)-\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)\right\}\cos\overline{\omega}_1\cos\theta_1
\end{array}\right\}=0,$$

woraus man ganz auf ähnliche Art, wie in der früheren Abhandlung (Nr. I.) über das dreiaxige Ellipsoid, schliesst, dass die Normalschnitte, denen die grössten oder kleinsten Krümmungshalbmesser entsprechen, jederzeit oder bei allen Flächen auf einander senkrecht stehen.

Es ist nun noch nöthig, den zweiten Differentialquotienten von Ω zu entwickeln, mit Rücksicht darauf, dass der erste Differentialquotient dieser Grösse verschwindet.

Zuerst findet man mittelst der oben angegebenen Differentialquotienten von $\cos\omega$ und $\cos\overline{\omega}$, mit Rücksicht auf die Gleichung

$$\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x}+\cos\omega\frac{\partial u}{\partial y}+\cos\overline{\omega}\frac{\partial u}{\partial z}=0,$$

leicht die folgenden eleganten Ausdrücke:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\overline{\omega}\frac{\partial u}{\partial y}-\cos\omega\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\sin\theta\cos\theta\,\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}{\cos\overline{\omega}\frac{\partial u}{\partial y}-\cos\omega\frac{\partial u}{\partial z}},$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\theta\frac{\partial u}{\partial z}-\cos\overline{\omega}\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\sin\theta\cos\omega\,\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}{\cos\overline{\omega}\frac{\partial u}{\partial y}-\cos\omega\frac{\partial u}{\partial z}},$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\omega\frac{\partial u}{\partial x}-\cos\theta\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\sin\theta\cos\overline{\omega}\,\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}{\cos\overline{\omega}\frac{\partial u}{\partial y}-\cos\omega\frac{\partial u}{\partial z}};$$

und entwickelt man nun den Differentialquotienten des oben gegebenen Ausdrucks von

$$\frac{\cos\overline{\omega}\frac{\partial u}{\partial y}-\cos\omega\frac{\partial u}{\partial z}}{2\sin\theta}\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial\theta},$$

so erhält man nach gehöriger Substitution als Ausdruck dieses Differentialquotienten das Product von

$$\frac{\sin\theta}{\cos\overline{\omega}\frac{\partial u}{\partial y}-\cos\omega\frac{\partial u}{\partial z}}$$

in die folgende Grösse:

$$\begin{aligned}
&(\cos\overline{\omega}\frac{\partial u}{\partial y}-\cos\omega\frac{\partial u}{\partial z})^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\\
&+(\cos\theta\frac{\partial u}{\partial z}-\cos\overline{\omega}\frac{\partial u}{\partial x})^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\\
&+(\cos\omega\frac{\partial u}{\partial x}-\cos\theta\frac{\partial u}{\partial y})^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\\
&+2(\cos\overline{\omega}\frac{\partial u}{\partial y}-\cos\omega\frac{\partial u}{\partial z})(\cos\theta\frac{\partial u}{\partial z}-\cos\overline{\omega}\frac{\partial u}{\partial x})\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\\
&+2(\cos\theta\frac{\partial u}{\partial z}-\cos\overline{\omega}\frac{\partial u}{\partial x})(\cos\omega\frac{\partial u}{\partial x}-\cos\theta\frac{\partial u}{\partial y})\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\\
&+2(\cos\omega\frac{\partial u}{\partial x}-\cos\theta\frac{\partial u}{\partial y})(\cos\overline{\omega}\frac{\partial u}{\partial y}-\cos\omega\frac{\partial u}{\partial z})\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\\
&-\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}\left\{\begin{array}{l}\cos\theta^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\cos\omega^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\cos\overline{\omega}^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\\ +2\cos\theta\cos\omega\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2\cos\omega\cos\overline{\omega}\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\\ \qquad +2\cos\overline{\omega}\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\end{array}\right\}.
\end{aligned}$$

Nun ist nach dem Obigen

$$\begin{aligned}
\Omega=&\cos\theta^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\cos\omega^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\cos\overline{\omega}^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\\
&+2\cos\theta\cos\omega\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2\cos\omega\cos\overline{\omega}\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}+2\cos\overline{\omega}\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}
\end{aligned}$$

und, wie man leicht findet:

$$\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}\Omega_1$$

$$= (\cos\overline{\omega}\frac{\partial u}{\partial y}-\cos\omega\frac{\partial u}{\partial z})^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$+ (\cos\theta\frac{\partial u}{\partial z}-\cos\overline{\omega}\frac{\partial u}{\partial x})^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$+ (\cos\omega\frac{\partial u}{\partial x}-\cos\theta\frac{\partial u}{\partial y})^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$+2(\cos\overline{\omega}\frac{\partial u}{\partial y}-\cos\omega\frac{\partial u}{\partial z})(\cos\theta\frac{\partial u}{\partial z}-\cos\overline{\omega}\frac{\partial u}{\partial x})\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$$

$$+2(\cos\theta\frac{\partial u}{\partial z}-\cos\overline{\omega}\frac{\partial u}{\partial x})(\cos\omega\frac{\partial u}{\partial x}-\cos\theta\frac{\partial u}{\partial y})\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}$$

$$+2(\cos\omega\frac{\partial u}{\partial x}-\cos\theta\frac{\partial u}{\partial y})(\cos\overline{\omega}\frac{\partial u}{\partial y}-\cos\omega\frac{\partial u}{\partial z})\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x};$$

also ist obige Grösse:

$$\sin\theta\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}{\cos\overline{\omega}\frac{\partial u}{\partial y}-\cos\omega\frac{\partial u}{\partial z}}(\Omega_1-\Omega).$$

Differentiirt man jetzt die Grösse

$$\frac{\cos\overline{\omega}\frac{\partial u}{\partial y}-\cos\omega\frac{\partial u}{\partial z}}{2\sin\theta}\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial\theta}$$

mit Rücksicht darauf, dass der erste Differentialquotient von Ω verschwindet, und setzt den erhaltenen Differentialquotienten, wie es erforderlich ist, der vorher entwickelten Grösse gleich, so ergiebt sich die Gleichung

$$\frac{\cos\omega\frac{\partial u}{\partial y}-\cos\omega\frac{\partial u}{\partial z}}{2\sin\theta}\cdot\frac{\partial^2\Omega}{\partial\theta^2}=\sin\theta\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}{\cos\overline{\omega}\frac{\partial u}{\partial y}-\cos\omega\frac{\partial u}{\partial z}}(\Omega_1-\Omega),$$

aus der man ferner sogleich den folgenden, jedenfalls sehr bemerkenswerthen Ausdruck:

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial\theta^2}=2\sin\theta^2\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}{(\cos\bar{\omega}\frac{\partial u}{\partial y}-\cos\omega\frac{\partial u}{\partial z})^2}(\Omega_1-\Omega)$$

ableitet; und da nun, wie aus allem Vorhergehenden auf der Stelle ganz unzweideutig erhellet, natürlich ganz eben so

$$\frac{\partial^2\Omega_1}{\partial\theta_1{}^2}=2\sin\theta_1{}^2\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}{(\cos\bar{\omega}_1\frac{\partial u}{\partial y}-\cos\omega_1\frac{\partial u}{\partial z})^2}(\Omega-\Omega_1)$$

ist, so ist klar, dass

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial\theta^2} \text{ und } \frac{\partial^2\Omega_1}{\partial\theta_1{}^2}$$

immer entgegengesetzte Vorzeichen haben, also die eine der beiden Grössen Ω und Ω_1 stets ein Maximum, die andere ein Minimum ist. Was sich hieraus in Bezug auf die Krümmungshalbmesser R und R_1 schliessen lässt, will ich nicht weiter erläutern, da dies bekannt genug ist.

V.

Die drei Gleichungen, welche wir in IV. zwischen den Cosinussen der Winkel θ, ω, $\bar{\omega}$ gefunden haben, müssen wir nun auflösen. Diese Gleichungen haben im Allgemeinen die Form:

$$ax+by+cz=0,$$
$$a_1x^2+b_1y^2+c_1z^2+d_1xy+e_1yz+f_1zx=0,$$
$$x^2+y^2+z^2=1.$$

Gleichungen dieser Art können aber immer auf folgende Art aufgelöst werden.

Man bringe die beiden ersten Gleichungen auf die folgende Form:

$$ax+by+cz=0,$$
$$(a_1x+d_1y)x+(b_1y+e_1z)y+(c_1z+f_1x)z=0;$$

dann ergiebt sich aus denselben, wenn G_2 einen gewissen Factor bezeichnet:

$$x = G_2\{b(c_1z + f_1x) - c(b_1y + e_1z)\},$$
$$y = G_2\{c(a_1x + d_1y) - a(c_1z + f_1x)\},$$
$$z = G_2\{a(b_1y + e_1z) - b(a_1x + d_1y)\};$$

oder:

$$(1 - bf_1G_2)x = G_2\{(bc_1 - ce_1)z - cb_1y\},$$
$$(1 - cd_1G_2)y = G_2\{(ca_1 - af_1)x - ac_1z\},$$
$$(1 - ae_1G_2)z = G_2\{(ab_1 - bd_1)y - ba_1x\};$$

also:

$$cb_1G_2\frac{y}{x} - (bc_1 - ce_1)G_2\frac{z}{x} = -(1 - bf_1G_2),$$
$$(1 - cd_1G_2)\frac{y}{x} + ac_1G_2\frac{z}{x} = (ca_1 - af_1)G_2,$$
$$(ab_1 - bd_1)G_2\frac{y}{x} - (1 - ae_1G_2)\frac{z}{x} = ba_1G_2.$$

Hat man nun zwischen zwei Grössen v, w im Allgemeinen die drei Gleichungen:

$$a'v + b'w = \alpha,$$
$$a_1'v + b_1'w = \alpha_1,$$
$$a_2'v + b_2'w = \alpha_2;$$

so folgt aus denselben immer die Gleichung:

$$\alpha(a_1'b_2' - b_1'a_2') + \alpha_1(a_2'b' - b_2'a') + \alpha_2(a'b_1' - b'a_1') = 0.$$

Wendet man dies auf die drei vorhergehenden Gleichungen zwischen den zwei Grössen $\frac{y}{x}$ und $\frac{z}{x}$ an, so erhält man nach Ausführung aller nöthigen Reductionen zur Bestimmung der Grösse G_2 die folgende Gleichung des zweiten Grades:

$$\left.\begin{array}{r}1 - ae_1\\ -bf_1\\ -cd_1\end{array}\right| G_2 + \left.\begin{array}{r}abe_1f_1\\ +\ acd_1e_1\\ +\ bcd_1f_1\\ +\ ac_1(ab_1 - bd_1)\\ +\ cb_1(ca_1 - af_1)\\ +\ ba_1(bc_1 - ce_1)\end{array}\right| G_2 = 0,$$

welche man auch unter der folgenden Form darstellen kann:

$$\left.\begin{array}{r}1-ae_1\\ -bf_1\\ -cd_1\end{array}\right| G_2 + \left.\begin{array}{r}a^2b_1c_1\\ +\;b^2e_1a_1\\ +\;c^2a_1b_1\\ +\;ab(e_1f_1-c_1d_1)\\ +\;bc(f_1d_1-a_1e_1)\\ +\;ca(d_1e_1-b_1f_1)\end{array}\right| G_2^2=0.$$

Hat man aber auf diese Weise G_2 gefunden, so kann man die Quotienten $\frac{y}{x}$ und $\frac{z}{x}$ mittelst der drei obigen, zwischen denselben Statt findenden Gleichungen auf verschiedene Arten ausdrücken, etwa mittelst der zwei ersten dieser drei Gleichungen auf folgende Art:

$$\frac{y}{x}=\frac{(bc_1-ce_1)(ca_1-af_1)G_2-ac_1(1-bf_1G_2)}{acb_1c_1G_2+(bc_1-ce_1)(1-cd_1G_2)},$$

$$\frac{z}{x}=\frac{cb_1(ca_1-af_1)G_2+(1-bf_1G_2)(1-cd_1G_2)}{acb_1c_1G_2+(bc_1-ce_1)(1-cd_1G_2)};$$

und diese Quotienten führen dann mittelst der Gleichung

$$x^2+y^2+z^2=1$$

leicht zu der Bestimmung der Grössen x, y, z selbst, was nicht weiter erläutert zu werden braucht.

Für so bemerkenswerth ich auch diese Auflösungsmethode an sich halte, so würde dieselbe doch, wenn man sie auf die drei, zwischen den Cosinussen der Winkel θ, ω, $\bar{\omega}$ Statt findenden Gleichungen anwenden wollte, zu sehr complicirten und nicht sehr symmetrischen Ausdrücken führen, was eine andere Auflösung wünschenswerth macht, die wir in den folgenden Nummern geben wollen.

VI.

Dieser Auflösung muss zuerst die folgende allgemeine algebraische Betrachtung vorausgeschickt werden.

Man habe zwischen den Grössen x und y die drei folgenden Gleichungen:

$$a+bx+cy=0,$$
$$a_1+b_1x+c_1y=0,$$
$$a_2+b_2x+c_2y=0.$$

Denkt man sich dann, was offenbar möglich ist, die zwei Grössen u, v so bestimmt, dass

$$a=a_1u+a_2v,$$
$$b=b_1u+b_2v$$

ist, so ist wegen der drei vorausgesetzten Gleichungen:

$$a_1u+a_2v+(b_1u+b_2v)x+cy=0,$$
$$a_1+b_1x+c_1y=0,$$
$$a_2+b_2x+c_2y=0.$$

Multiplicirt man diese drei Gleichungen nach der Reihe mit

$$b_1c_2-c_1b_2,\quad b_2c-c_2(b_1u+b_2v),\quad (b_1u+b_2v)c_1-cb_1;$$

so erhält man durch fernere Addition der drei Gleichungen, weil identisch

$$\left.\begin{array}{r}(b_1u+b_2v)(b_1c_2-c_1b_2)\\ +b_1\{b_2c-c_2(b_1u+b_2v)\}\\ +b_2\{(b_1u+b_2v)\,c_1-cb_1\}\end{array}\right\}=0$$

und

$$\left.\begin{array}{r}c(b_1c_2-c_1b_2)\\ +c_1\{b_2c-c_2(b_1u+b_2v)\}\\ +c_2\{(b_1u+b_2v)\,c_1-cb_1\}\end{array}\right\}=0$$

ist, die Gleichung

$$\left.\begin{array}{r}(a_1u+a_2v)\,(b_1c_2-c_1b_2)\\ +a_1\{b_1c-c_2\,(b_1u+b_2v)\}\\ +a_2\{(b_2u+b_2v)\,c_1-cb_1\}\end{array}\right\}=0,$$

welche man nach einigen Reductionen sogleich auf die Form

$$(a_1b_2-a_2b_1)(c_1u+c_2v-c)=0$$

bringt, woraus sich im Allgemeinen

$$c_1u+c_2v-c=0 \quad \text{oder} \quad c_1u+c_2v=c$$

ergiebt. Wenn man also drei Gleichungen von der Form

$$a+bx+cy=0,$$
$$a_1+b_1x+c_1y=0,$$
$$a_2+b_2x+c_2y=0$$

hat, so ist immer zugleich:

$$a_1u+a_2v=a,$$
$$b_1u+b_2v=b,$$
$$c_1u+c_2v=c;$$

was sich oft mit grossem Vortheil anwenden lässt, wie auch die folgenden Rechnungen im vorliegenden Falle zeigen werden.

VII.

Man führe drei Hülfsgrössen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ ein, welche durch die Gleichungen

$$\mathfrak{X}=R\cos\theta,\quad \mathfrak{Y}=R\cos\omega,\quad \mathfrak{Z}=R\cos\overline{\omega}$$

bestimmt sind; dann ist

$$\cos\theta=\frac{\mathfrak{X}}{R},\quad \cos\omega=\frac{\mathfrak{Y}}{R},\quad \cos\overline{\omega}=\frac{\mathfrak{Z}}{R};$$

und folglich, weil

$$\Omega=\cos\theta^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\cos\omega^2\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\cos\overline{\omega}^2\frac{\partial^2u}{\partial z^2}$$
$$+2\cos\theta\cos\omega\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+2\cos\omega\cos\overline{\omega}\frac{\partial^2u}{\partial y\partial z}+2\cos\overline{\omega}\cos\theta\frac{\partial^2u}{\partial z\partial x}$$

ist:

$$R^2\Omega=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\mathfrak{X}^2+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\mathfrak{Y}^2+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\mathfrak{Z}^2+2\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}\mathfrak{X}\mathfrak{Y}+2\frac{\partial^2u}{\partial y\partial z}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}+2\frac{\partial^2u}{\partial z\partial x}\mathfrak{Z}\mathfrak{X}.$$

Nach II. ist aber

$$R\Omega=\pm\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2},$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$\pm R\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\mathfrak{X}^2+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\mathfrak{Y}^2+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\mathfrak{Z}^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\mathfrak{X}\mathfrak{Y}+2\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}+2\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\mathfrak{Z}\mathfrak{X}.$$

Weil bekanntlich

$$\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x}+\cos\omega\frac{\partial u}{\partial y}+\cos\varpi\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

ist, so ist

$$\frac{\partial u}{\partial x}\mathfrak{X}+\frac{\partial u}{\partial y}\mathfrak{Y}+\frac{\partial u}{\partial z}\mathfrak{Z}=0,$$

und ausserdem ist nach dem Obigen:

$$\mathfrak{X}^2+\mathfrak{Y}^2+\mathfrak{Z}^2=R^2.$$

Hieraus sieht man, dass zwischen den Grössen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ zwei Gleichungen bestehen, und dass also immer nur eine derselben als unabhängig variabel betrachtet werden kann, wozu wir im Folgenden die Grösse $\mathfrak{X}$ wählen wollen.

Aus der Gleichung

$$\mathfrak{X}^2+\mathfrak{Y}^2+\mathfrak{Z}^2=R^2$$

folgt durch Differentiation nach $\mathfrak{X}$:

$$\mathfrak{X}+\mathfrak{Y}\frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial\mathfrak{X}}+\mathfrak{Z}\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial\mathfrak{X}}=R\frac{\partial R}{\partial\mathfrak{X}},$$

und da nun für das Maximum oder Minimum des Krümmungshalbmessers

$$\frac{\partial R}{\partial\mathfrak{X}}=0$$

sein muss, so ist

$$\mathfrak{X}+\mathfrak{Y}\frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial\mathfrak{X}}+\mathfrak{Z}\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial\mathfrak{X}}=0\quad\text{oder}\quad\mathfrak{X}\partial\mathfrak{X}+\mathfrak{Y}\partial\mathfrak{Y}+\mathfrak{Z}\partial\mathfrak{Z}=0.$$

Aus der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\mathfrak{x}^2+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\mathfrak{y}^2+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\mathfrak{z}^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\mathfrak{x}\mathfrak{y}+2\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\mathfrak{y}\mathfrak{z}+2\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\mathfrak{z}\mathfrak{x}$$
$$=\pm R\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$$

ergiebt sich ferner durch Differentiation nach derselben unabhängigen veränderlichen Grösse:

$$\left.\begin{array}{l}2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\mathfrak{x}+2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\mathfrak{y}+2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\mathfrak{z}\\ +2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(\mathfrak{y}+\mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial\mathfrak{x}})\\ +2\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}(\mathfrak{y}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial\mathfrak{x}}+\mathfrak{z}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial\mathfrak{x}})\\ +2\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}(\mathfrak{z}+\mathfrak{x}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial\mathfrak{x}})\end{array}\right\}=\pm\frac{\partial R}{\partial\mathfrak{x}}\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2},$$

also, weil für das Maximum oder Minimum des Krümmungshalbmessers

$$\frac{\partial R}{\partial\mathfrak{x}}=0$$

ist:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\mathfrak{x}\partial\mathfrak{x}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\mathfrak{y}\partial\mathfrak{y}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\mathfrak{z}\partial\mathfrak{z}\\ +\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(\mathfrak{x}\partial\mathfrak{y}+\mathfrak{y}\partial\mathfrak{x})\\ +\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}(\mathfrak{y}\partial\mathfrak{z}+\mathfrak{z}\partial\mathfrak{y})\\ +\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}(\mathfrak{z}\partial\mathfrak{x}+\mathfrak{x}\partial\mathfrak{z})\end{array}\right\}=0,$$

oder, wenn man nach den Differentialen der veränderlichen Grössen ordnet:

$$\left.\begin{array}{l}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\mathfrak{X}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\mathfrak{Y}+\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\mathfrak{Z}\right)\partial\mathfrak{X}\\ +\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\mathfrak{X}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\mathfrak{Y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\mathfrak{Z}\right)\partial\mathfrak{Y}\\ +\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\mathfrak{X}+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\mathfrak{Y}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\mathfrak{Z}\right)\partial\mathfrak{Z}\end{array}\right\}=0,$$

wozu noch die aus dem Obigen schon bekannte Gleichung $\mathfrak{X}\partial\mathfrak{X}+\mathfrak{Y}\partial\mathfrak{Y}+\mathfrak{Z}\partial\mathfrak{Z}=0$, und die unmittelbar aus der Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x}\mathfrak{X}+\frac{\partial u}{\partial y}\mathfrak{Y}+\frac{\partial u}{\partial z}\mathfrak{Z}=0$$

sich ergebende Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x}\partial\mathfrak{X}+\frac{\partial u}{\partial y}\partial\mathfrak{Y}+\frac{\partial u}{\partial z}\partial\mathfrak{Z}=0$$

kommt.

Wendet man jetzt auf die drei vorhergehenden, zwischen den Differentialen $\partial\mathfrak{X}$, $\partial\mathfrak{Y}$, $\partial\mathfrak{Z}$ Statt findenden Gleichungen den in VI. bewiesenen Satz an, so erhält man die drei folgenden Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\mathfrak{X}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\mathfrak{Y}+\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\mathfrak{Z}=\mathfrak{X}U+\frac{\partial u}{\partial x}V,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\mathfrak{X}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\mathfrak{Y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\mathfrak{Z}=\mathfrak{Y}U+\frac{\partial u}{\partial y}V,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\mathfrak{X}+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\mathfrak{Y}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\mathfrak{Z}=\mathfrak{Z}U+\frac{\partial u}{\partial z}V.$$

Multiplicirt man diese drei Gleichungen nach der Reihe mit $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ und berücksichtigt die beiden Gleichungen

$$\mathfrak{X}^2+\mathfrak{Y}^2+\mathfrak{Z}^2=R^2,\quad \frac{\partial u}{\partial x}\mathfrak{X}+\frac{\partial u}{\partial y}\mathfrak{Y}+\frac{\partial u}{\partial z}\mathfrak{Z}=0;$$

so erhält man die Gleichung:

$$\begin{aligned}R^2U=&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\mathfrak{X}^2+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\mathfrak{Y}^2+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\mathfrak{Z}^2\\ &+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\mathfrak{X}\mathfrak{Y}+2\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}+2\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\mathfrak{Z}\mathfrak{X},\end{aligned}$$

welche, mit der aus dem Obigen bekannten Gleichung

$$\begin{aligned}R^2\mathfrak{Q}=&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\mathfrak{X}^2+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\mathfrak{Y}^2+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\mathfrak{Z}^2\\ &+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\mathfrak{X}\mathfrak{Y}+2\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}+2\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\mathfrak{Z}\mathfrak{X}\end{aligned}$$

verglichen, auf der Stelle zu der Gleichung $U=\Omega$ führt, weshalb wir von jetzt an im Folgenden für U immer Ω schreiben werden.

Dies vorausgesetzt, kann man die drei obigen Gleichungen zwischen U und V auf folgende Art schreiben:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\Omega\right)\mathfrak{X}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\mathfrak{Y}+\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\mathfrak{Z}=\frac{\partial u}{\partial x}V,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\mathfrak{X}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\Omega\right)\mathfrak{Y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\mathfrak{Z}=\frac{\partial u}{\partial y}V,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\mathfrak{X}+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\mathfrak{Y}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\Omega\right)\mathfrak{Z}=\frac{\partial u}{\partial z}V;$$

und nimmt man hierzu noch die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x}\mathfrak{X}+\frac{\partial u}{\partial y}\mathfrak{Y}+\frac{\partial u}{\partial z}\mathfrak{Z}=0,$$

so hat man die vier folgenden Gleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\mathfrak{X}}{V}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\mathfrak{Y}}{V}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\mathfrak{Z}}{V}=0,$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\Omega\right)\frac{\mathfrak{X}}{V}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\mathfrak{Y}}{V}+\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\cdot\frac{\mathfrak{Z}}{V}=\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\mathfrak{X}}{V}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\Omega\right)\cdot\frac{\mathfrak{Y}}{V}+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\cdot\frac{\mathfrak{Z}}{V}=\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\cdot\frac{\mathfrak{X}}{V}+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\cdot\frac{\mathfrak{Y}}{V}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\Omega\right)\cdot\frac{\mathfrak{Z}}{V}=\frac{\partial u}{\partial z};$$

aus denen sich die drei Grössen

$$\frac{\mathfrak{X}}{V},\quad\frac{\mathfrak{Y}}{V},\quad\frac{\mathfrak{Z}}{V}$$

vollständig eliminiren lassen, was zu einer, bloss noch Ω als unbekannte Grösse enthaltenden Gleichung führt.

Führt man diese Elimination nach der von mir im Archiv Thl. XXIII. S. 286. gelehrten Methode, namentlich nach der dort S. 287. gegebenen merkwürdigen, ganz allgemeinen Formel aus, so erhält man mit der grössten Leichtigkeit nach einigen ganz einfachen Reductionen zur Bestimmung von Ω die folgende schon früher bekannte Gleichung des zweiten Grades:

$$
\begin{aligned}
0= & \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\left\{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\Omega\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\Omega\right)-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\right)^2\right\} \\
& +\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\left\{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\Omega\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\Omega\right)-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}\right)^2\right\} \\
& +\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\left\{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\Omega\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\Omega\right)-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2\right\} \\
& +2 \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}-\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\Omega\right)\right\} \\
& +2 \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial z}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\Omega\right)\right\} \\
& +2 \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}-\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\Omega\right)\right\},
\end{aligned}
$$

oder nach gehöriger Entwickelung und einer leichten Transformation:

$$
\begin{aligned}
0= & \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\} \Omega^2 \\
& -\left\{\begin{array}{l}
\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \\
-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\
-2 \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}-2 \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}-2 \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}
\end{array}\right\} \Omega \\
& +\left(\frac{\partial n}{\partial x}\right)^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\right)^2\right\} \\
& +\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}\right)^2\right\} \\
& +\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2\right\} \\
& +2 \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}-\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \\
& +2 \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \\
& +2 \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}-\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right);
\end{aligned}
$$

und setzen wir nun der Kürze wegen

$$\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}K$$

$$=\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$-2\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-2\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x},$$

$$\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}L$$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)^2\right\}$$

$$+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)^2\right\}$$

$$+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2\right\}$$

$$+2\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$+2\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$$

$$+2\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$

und bezeichnen die zwei Werthe, welche Ω haben kann, wie früher durch Ω und Ω_1, so haben wir zur Bestimmung dieser beiden Grössen die Gleichungen:

$$\Omega+\Omega_1=K,\qquad \Omega\Omega_1=L;$$

durch deren Auflösung man leicht, mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander, erhält:

$$\Omega=\frac{K\pm\sqrt{K^2-4L}}{2},$$

$$\Omega_1=\frac{K\mp\sqrt{K^2-4L}}{2};$$

mittelst welcher Formeln Ω und Ω_1 ganz im Allgemeinen für jede beliebige Fläche bestimmt sind und berechnet werden können.

Weil nach dem Obigen bekanntlich

$$\frac{\partial u}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial u}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial u}{\partial z}(Z-z)=0$$

die Gleichung der Berührungsebene der krummen Fläche in dem Punkte (xyz) ist, so ist, wenn P das von dem Anfange der Coordinaten auf die Berührungsebene gefällte Perpendikel bezeichnet, nach den Lehren der analytischen Geometrie bekanntlich:

$$P^2=\frac{\left(x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2},$$

also:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2=\frac{\left(x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}{P^2},$$

was sich auch in die obigen Formeln einführen liesse.

Repräsentirt Ω nun wieder die beiden so eben durch Ω und Ω_1 bezeichneten Werthe dieser Grösse, so lassen sich, nachdem man Ω gefunden, durch Auflösung der drei Gleichungen

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\Omega\right)\frac{\mathfrak{X}}{V}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\mathfrak{Y}}{V}+\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\cdot\frac{\mathfrak{Z}}{V}=\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\mathfrak{X}}{V}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\Omega\right)\frac{\mathfrak{Y}}{V}+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\cdot\frac{\mathfrak{Z}}{V}=\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\cdot\frac{\mathfrak{X}}{V}+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\cdot\frac{\mathfrak{Y}}{V}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\Omega\right)\frac{\mathfrak{Z}}{V}=\frac{\partial u}{\partial z}$$

auch leicht die drei Grössen

$$\frac{\mathfrak{X}}{V},\quad\frac{\mathfrak{Y}}{V},\quad\frac{\mathfrak{Z}}{V}$$

bestimmen.

Setzt man

$$N=2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}$$

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\Omega\right)-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\Omega\right)-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\Omega\right)$$

$$+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\Omega\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\Omega\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\Omega\right)$$

oder

$$N=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\Omega\right)\right\}$$

$$+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\Omega\right)\right\}$$

$$+\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\Omega\right)\right\}$$

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\Omega\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\Omega\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\Omega\right),$$

und:

$$M=\frac{\partial u}{\partial x}\left\{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\Omega\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\Omega\right)-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)^2\right\}$$

$$+\frac{\partial u}{\partial y}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\Omega\right)\right\}$$

$$+\frac{\partial u}{\partial z}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\Omega\right)\right\},$$

$$M'=\frac{\partial u}{\partial x}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\Omega\right)\right\}$$

$$+\frac{\partial u}{\partial y}\left\{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\Omega\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\Omega\right)-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)^2\right\}$$

$$+\frac{\partial u}{\partial z}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\Omega\right)\right\},$$

$$M''=\frac{\partial u}{\partial x}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\Omega\right)\right\}$$

$$+\frac{\partial u}{\partial y}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\Omega\right)\right\}$$

$$+\frac{\partial u}{\partial z}\left\{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\Omega\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\Omega\right)-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2\right\};$$

so ist

$$\frac{\mathfrak{X}}{V}=\frac{M}{N},\quad \frac{\mathfrak{Y}}{V}=\frac{M'}{N},\quad \frac{\mathfrak{Z}}{V}=\frac{M''}{N};$$

folglich:

$$\mathfrak{X}=\frac{MV}{N},\quad \mathfrak{Y}=\frac{M'V}{N},\quad \mathfrak{Z}=\frac{M''V}{N}.$$

Weil bekanntlich

$$R^2=\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}{\Omega^2}$$

und

$$R^2=\mathfrak{X}^2+\mathfrak{Y}^2+\mathfrak{Z}^2$$

ist, so ist, wie man sogleich übersieht:

$$V^2=\frac{N^2}{\Omega^2}\cdot\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}{M^2+M'^2+M''^2}$$

und

$$\frac{V^2}{R^2}=\frac{N^2}{M^2+M'^2+M''^2}.$$

Nach dem Obigen ist:

$$\cos\theta=\frac{\mathfrak{X}}{R},\quad \cos\omega=\frac{\mathfrak{Y}}{R},\quad \cos\varpi=\frac{\mathfrak{Z}}{R};$$

also:

$$\cos\theta=\frac{M}{N}\cdot\frac{V}{R},\quad \cos\omega=\frac{M'}{N}\cdot\frac{V}{R},\quad \cos\varpi=\frac{M''}{N}\cdot\frac{V}{R};$$

folglich offenbar mit Beziehung der oberen und unteren Vorzeichen auf einander:

$$\cos\theta = \pm \frac{M}{\sqrt{M^2 + M'^2 + M''^2}},$$

$$\cos\omega = \pm \frac{M'}{\sqrt{M^2 + M'^2 + M''^2}},$$

$$\cos\overline{\omega} = \pm \frac{M''}{\sqrt{M^2 + M'^2 + M''^2}}.$$

Zur Bestimmung der Coordinaten X, Y, Z des Mittelpunktes des Krümmungskreises hat man endlich nach II. die Formeln:

$$\mathrm{X} - x = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\Omega}, \quad \mathrm{Y} - y = -\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\Omega}, \quad \mathrm{Z} - z = -\frac{\frac{\partial u}{\partial z}}{\Omega},$$

so dass also jetzt in ganz allgemeinen, für jedes rechtwinklige Coordinatensystem geltenden, völlig entwickelten Formeln Alles bestimmt ist, was irgend zu bestimmen verlangt werden kann.

Mit der Entwickelung gewisser merkwürdiger Relationen, die man durch die bekannte Specialisirung des Coordinatensystems, dass man nämlich den Punkt (xyz) selbst als Anfang der Coordinaten, und die Berührungsebene der Fläche in demselben als Ebene der xy annimmt, sehr leicht erhält, beschäftige ich mich hier nicht, weil ich dabei nur allgemein Bekanntes wiederholen müsste. Mein Zweck ist vollkommen erreicht, wenn es mir gelungen ist, zu ganz allgemeinen, vollständig entwickelten Formeln zu gelangen, die, ohne irgend welche Transformationen der Coordinaten in Anspruch zu nehmen, eine ganz unmittelbare Anwendung auf alle besonderen Arten der Flächen gestatten.

IX.

Untersuchung über die Theile der Wurzeln einer Gleichung des *n*ten Grades, nebst deren Anwendung auf die Auflösung der Gleichung des vierten Grades.

Von

Herrn *L. Mossbrugger*,

Lehrer der Mathematik an der Kantonsschule zu Aarau.

I. Ist allgemein

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 \qquad 1)$$

eine Gleichung des $n$ten Grades, und sind $v_1, v_2, v_3, \ldots v_n$ die Wurzeln dieser Gleichung, so kann dieselbe bekanntlich als ein Produkt von der Form

$$(x - v_1)(x - v_2)(x - v_3) \ldots (x - v_n) = 0$$

betrachtet werden, und es ist für ein gerades n:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = -C_1(v_1 \ldots v_n), \quad a_2 = C_2(v_1 \ldots v_n), \quad a_3 = -C_3(v_1 \ldots v_n), \\ \ldots a_{n-1} = -C_{n-1}(v_1 \ldots v_n), \quad a_n = C_n(v_1 \ldots v_n) \end{array}\right\} \; 2)$$

und für ein ungerades n:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = -C_1(v_1 \ldots v_n), \quad a_2 = C_2(v_1 \ldots v_n), \quad a_3 = -C_3(v_1 \ldots v_n), \\ \ldots a_{n-1} = C_{n-1}(v_1 \ldots v_n), \quad a_n = -C_n(v_1 \ldots v_n) \end{array}\right\} \; 3)$$

II. Setzen wir jetzt in der Gleichung 1) Nr. I. $n = 2m$ und bezeichnen mit $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots \mu_{2m}$ die Wurzeln der Gleichung

$$f(x)=x^{2m}+a_1x^{2m-1}+a_2x^{2m-2}+\ldots+a_{2m-2}x^2+a_{2m-1}x+a_{2m}=0. \quad 1)$$

Schaffen wir auf gewöhnliche Weise das zweite Glied aus dieser Gleichung fort, so wird bekanntlich die transformirte Gleichung folgende:

$$\left.\begin{array}{l} x'^{2m}+\dfrac{\overset{(2m-2)}{f}\left(\dfrac{-a_1}{2m}\right)}{1.2\ldots(2m-2)}\cdot x'^{2m-2}+\dfrac{\overset{(2m-3)}{f}\left(\dfrac{-a_1}{2m}\right)}{1.2\ldots(2m-3)}\cdot x'^{2m-3}+\ldots \\ \ldots+\dfrac{f''\left(\dfrac{-a_1}{2m}\right)}{1.2}x'^2+\dfrac{f'\left(\dfrac{-a_1}{2m}\right)}{1}x'+f\left(\dfrac{-a_1}{2m}\right)=0, \end{array}\right\} \quad 2)$$

worin

$$\overset{(2m-2)}{f}\left(\frac{-a_1}{2m}\right),\quad \overset{(2m-3)}{f}\left(\frac{-a_1}{2m}\right), \text{ u. s. w.}$$

diejenigen Funktionen bezeichnen, welche man erhält, wenn man in die $(2m-2)$te, $(2m-3)$te u. s. w. Ableitung von $f(x)$ die Grösse $\frac{-a_1}{2m}$ statt x substituirt.

Sind nun $\mu'_1, \mu'_2, \mu'_3, \ldots \mu'_{2m}$ die Wurzeln der Gleichung 2), so finden zwischen diesen und den Wurzeln der Gleichung 1) bekanntlich folgende Beziehungen statt:

$$\left.\begin{array}{l} \mu'_1=\mu_1+\dfrac{a_1}{2m},\quad \mu'_2=\mu_2+\dfrac{a_1}{2m},\quad \mu'_3=\mu_3+\dfrac{a_1}{2m}, \\ \ldots \mu'_{2m-1}=\mu_{2m-1}+\dfrac{a_1}{2m},\quad \mu'_{2m}=\mu_{2m}+\dfrac{a_1}{2m}. \end{array}\right\} \quad 3)$$

Sind endlich $z_1, z_2, z_3, \ldots z_{2m}$ die Wurzeln der Gleichung

$$z^{2m}-1=0, \quad 4)$$

so dass also, wenn $i=\sqrt{-1}$ gesetzt wird:

$$\left.\begin{array}{l} z_1=+1,\quad z_3=\cos\dfrac{2\pi}{2m}+i\sin\dfrac{2\pi}{2m},\quad z_5=\cos\dfrac{4\pi}{2m}+i\sin\dfrac{4\pi}{2m},\ldots \\ z_2=-1,\quad z_4=\cos\dfrac{2\pi}{2m}-i\sin\dfrac{2\pi}{2m},\quad z_6=\cos\dfrac{4\pi}{2m}-i\sin\dfrac{4\pi}{2m},\ldots \\ z_{2m-1}=\cos\dfrac{(2m-2)\pi}{2m}+i\sin\dfrac{(2m-2)\pi}{2m}, \\ z_{2m}\;=\cos\dfrac{(2m-2)\pi}{2m}-i\sin\dfrac{(2m-2)\pi}{2m}; \end{array}\right\} \quad 5)$$

so werden wir beweisen, dass die Wurzeln der Gleichung 2) immer unter nachstehende Formen gebracht werden können:

$$\left.\begin{array}{l}
\mu'_1 = p_1z_1 + p_2z_1 + p_3z_1 + p_4z_1 + \ldots + p_{2m-3}z_1 + p_{2m-2}z_1 + p_{2m-1}z_1, \\
\mu'_2 = p_1z_{2m} + p_2z_{2m-1} + p_3z_{2m-2} + p_4z_{2m-3} + \ldots + p_{2m-3}z_4 + p_{2m-2}z_3 + p_{2m-1}z_2, \\
\mu'_3 = p_1z_{2m-1} + p_2z_{2m-2} + p_3z_{2m-3} + p_4z_{2m-4} + \ldots + p_{2m-3}z_3 + p_{2m-2}z_2 + p_{2m-1}z_{2m}, \\
\mu'_4 = p_1z_{2m-2} + p_2z_{2m-3} + p_3z_{2m-4} + p_4z_{2m-5} + \ldots + p_{2m-3}z_2 + p_{2m-2}z_{2m} + p_{2m-1}z_{2m-1}, \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\mu'_{2m-3} = p_1z_5 + p_2z_4 + p_3z_3 + p_4z_2 + \ldots + p_{2m-3}z_8 + p_{2m-2}z_7 + p_{2m-1}z_6, \\
\mu'_{2m-2} = p_1z_4 + p_2z_3 + p_3z_2 + p_4z_{2m} + \ldots + p_{2m-3}z_7 + p_{2m-2}z_6 + p_{2m-1}z_5, \\
\mu'_{2m-1} = p_1z_3 + p_2z_2 + p_3z_{2m} + p_4z_{2m-1} + \ldots + p_{2m-3}z_6 + p_{2m-2}z_5 + p_{2m-1}z_4, \\
\mu'_{2m} = p_1z_2 + p_2z_{2m} + p_3z_{2m-1} + p_4z_{2m-2} + \ldots + p_{2m-3}z_5 + p_{2m-2}z_4 + p_{2m-1}z_3.
\end{array}\right\} 6)$$

Die Anordnung der z ist leicht zu erkennen. Es muss nämlich in jeder Vertikalreihe die Summe der durch die z dargestellten Coefficienten von p_1, p_2, p_3, ... p_{2m-1} immer gleich $z_1 + z_2 + z_3 \ldots + z_{2m-1} + z_{2m}$ sein; ferner darf in keiner Horizontalreihe, mit Ausnahme der ersten, irgend einer der Coefficienten z_1, z_2, z_3, ... z_{2m-1}, z_{2m} mehr als einmal vorkommen; endlich sind p_1, p_2, p_3, ... p_{2m-1} noch zu bestimmende Funktionen von

$$\frac{\overset{(2m-2)}{f}\left(\frac{-a_1}{2m}\right)}{1.2....(2m-2)}, \quad \frac{\overset{(2m-3)}{f}\left(\frac{-a_1}{2m}\right)}{1.2....(2m-3)}, \ldots \frac{f''\left(\frac{-a_1}{2m}\right)}{1.2}, \quad f'\left(\frac{-a_1}{2m}\right), \quad f\left(\frac{-a_1}{2m}\right).$$

III. Ist n eine ungerade Zahl, also $n=2m+1$, und sind $v_1, v_2, v_3, \ldots v_{2m}, v_{2m+1}$ die Wurzeln der Gleichung

$$f(x)=x^{2m+1}+a_1x^{2m}+a_2x^{2m-1}+\ldots+a_{2m-1}x^2+a_{2m}x+a_{2m+1}=0, \quad 1)$$

so erhalten wir aus dieser Gleichung, wie in II. Nr. 2), wenn wir das zweite Glied wegschaffen, folgende:

2)

$$f(x')=x'^{2m+1}+\frac{\overset{(2m-1)}{f}\left(\frac{-a_1}{2m+1}\right)}{1.2....(2m-1)}\cdot x'^{2m-1}+\frac{\overset{(2m-2)}{f}\left(\frac{-a_1}{2m+1}\right)}{1.2....(2m-2)}x'^{2m-2}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{f''\left(\frac{-a_1}{2m+1}\right)}{1.2}\cdot x'^2+\frac{f'\left(\frac{-a_1}{2m+1}\right)}{1}x'+f\left(\frac{-a_1}{2m+1}\right)=0.$$

Sind nun $v'_1, v'_2, v'_3, \ldots v'_{2m}, v'_{2m+1}$ die Wurzeln dieser Gleichung, so finden zwischen den Wurzeln dieser, und den Wurzeln der Gleichung 1) bekanntlich folgende Relationen statt:

$$\left.\begin{array}{l} v'_1=v_1+\frac{a_1}{2m+1}, \quad v'_2=v_2+\frac{a_1}{2m+1}, \quad v'_3=v_3+\frac{a_1}{2m+1}, \\ \ldots v'_{2m}=v_{2m}+\frac{a_1}{2m+1}, \quad v'_{2m+1}=v_{2m+1}+\frac{a_1}{2m+1}. \end{array}\right\} \quad 3)$$

Bezeichnen wir endlich mit $y'_1, y'_2, y'_3, \ldots y'_{2m}, y'_{2m+1}$ die Wurzeln der Gleichung

$$y^{2m+1}+1=0, \quad 4)$$

wo bekanntlich:

5)

$$y'_1=-1, \quad y'_2=\cos\frac{\pi}{2m+1}+i\sin\frac{\pi}{2m+1}, \quad y'_4=\cos\frac{3\pi}{2m+1}+i\sin\frac{3\pi}{2m+1},$$

$$y'_3=\cos\frac{\pi}{2m+1}-i\sin\frac{\pi}{2m+1}, \quad y'_5=\cos\frac{3\pi}{2m+1}-i\sin\frac{3\pi}{2m+1},$$

. . . .

$$y'_{2m-2}=\cos\frac{(2m-3)\pi}{2m+1}+i\sin\frac{(2m-3)\pi}{2m+1}, \quad y'_{2m}=\cos\frac{(2m-1)\pi}{2m+1}+i\sin\frac{(2m-1)\pi}{2m+1},$$

$$y'_{2m-1}=\sin\frac{(2m-3)\pi}{2m+1}-i\sin\frac{(2m-3)\pi}{2m+1}, \quad y'_{2m+1}=\cos\frac{(2m-1)\pi}{2m+1}-i\sin\frac{(2m-1)\pi}{2m+1};$$

so werden wir ebenfalls zeigen, dass die Wurzeln der Gleichung 2) auf nachstehende Formen gebracht werden können:

$$\left.\begin{aligned}
v'_1 &= p_1 y'_1 + p_2 y'_1 + p_3 y'_1 + p_4 y'_1 + \ldots + p_{2m-3} y'_1 + p_{2m-2} y'_1 + p_{2m-1} y'_1 + p_{2m} y'_1,\\
v'_2 &= p_1 y'_{2m+1} + p_2 y'_{2m} + p_3 y'_{2m-1} + p_4 y'_{2m-2} + \ldots + p_{2m-3} y'_5 + p_{2m-2} y'_4 + p_{2m-1} y'_3 + p_{2m} y'_2,\\
v'_3 &= p_1 y'_{2m} + p_2 y'_{2m-1} + p_3 y'_{2m-2} + p_4 y'_{2m-3} + \ldots + p_{2m-3} y'_4 + p_{2m-2} y'_3 + p_{2m-1} y'_2 + p_{2m} y'_{2m+1},\\
v'_4 &= p_1 y'_{2m-1} + p_2 y'_{2m-2} + p_3 y'_{2m-3} + p_4 y'_{2m-4} + \ldots + p_{2m-3} y'_3 + p_{2m-2} y'_2 + p_{2m-1} y'_{2m+1} + p_{2m} y'_{2m},\\
v'_5 &= p_1 y'_{2m-2} + p_2 y'_{2m-3} + p_3 y'_{2m-4} + p_4 y'_{2m-5} + \ldots + p_{2m-3} y'_2 + p_{2m-2} y'_{2m+1} + p_{2m-1} y'_{2m} + p_{2m} y'_{2m-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
v'_{2m-2} &= p_1 y'_5 + p_2 y'_4 + p_3 y'_3 + p_4 y'_2 + \ldots + p_{2m-3} y'_9 + p_{2m-2} y'_8 + p_{2m-1} y'_7 + p_{2m} y'_6,\\
v'_{2m-1} &= p_1 y'_4 + p_2 y'_3 + p_3 y'_2 + p_4 y'_{2m+1} + \ldots + p_{2m-3} y'_8 + p_{2m-2} y'_7 + p_{2m-1} y'_6 + p_{2m} y'_5,\\
v'_{2m} &= p_1 y'_3 + p_2 y'_2 + p_3 y'_{2m+1} + p_3 y'_{2m} + \ldots + p_{2m-3} y'_7 + p_{2m-2} y'_6 + p_{2m-1} y'_5 + p_{2m} y'_4,\\
v'_{2m+1} &= p_1 y'_2 + p_2 y'_{2m+1} + p_3 y'_{2m} + p_4 y'_{2m-1} + \ldots + p_{2m-3} y'_6 + p_{2m-2} y'_5 + p_{2m-1} y'_4 + p_{2m} y'_3.
\end{aligned}\right\} \quad 6)$$

In diesen Gleichungen ist, wie in jenen II. Nr. 6) die Folge der y leicht zu erkennen. Es muss nämlich in jeder **Vertikalreihe** die Summe der durch die y dargestellten Coefficienten von p_1, p_2, $p_3 \dots p_{2m}$ immer gleich $y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{2m} + y_{2m+1}$ sein; auch darf in keiner Horizontalreihe, mit Ausnahme der ersten, einer der Coefficienten $y_1, y_2, y_3, \dots y_{2m}, y_{2m+1}$ mehr als einmal vorkommen; endlich sind ebenfalls $p_1, p_2, p_3, \dots p_{2m}$ noch zu bestimmende Funktionen von

$$\frac{\overset{(2m-1)}{f}\left(\frac{-a_1}{2m+1}\right)}{1.2\dots(2m-1)},\quad \frac{\overset{(2m-2)}{f}\left(\frac{-a_1}{2m+1}\right)}{1.2\dots(2m-2)},\dots$$

$$\dots\frac{\overset{\prime\prime}{f}\left(\frac{-a_1}{2m+1}\right)}{1.2},\quad \frac{\overset{\prime}{f}\left(\frac{-a_1}{2m+1}\right)}{1},\quad f\left(\frac{-a_1}{2m+1}\right).$$

IV. Um die Gleichungen 6) in Nr. II. und III. anschaulicher zu machen, nehmen wir an, es seien ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3, ϑ_4, ϑ_5, ϑ_6, ϑ_7 Wurzeln der Gleichung:

$$x^7 + a_1x^6 + a_2x^5 + a_3x^4 + a_4x^3 + a_5x^2 + a_6x + a_7 = 0, \qquad 1)$$

also $\acute{\vartheta}_1$, $\acute{\vartheta}_2$, $\acute{\vartheta}_3$, $\acute{\vartheta}_4$, $\acute{\vartheta}_5$, $\acute{\vartheta}_6$, $\acute{\vartheta}_7$ die Wurzeln der Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} &\acute{x}^7 + \frac{\overset{V}{f}\left(\frac{-a_1}{7}\right)}{1.2\dots5}\acute{x}^5 + \frac{\overset{IV}{f}\left(\frac{-a_1}{7}\right)}{1.2\dots4}\acute{x}^4 + \frac{\overset{\prime\prime\prime}{f}\left(\frac{-a_1}{7}\right)}{1.2.3}\acute{x}^3 + \frac{\overset{\prime\prime}{f}\left(\frac{-a_1}{7}\right)}{1.2}\acute{x}^2 \\ &\qquad + \overset{\prime}{f}\left(\frac{-a_1}{7}\right)\acute{x} + f\left(\frac{-a_1}{7}\right) = 0; \end{aligned}\right\} \quad 2)$$

so ist die Form der Wurzeln dieser Gleichung nach III. Nr. 6):

$$\left.\begin{aligned} \acute{\vartheta}_1 &= p_1\acute{y}_1 + p_2\acute{y}_1 + p_3\acute{y}_1 + p_4\acute{y}_1 + p_5\acute{y}_1 + p_6\acute{y}_1 \\ \acute{\vartheta}_2 &= p_1\acute{y}_7 + p_2\acute{y}_6 + p_3\acute{y}_5 + p_4\acute{y}_4 + p_5\acute{y}_3 + p_6\acute{y}_2 \\ \acute{\vartheta}_3 &= p_1\acute{y}_6 + p_2\acute{y}_5 + p_3\acute{y}_4 + p_4\acute{y}_3 + p_5\acute{y}_2 + p_6\acute{y}_7 \\ \acute{\vartheta}_4 &= p_1\acute{y}_5 + p_2\acute{y}_4 + p_3\acute{y}_3 + p_4\acute{y}_2 + p_5\acute{y}_7 + p_6\acute{y}_6 \\ \acute{\vartheta}_5 &= p_1\acute{y}_4 + p_2\acute{y}_3 + p_3\acute{y}_2 + p_4\acute{y}_7 + p_5\acute{y}_6 + p_6\acute{y}_5 \\ \acute{\vartheta}_6 &= p_1\acute{y}_3 + p_2\acute{y}_2 + p_3\acute{y}_7 + p_4\acute{y}_6 + p_5\acute{y}_5 + p_6\acute{y}_4 \\ \acute{\vartheta}_7 &= p_1\acute{y}_2 + p_2\acute{y}_7 + p_3\acute{y}_6 + p_4\acute{y}_5 + p_5\acute{y}_4 + p_6\acute{y}_3 \end{aligned}\right\} \quad 3)$$

In diesen Gleichungen wird $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots \vartheta_7$ die Wurzeln der Gleichung

$$y^7+1=0. \qquad 4)$$

Die Grössen $p_1, p_2, \ldots p_6$ sind zu bestimmende Funktionen von

$$\frac{\overset{V}{f}\left(\frac{-a_1}{7}\right)}{1.2\ldots5}, \quad \frac{\overset{IV}{f}\left(\frac{-a_1}{7}\right)}{1.2\ldots4}, \ldots f\left(\frac{-a_1}{7}\right);$$

zwischen den Wurzeln der Gleichung 1) und 2) finden die Relationen

$$\vartheta'_1=\vartheta_1+\frac{a_1}{7}, \quad \vartheta'_2=\vartheta_2+\frac{a_1}{7}, \ldots \vartheta'_7=\vartheta_7+\frac{a_1}{7}$$

statt.

Ganz auf gleiche Art würden nach diesem durch die Gleichungen II. Nr. 6) ausgesprochenen Satze die Wurzeln $\eta'_1, \eta'_2, \eta'_3, \eta'_4, \eta'_5, \eta'_6$ der aus der Gleichung

$$x^6+a_1x^5+a_2x^4+a_3x^3+a_4x^2+a_5x+a_6=0 \qquad 5)$$

durch Hinwegschaffung des zweiten Gliedes abgeleiteten Gleichung

$$\left.\begin{aligned} x'^6+\frac{\overset{IV}{f}\left(\frac{-a_1}{6}\right)}{1.2.3.4}x'^4+\frac{\overset{'''}{f}\left(\frac{-a_1}{6}\right)}{1.2.3}x'^3+\frac{\overset{''}{f}\left(\frac{-a_1}{6}\right)}{1.2}x'^2+\frac{\overset{'}{f}\left(\frac{-a_1}{6}\right)}{1}x' \\ +f\left(\frac{-a_1}{6}\right)=0 \end{aligned}\right\} \quad 6)$$

nachstehende Form haben:

$$\left.\begin{aligned} \eta'_1&=p_1z_1+p_2z_1+p_3z_1+p_4z_1+p_5z_1 \\ \eta'_2&=p_1z_6+p_2z_5+p_3z_4+p_4z_3+p_5z_2 \\ \eta'_3&=p_1z_5+p_2z_4+p_3z_3+p_4z_2+p_5z_6 \\ \eta'_4&=p_1z_4+p_2z_3+p_3z_2+p_4z_6+p_5z_5 \\ \eta'_5&=p_1z_3+p_2z_2+p_3z_6+p_4z_5+p_5z_4 \\ \eta'_6&=p_1z_2+p_2z_6+p_3z_5+p_4z_4+p_5z_3 \end{aligned}\right\} \quad 7)$$

Die Coefficienten $z_1, z_2, \ldots z_6$ sind die Wurzeln der Gleichung

$$z^6-1=0; \qquad 8)$$

$p_1, p_2, \ldots p_5$ sind Funktionen von

$$\frac{\overset{IV}{f}\left(\frac{-a_1}{6}\right)}{1.2.3.4}, \quad \frac{\overset{\prime\prime\prime}{f}\left(\frac{-a_1}{6}\right)}{1.2.3}, \ldots f\left(\frac{-a_1}{6}\right);$$

zwischen den Wurzeln $\eta'_1, \eta'_2, \ldots \eta'_6$ der Gleichung 6) und den Wurzeln $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_6$ finden die Beziehungen

$$\eta'_1 = \eta_1 + \frac{a_1}{6}, \quad \eta'_2 = \eta_2 + \frac{a_1}{6}, \ldots \eta'_6 = \eta_6 + \frac{a_1}{6}$$

statt.

V. Um die Richtigkeit der Annahmen der Gleichungen 6) Nr. II. und III. zu beweisen, bemerken wir, dass bei den Gleichungen 1) und 2) Nr. II. folgende Relationen zwischen den Wurzeln derselben vorkommen müssen; und zwar bei der Gleichung 1):

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 \ldots + \mu_{2m-1} + \mu_{2m} = -a_1; \qquad 1)$$

bei der Gleichung 2):

$$\mu'_1 + \mu'_2 + \mu'_3 + \mu'_4 + \ldots + \mu'_{2m-1} + \mu'_{2m} = 0; \qquad 2)$$

jedoch lässt sich die Gleichung 1) zufolge der Gleichungen 3) Nr. II. auf die Gleichung 2) zurückführen, daher wir nur die Richtigkeit dieser letztern zu zeigen haben.

Addiren wir die Gleichungen 6) Nr. II., so erhalten wir:

$$p_1(z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_{2m}) + p_2(z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_{2m})$$
$$+ p_3(z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_{2m}) + \ldots + p_{2m-1}(z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_{2m})$$
$$= \mu'_1 + \mu'_2 + \mu'_3 + \ldots + \mu'_{2m}$$

oder

$$(z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_{2m})(p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_{2m-1})$$
$$= \mu'_1 + \mu'_2 + \mu'_3 + \ldots + \mu'_{2m}.$$

Nun ist bekanntlich bei den Gleichungen 4) und 5) Nr. II.

$$z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_{2m} = 0,$$

wodurch auch

$$\mu'_1 + \mu'_2 + \mu'_3 + \ldots + \mu'_{2m} = 0$$

wird; folglich wird durch diese Annahme der Wurzelform der in der Gleichung 2) ausgesprochenen Bedingung genügt, und mithin

auch der in der Gleichung 1). Da ferner die Gleichung 2) Nr. II. durch das Produkt

$$(x-\mu'_1)(x-\mu'_2)(x-\mu'_3)\ \ldots\ (x-\mu'_{2m})=0$$

dargestellt werden kann, und bei gehöriger Entwickelung und Identificirung mit der Gleichung 2) Nr. II. gefunden wird, dass

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\overset{(2m-2)}{f}\left(\frac{-a_1}{2m}\right)}{1.2\ldots(2m-2)} &= C_2(\mu'_1\mu'_2\ \ldots\ \mu'_{2m}),\\
\frac{\overset{(2m-3)}{f}\left(\frac{-a_1}{2m}\right)}{1.2\ldots(2m-3)} &= -C_3(\mu'_1\mu'_2\ \ldots\ \mu'_{2m}),\\
\frac{\overset{(2m-4)}{f}\left(\frac{-a_1}{2m}\right)}{1.2\ldots(2m-4)} &= +C_4(\mu'_1\mu'_2\ \ldots\ \mu'_{2m}),\\
&\ldots\ldots\ldots\\
\frac{f'\left(\frac{-a_1}{2m}\right)}{1} &= -C_{2m-1}(\mu'_1\mu'_2\ \ldots\ \mu'_{2m}),\\
f\left(\frac{-a_1}{2m}\right) &= +C_{2m}(\mu'_1\mu'_2\ \ldots\ \mu'_{2m});
\end{aligned}\right\}\ \ldots\ 3)$$

ferner bei jedem der in 6) Nr. II. dargestellten Ausdrücke für die Wurzel $\mu'_1, \mu'_2, \mu'_3, \ldots \mu'_{2m}$ jede der Grössen $p_1, p_2, p_3, \ldots$ $\ldots p_{2m-1}$ vorkommt, so erhalten wir bei gehöriger Entwickelung der Gleichungen 3) zur Bestimmung der Grössen $p_1, p_2, p_3, \ldots p_{2m-1}$ $2m-1$ Gleichungen, welche zu diesem Zwecke erforderlich und hinreichend sind. Aus diesem geht hervor, dass die in 6) Nr. II. dargestellten Wurzelformen der Gleichung 2) Nr. II. allen Anforderungen genügen; zugleich geht auch hieraus hervor, dass keine der Wurzeln $\mu'_1, \mu'_2, \ldots$ weder aus mehr, noch aus weniger Theilen $p_1, p_2, \ldots p_{2m-1}$ bestehen kann. Denn im ersten Fall würden die $2m-1$ Gleichungen in 3) zu deren Bestimmung nicht hinreichen, und im anderen Falle hätte man mehr Gleichungen als zu bestimmende Grössen. Es müsste daher zwischen diesen, also auch zwischen den Wurzeln, eine Beziehung stattfinden, was nicht angenommen werden darf. Ganz auf gleiche Art wird dasselbe in Beziehung auf die Wurzelformen in 6) Nr. III. der Gleichung 2) Nr. III. bewiesen.

Es bleibt uns noch zu untersuchen übrig, welche Modificationen gemacht werden müssen, wenn mehrere, z. B. k gleiche Wurzeln in einer Gleichung des $n$ten Grades vorkommen.

In diesem Falle kann die Gleichung als ein Produkt von der Form

$$(x-\alpha)^k (x-\mu'_1)(x-\mu'_2)(x-\mu'_3)\ldots(x-\mu_{n-k})=0 \qquad 4)$$

betrachtet werden. Wird das Produkt der ungleichen Faktoren entwickelt, so bekommt die Gleichung 4) die Form:

$$(x-\alpha)^k\{x^{n-k}+A_1x^{n-k-1}+A_2x^{n-k-2}+\ldots+A_{n-k-1}x+A_{n-k}\}=0. \qquad 5)$$

Bezeichnen wir die Gleichung 5) mit $F(x)=0$, so ist bekannt, dass eine aus den Wurzeln der $(k-1)$ten Ableitung von $F(x)$ gleich α ist; die $(k-1)$te Ableitung von $F(x)$ ist aber eine Gleichung vom $(n-(k-1))$ten Grade. Wenn daher $z_1, z_2, \ldots z_{n-(k-1)}$ die Wurzeln der Gleichung

$$z^{n-(k-1)}-1=0$$

sind, so bekommt α eine von den in 6) Nr. II. oder III. dargestellten Formen, wenn wir, im Fall $n-(k-1)$ eine gerade Zahl ist, dort $n-(k-1)$ statt $2m$ setzen; ist aber $n-(k-1)$ ungerade, so setzen wir in 6) III. $n-(k-1)$ statt $2m+1$.

Da aber aus 5) zugleich hervorgeht, dass

$$x^{n-k}+A_1x^{n-k-1}+A_2x^{n-k-2}+\ldots+A_{n-k-1}x+A_{n-k}=0,$$

so erhalten die Wurzeln dieser Gleichung, jenachdem $n-k$ gerade oder ungerade ist, Formen, die im ersten Fall nach 6) II., im andern nach 6) III. bestimmt werden, indem wir dort respektive $n-k$ statt $2m$ oder statt $2m+1$ setzen.

VI. Wir sehen aus den Bestimmungsgleichungen 3) Nr. V., dass die symmetrischen Funktionen als ein Haupthülfsmittel zur Bestimmung der Grössen $p_1, p_2, p_3, \ldots$, also auch zur Bestimmung der Wurzeln der Gleichung $n$ten Grades, dienen werden.

Nehmen wir diese Untersuchung bei der Gleichung

$$x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0 \qquad 1)$$

des 4ten Grades vor, welche nach Wegschaffung des zweiten Gliedes übergeht in:

$$x'^4+\frac{f''(-\frac{a_1}{4})}{1.2}x'^2+f'(-\frac{a_1}{4})x'+f(-\frac{a_1}{4})=0. \qquad 2)$$

Bezeichnen wir mit δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 die Wurzeln der Gleichung 1) und mit δ_1', δ_2', δ_3', δ_4' die Wurzeln der Gleichung 2), so müssen diese, wie auch ihre Form beschaffen sein mag, wie wir in V. gesehen haben, vor Allem folgende zwei Bedingungen befriedigen:

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 = -a_1, \quad \ldots\ldots \quad 3)$$

$$\delta_1' + \delta_2' + \delta_3' + \delta_4' = 0. \quad \ldots\ldots \quad 4)$$

Da aber

$$\delta_1' = \delta_1 + \frac{a_1}{4}, \quad \delta_2' = \delta_2 + \frac{a_1}{4}, \quad \delta_3' = \delta_3 + \frac{a_1}{4}, \quad \delta_4' = \delta_4 + \frac{a_1}{4};$$

so wird die Gleichung 3) befriedigt, wenn wir den Wurzeln δ_1', δ_2', δ_3', δ_4' solche Werthe beilegen, dass der Gleichung 4) Genüge geleistet wird. Um dieser Forderung zu entsprechen, nehmen wir die Hülfsgleichung

$$z^4 - 1 = 0 \quad \ldots\ldots \quad 5)$$

an, deren Wurzeln

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= +1, \\ z_2 &= -1, \\ z_3 &= \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = +i, \\ z_4 &= \cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2} = -i \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 6)$$

sind, und wo

$$\left.\begin{aligned} C_1(z_1 \ldots z_4) = C_2(z_1 \ldots z_4) = C_3(z_1 \ldots z_4) = 0, \\ C_4(z_1 \ldots z_4) = 1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 7)$$

ist. Da nun δ_1', δ_2', δ_3', δ_4' die Wurzeln der Gleichung 2) sind, so müssen auch nebst der Bedingungsgleichung 4) noch folgende drei Gleichungen erfüllt werden:

$$\left.\begin{aligned} \frac{f''(-\frac{a_1}{4})}{1.2} &= C_2(\delta_1', \delta_2', \delta_3', \delta_4'), \\ \frac{f'(-\frac{a_1}{4})}{1} &= -C_3(\delta_1', \delta_2', \delta_3', \delta_4'), \\ f(-\frac{a_1}{4}) &= C_4(\delta_1', \delta_2', \delta_3', \delta_4'). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 8)$$

Um die Bedingungsgleichung 4) zu erfüllen, setzen wir in den Gleichungen 6) Nr. II. $m=2$, so erhalten wir nach jenen Gleichungen folgende Wurzelformen für die Gleichung 2):

$$\left.\begin{aligned} \delta_1' &= z_1p_1 + z_1p_2 + z_1p_3, \\ \delta_2' &= z_4p_1 + z_3p_2 + z_2p_3, \\ \delta_3' &= z_3p_1 + z_2p_2 + z_4p_3, \\ \delta_4' &= z_2p_1 + z_4p_2 + z_3p_3. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 9)$$

Addiren wir diese Gleichungen, so erhalten wir:

$$\delta_1' + \delta_2' + \delta_3' + \delta_4' = (z_1 + z_2 + z_3 + z_4)(p_1 + p_2 + p_3).$$

Da aber nach 7) $z_1+z_2+z_3+z_4=0$ ist, so wird auch, die Grössen p_1, p_2, p_3 mögen immerhin Werthe haben, welche sie wollen, die Bedingungsgleichung

$$\delta_1' + \delta_2' + \delta_3' + \delta_4' = 0$$

erfüllt werden, wodurch also dem ersten Erforderniss, welchem bei der Annahme der Form der Wurzeln δ_1', δ_2', δ_3', δ_4' entsprochen werden muss, Genüge geleistet wird.

Bei gehöriger Combination der durch die Gleichungen 9) dargestellten Werthe von δ_1', δ_2', δ_3', δ_4' finden wir mittelst der Gleichungen 8) Nr. VI. leicht nachstehende Bestimmungsgleichungen der Grössen p_1, p_2, p_3:

$$\frac{f''(-\frac{a_1}{4})}{1.2} = k_2''\{p_1p_2 + p_1p_3 + p_2p_3\}, \quad \ldots\ldots \quad 10)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{f'(-\frac{a_1}{4})}{1} = {} & k_2'\{p_1^2p_2 + p_2^2p_3 + p_3^2p_1\} \\ & + k_3'\{p_1^2p_3 + p_2^2p_1 + p_3^2p_2\} + k_4'p_1p_2p_3, \end{aligned}\right\} \quad 11)$$

$$\left.\begin{aligned} f(-\tfrac{a_1}{4}) = {} & k_1\{p_1^4 + p_2^4 + p_3^4\} + k_2\{p_1^3p_2 + p_2^3p_3 + p_3^3p_1\} \\ & + k_3\{p_1^3p_3 + p_2^3p_1 + p_3^3p_2\} + k_4\{p_1^2p_2^2 + p_1^2p_3^2 + p_2^2p_3^2\} \\ & + k_5\{p_1^2p_2p_3 + p_2^2p_1p_3 + p_3^2p_1p_2\}. \end{aligned}\right\} \quad 12)$$

Für die Werthe der Coefficienten k_1, k_2, u. s. w. finden wir mittelst der Gleichungen 6) Nr. VI. leicht:

$$\left.\begin{array}{l} k'_1 = -1, \quad k'_2 = -2i, \quad k'_3 = +2i, \quad k'_4 = +2, \quad k'_5 = -2, \\ k''_2 = -2+2i, \quad k''_3 = -2-2i, \quad k''_4 = 4, \quad k'''_2 = -2. \end{array}\right\} \quad 13)$$

Wir haben also statt der Gleichungen 10), 11) und 12) folgende:

$$\frac{f''(-\frac{a_1}{4})}{1.2} = -2(p_1p_2 + p_1p_3 + p_2p_3), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 14)$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{f'(-\frac{a_1}{4})}{1} = 2\{(-1+i)(p_1{}^2p_2 + p_2{}^2p_3 + p_3{}^2p_1) \\ \qquad + (-1-i)(p_1{}^2p_3 + p_2{}^2p_1 + p_3{}^2p_2) + 2p_1p_2p_3\} \end{array}\right\} \quad 15)$$

$$\left.\begin{array}{l} f(-\frac{a_1}{4}) = -p_1{}^4 - p_2{}^4 - p_3{}^4 - 2i(p_1{}^3p_2 + p_2{}^3p_3 + p_3{}^3p_1) \\ \qquad + 2i(p_1{}^3p_3 + p_2{}^3p_1 + p_3{}^3p_2) + 2(p_1{}^2p_2{}^2 + p_1{}^2p_3{}^2 + p_2{}^2p_3{}^2) \\ \qquad - 2(p_1{}^2p_2p_3 + p_2{}^2p_1p_3 + p_3{}^2p_1p_2). \end{array}\right\} \quad 16)$$

Vervielfachen wir nun die Gleichung 14) mit $(p_1 + p_2 + p_3)^2$, die Gleichung 15) mit $p_1 + p_2 + p_3$, die Gleichung 16) mit 1, addiren alsdann zu der Summe dieser Produkte auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens das Glied $(p_1 + p_2 + p_3)^4$, so erhalten wir:

17)

$$(p_1+p_2+p_3)^4 + \frac{f''(-\frac{a_1}{4})}{1.2}(p_1+p_2+p_3)^2 + \frac{f'(-\frac{a_1}{4})}{1}(p_1+p_2+p_3) + f(-\frac{a_1}{4})$$

$$= (p_1 + p_2 + p_3)^4 - 2(p_1p_2 + p_1p_3 + p_2p_3)(p_1 + p_2 + p_3)^2$$

$$+ 2\{(-1+i)(p_1{}^2p_2 + p_2{}^2p_3 + p_3{}^2p_1) + (-1-i)(p_1{}^2p_3 + p_2{}^2p_1 + p_3{}^2p_2)$$

$$+ 2p_1p_2p_3\}(p_1 + p_2 + p_3)$$

$$- p_1{}^4 - p_2{}^4 - p_3{}^4 - 2i(p_1{}^3p_2 + p_2{}^3p_3 + p_3{}^3p_1) + 2i(p_1{}^3p_3 + p_2{}^3p_1 + p_3{}^3p_2)$$

$$+ 2(p_1{}^2p_2{}^2 + p_1{}^2p_3{}^2 + p_2{}^2p_3{}^2) - 2p_1p_2p_3(p_1 + p_2 + p_3).$$

Bemerken wir aber, dass nach der ersten der Gleichungen 9) in Nr. VI., weil $z_1 = 1$ ist, $\delta_1' = p_1 + p_2 + p_3$ eine Wurzel der Gleichung 2) Nr. VI. ist, durch deren Substitution in jener Gleichung selbige auf Null reducirt wird. Da nun der erste Theil der Glei-

chung 17) mit jener identisch wird, so ist auch dieser, und daher auch der zweite Theil derselben gleich Null. Durch Entwickelung finden wir aber leicht, dass

$$-2i(p_1^2p_3+p_2^2p_1+p_3^2p_2-p_1^2p_2-p_2^2p_3-p_3^2p_1)(p_1+p_2+p_3)$$
$$-2i(p_1^3p_2+p_2^3p_3+p_3^3p_1-p_1^3p_3-p_2^3p_1-p_3^3p_2)=0$$

eine identische Gleichung ist; folglich wird auch

18)
$$(p_1+p_2+p_3)^4-2(p_1p_2+p_1p_3+p_2p_3)(p_1+p_2+p_3)^2$$
$$-2\{p_1^2p_2+p_2^2p_3+p_3^2p_1+p_1^2p_3+p_2^2p_1+p_3^2p_2-p_1p_2p_3\}(p_1+p_2+p_3)$$
$$-p_1^4-p_2^4-p_3^4+2(p_1^2p_2^2+p_1^2p_3^2+p_2^2p_3^2)=0$$

eine solche. Diese Gleichung kann aber durch eine leichte Umwandlung auf folgende reducirt werden:

19)
$$(p_1+p_2+p_3)^4-2(p_1^2+p_2^2+p_3^2)(p_1+p_2+p_3)^2-8p_1p_2p_3(p_1+p_2+p_3)$$
$$-(p_1^2+p_2^2+p_3^2)^2+2(p_1^4+p_2^4+p_3^4)=0,$$

welche daher auch ebenfalls identisch und symmetrisch ist. Wenn wir aber die Gleichung:

20)
$$(p_1+p_2+p_3)^4+\frac{f''(-\frac{a_1}{4})}{1.2}(p_1+p_2+p_3)^2+\frac{f'(-\frac{a_1}{4})}{1}(p_1+p_2+p_3)+f(-\frac{a_1}{4})$$
$$=0$$

mit der Gleichung 19) identificiren, so erhalten wir zur Bestimmung von p_1, p_2, p_3 folgende drei Gleichungen:

$$2(p_1^2+p_2^2+p_3^2)=-\frac{f''(-\frac{a_1}{4})}{1.2}, \quad \ldots \ldots \quad 21)$$

$$8p_1p_2p_3=-f'(-\frac{a_1}{4}), \quad \ldots \ldots \quad 22)$$

$$-(p_1^2+p_2^2+p_3^2)^2+2(p_1^4+p_2^4+p_3^4)=f(-\frac{a_1}{4}). \quad . \quad 23)$$

Aus 21) ist

$$p_1^2+p_2^2+p_3^2=-\frac{f''(-\frac{a_1}{4})}{4},$$

also auch

$$p_1^4+p_2^4+p_3^4+2p_1^2p_2^2+2p_1^2p_3^2+2p_2^2p_3^2=\frac{\{\overset{\prime\prime}{f}(-\frac{a_1}{4})\}^2}{16},$$

mithin wegen 21) und 23):

$$p_1^2p_2^2+p_1^2p_3^2+p_2^2p_3^2=\frac{\{\overset{\prime\prime}{f}(-\frac{a_1}{4})\}^2}{64}-\frac{f(-\frac{a_1}{4})}{4}$$

oder

$$p_1^2p_2^2+p_1^2p_3^2+p_2^2p_3^2=\frac{\{\overset{\prime\prime}{f}(-\frac{a_1}{4})\}^2-16f(-\frac{a_1}{4})}{64}. \quad . \quad 24)$$

Dividiren wir die Gleichung 21) mit 2 und multipliciren den Quotienten mit p_1^2, so kommt:

$$p_1^4+p_1^2p_2^2+p_1^2p_3^2=-\frac{\overset{\prime\prime}{f}(-\frac{a_1}{4})}{4}.p_1^2;$$

da aber auch aus 24)

$$p_1^2p_2^2+p_1^2p_3^2=\frac{\{\overset{\prime\prime}{f}(-\frac{a_1}{4})\}^2-16f(-\frac{a_1}{4})}{64}-p_2^2p_3^2$$

und aus 22)

$$p_2^2p_3^2=\frac{\{\overset{\prime}{f}(-\frac{a_1}{4})\}^2}{64p_1^2}$$

ist, so haben wir die Gleichung:

25)

$$p_1^6+\frac{\overset{\prime\prime}{f}(-\frac{a_1}{4})}{4}.p_1^4+\frac{[\{\overset{\prime\prime}{f}(-\frac{a_1}{4})\}^2-16f(-\frac{a_1}{4})]}{64}p_1^2-\frac{\{\overset{\prime}{f}(-\frac{a_1}{4})\}^2}{64}=0.$$

VII. Wir haben in der vorigen Nummer die Gleichung 2) der Nr. VI. auf eine Gleichung des dritten Grades zurückgebracht und könnten sie daher als gelöst betrachten. Um jedoch zu zeigen, dass auch diese nach dem bisher gezeigten Verfahren gelöst werden kann, setzen wir der Kürze wegen in der Gleichung 25) Nr. VI.

t statt p_1^2, A statt $\frac{\overset{\prime\prime}{f}(-\frac{a_1}{4})}{4}$, B statt $\frac{\{\overset{\prime\prime}{f}(-\frac{a_1}{4})\}^2-16f(-\frac{a_1}{4})}{64}$,

und $-C$ statt $\frac{\{\overset{\prime}{f}(-\frac{a_1}{4})\}^2}{64}$, so erhalten wir:

$$t^3 + At^2 + Bt + C = 0, \quad \ldots\ldots\ldots 1)$$

oder, wenn wir $t' - \frac{A}{3} = t$ setzen:

$$t'^3 + F'(-\frac{A}{3})t' + F(-\frac{A}{3}) = 0. \quad \ldots\ldots 2)$$

Hier bezeichnen $F(-\frac{A}{3})$ und $F'(-\frac{A}{3})$ wieder dasjenige, was man erhält, wenn man in der Gleichung 1) und deren erster Ableitung $(-\frac{A}{3})$ statt t setzt. Sind nun z_1, z_2, z_3 die Wurzeln der Gleichung

$$z^3 + 1 = 0, \quad \ldots\ldots\ldots 3)$$

so dass also:

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= -1, \\ z_2 &= \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \\ z_3 &= \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 4)$$

und bezeichnen γ'_1, γ'_2, γ'_3 die Wurzeln der Gleichung 2), so ist nach 2) Nr. III.:

$$\left.\begin{aligned} \gamma'_1 &= z_1 q_1 + z_1 q_2, \\ \gamma'_2 &= z_2 q_1 + z_3 q_2, \\ \gamma'_3 &= z_3 q_1 + z_2 q_2. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots 5)$$

Nach 3) Nr. V. finden daher die Bedingungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} F'(-\frac{A}{3}) &= C_2(\gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3), \\ F(-\frac{A}{3}) &= -C_3(\gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots 6)$$

statt. Durch Combination und gehörige Reduktion finden wir:

$$F'(-\frac{A}{3}) = k_1 q_1 q_2,$$

$$F(-\frac{A}{3}) = k_1(q_1^3 + q_2^3) + k_2(q_1^2 q_2 + q_1 q_2^2).$$

Aus 4) folgt aber, dass $k_1'' = -3$, $k_1' = 1$, $k_2 = 0$ ist, so dass wir also zur Bestimmung von q_1, q_2 die Gleichungen

$$F'(-\frac{A}{3}) = -3q_1q_2, \quad F(-\frac{A}{3}) = q_1^3 + q_2^3 \quad . \; . \; . \; 7)$$

haben, woraus die Gleichung

$$q_1^6 - F(-\frac{A}{3})q_1^3 - \frac{\{F'(-\frac{A}{3})\}^3}{27} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; 8)$$

hervorgeht. Die Wurzeln dieser Gleichung sind:

$$q_1 = \sqrt[3]{\frac{F(-\frac{A}{3}) + \sqrt{\{F(-\frac{A}{3})\}^2 + \frac{4\{F'(-\frac{A}{3})\}^3}{27}}}{2}} = G,$$

$$q_2 = \sqrt[3]{\frac{F(-\frac{A}{3}) - \sqrt{\{F(-\frac{A}{3})\}^2 + \frac{4\{F'(-\frac{A}{3})\}^3}{27}}}{2}} = H;$$

mithin sind nach 4) und 5) die Wurzeln der Gleichung 2):

$$\gamma_1' = -G - H,$$

$$\gamma_2' = \frac{(1 - i\sqrt{3})}{2} G + \frac{(1 + i\sqrt{3})}{2} H,$$

$$\gamma_3' = \frac{(1 + i\sqrt{3})}{2} G + \frac{(1 - i\sqrt{3})}{2} H.$$

Daher sind auch die Wurzeln der Gleichung 1):

$$\gamma_1 = -\frac{A}{3} - G - H = p_1^2,$$

$$\gamma_2 = -\frac{A}{3} + \frac{(1 - i\sqrt{3})}{2} G + \frac{(1 + i\sqrt{3})}{2} H = p_2^2,$$

$$\gamma_3 = -\frac{A}{3} + \frac{(1 + i\sqrt{3})}{2} G + \frac{(1 - i\sqrt{3})}{2} H = p_3^2.$$

Hieraus können die Werthe von p_1, p_2, p_3, und daher mittelst dieser und der Gleichungen 9) Nr. VI. die Wurzel der Gleichung 2) Nr. VI. bestimmt werden.

Würden nun bei Gleichungen höheren Grades die auf diesem Wege zu erhaltenden identischen und symmetrischen Gleichungen auf solche zurückgeführt werden können, die mittelst ihrer Identificirung mit der gegebenen zwischen den Wurzeltheilen p_1, p_2,.... und den Funktionen der Coefficienten a_1, a_2,.... zu Bestimmungsgleichungen von jenen führen würden, welche eine Endgleichung von niedrigerm Grade als die gegebene zur Folge hätten, so wäre die Auflösung der algebraischen Gleichungen keinen weiteren Schwierigkeiten unterworfen; aber schon bei der Gleichung des 5ten Grades führt diese Combination auf eine Gleichung vom 20sten Grade. Diese Gleichung habe ich mit grosser Mühe hergeleitet und bin dabei auf viele Relationen, die zwischen den Coefficienten, welche ich oben mit k'_1, k''_1.... bezeichnet habe, gekommen. Da jedoch jene lange Entwickelung diesen Aufsatz für das Archiv zu weitläufig machen würde, so schliesse ich hiermit diese Untersuchung.

X.

Theorie des Foucault'schen Pendelversuchs, aus neuen Gesichtspunkten dargestellt, mit Rücksicht auf die ellipsoidische Gestalt der Erde *).

Von
dem Herausgeber.

Einleitung.

Der berühmte Pendelversuch von Foucault hat mit Recht das grösste Interesse aller Mathematiker und Physiker, ja des ganzen gebildeten Publikums für sich in Anspruch genommen, und es hat daher auch nicht an einer grossen Menge von Versuchen gefehlt, die Theorie desselben in möglichst elementarer Weise

*) In der Abhandlung Thl. XXVII. Nr. XXV. habe ich die Theorie des Foucault'schen Pendelversuchs nach den von mir angegebenen Principien absichtlich bloss für die kugelförmige Erde entwickelt, um so wenig wie möglich vorauszusetzen, und die Sache so elementar wie möglich zu behandeln. Die Wichtigkeit des Gegenstandes und das, wie ich glaube, Lehrreiche der folgenden analytischen Untersuchung veranlasst mich aber jetzt, denselben noch einer neuen Behandlung unter Voraussetzung der ellipsoidischen Gestalt der Erde zu unterwerfen, wenn sich auch freilich mittelst einer ganz einfachen geometrischen Betrachtung gleich von vornherein leicht übersehen lässt, dass unter dieser Voraussetzung die obwaltenden Gesetze nicht wesentlich verschieden von denen bei der Kugel sein können. Absichtlich habe ich die Darstellung ganz unabhängig von der früheren Abhandlung gehalten.

zu entwickeln, wobei man von verschiedenen Gesichtspunkten ausgegangen ist. So gern ich auch das Verdienstliche mancher dieser theoretischen Entwickelungen, bei denen man sich übrigens selbst des Gebrauchs der Differential- und Integralrechnung nicht immer hat entschlagen können, insbesondere für Lehrzwecke, anzuerkennen bereit bin: so kann ich doch, ohne hier auf eine in's Einzelne gehende Kritik dieser verschiedenen Versuche mich einlassen zu können und zu wollen, nicht sagen, dass ich in wissenschaftlicher Rücksicht durch einen derselben vollständig befriedigt worden wäre, sondern muss vielmehr bekennen, dass, namentlich vom mathematischen Standpunkte aus, eine allen Anforderungen genügende streng wissenschaftliche, dabei aber doch möglichst elementar gehaltene Darstellung des so ungemein wichtigen und interessanten Versuchs mir immer noch zu wünschen übrig zu bleiben scheint. Ich habe schon vorher erinnert, dass auf eine in's Einzelne gehende Kritik der bis jetzt bekannt gewordenen theoretischen Darstellungen mich einzulassen, hier durchaus nicht in meiner Absicht liegt, will aber doch nicht unterlassen, kurz zu sagen, was im Allgemeinen dieselben mir noch zu wünschen übrig zu lassen scheinen.

Vor allen Dingen vermisse ich fast bei allen diesen Beweisen eine kurze und deutliche Angabe der allgemeinen Principien, auf denen dieselben beruhen, wie man sie bei allen derartigen Untersuchungen wünschen muss, wenn eine vollkommen deutliche Einsicht in die eigentliche Natur der Sache vermittelt werden soll. Namentlich aber vermisse ich **erstens**, worauf doch hier natürlich zunächst Alles ankommt, die ganz deutliche und bestimmte Aufstellung eines Princips, nach welchem in jedem Zeitmomente die Lage der Schwingungsebene des Pendels bestimmt werden muss. In dieser Beziehung scheinen mir bei Weitem die meisten der bisher bekannt gewordenen Beweise auf sehr unklaren Vorstellungen zu beruhen, höchstens als Näherungen zu betrachten zu sein, und eben deshalb namentlich **den** Lernenden, welche in mathematischer Rücksicht gewöhnt sind, mit dergleichen unklaren Vorstellungen sich nicht zu begnügen und bloss durch völlige Strenge und Evidenz zu wahrer Ueberzeugung zu gelangen, nur wenig Befriedigung zu gewähren. Weil nun aber eben die strenge und deutliche Angabe der zu Grunde liegenden allgemeinen Principien bei diesen Beweisen meistens fehlt, so entsteht daraus von selbst **zweitens** der Mangel, dass die weitere mathematische Entwickelung nicht, wie man bei allen solchen Untersuchungen fordern muss, als der reine Ausdruck jener Principien, in mathematischen oder analytischen Zeichen und Formeln zu betrachten

ist, was für den Lernenden neue Verwickelungen und Undeutlichkeiten herbeiführt. Drittens bringen die Beweise, welche sich der Differential- und Integralrechnung bedienen, diese Wissenschaften nicht in der strengen Weise in Anwendung, welche die neuere Analysis fordert; und überhaupt bin ich der Meinung, dass man bei Gegenständen von der Art des vorliegenden immer lieber auf ursprüngliche strenge Gränzenbetrachtungen zurückgehen sollte, wodurch jedenfalls die wahrhaft deutliche Einsicht in deren eigentliche Natur sehr gefördert wird. Endlich setzen viertens die bisher bekannt gewordenen theoretischen Darstellungen des Foucault'schen Pendelversuchs die Erde als Kugel voraus, und betrachten dieselbe nicht als Ellipsoid, was sie doch eigentlich ist. Allerdings lässt sich im vorliegenden Falle gleich von vorn herein leicht übersehen, dass die für die Kugel geltenden Gesetze mit sehr geringen Modificationen auch für das Umdrehungs-Ellipsoid gelten müssen. Dies hindert aber nicht, zu wünschen, dass die theoretische Betrachtung gleich vom Anfange an in geeigneter Weise an die ellipsoidische Gestalt der Erde angeschlossen, und auf dem Wege des strengen mathematischen Calculs nachgewiesen werde, wie und in welcher Weise die hier obwaltenden Gesetze auch für diese letztere Gestalt des Erdkörpers nothwendig gelten.

Indem ich diese Mängel der bisherigen theoretischen Darstellungen des Foucault'schen Pendelversuchs rüge, ist mir der Weg, den ich bei meinen eigenen folgenden Entwickelungen einzuschlagen habe, von selbst vorgezeichnet. Ich werde daher zuerst und vor allen Dingen die allgemeinen Principien, welche, als aus der Natur des Versuchs sich ganz von selbst ergebend, der theoretischen Entwickelung zu Grunde zu legen sind, mit möglichster Kürze und Bündigkeit angeben, worauf dann die weiteren Entwickelungen im Grunde nichts Anderes sein werden, als die Uebertragung dieser Principien in die Sprache der mathematischen Analysis. Dabei setze ich aber gleich vom Anfange an die ellipsoidische Gestalt der Erde voraus, und gebe, was immer bei dergleichen Untersuchungen, wenn völlige Strenge und Deutlichkeit erreicht werden soll, mir nöthig zu sein scheint, zuerst das durch den Versuch selbst allerdings zur Geltung kommende Princip der Stetigkeit auf, was mich zur Lösung verschiedener, an sich nicht uninteressanter Probleme der Geometrie des Raumes, und zu verschiedenen eleganten analytischen Ausdrücken führt, worauf dann endlich mittelst einer völlig strengen, an sich sehr einfachen Gränzenbetrachtung das Princip der Stetigkeit wieder aufgenommen wird, und dadurch sogleich die bei dem so merk-

würdigen Versuch zur Geltung kommenden Gesetze mit völliger Deutlichkeit und Bestimmtheit hervortreten.

Dass die in dieser strengen Weise geführte Untersuchung nicht ganz kurz und einfach ausfallen kann, liegt schon deshalb in der Natur der Sache, weil dieselbe mehr leistet, als die Erklärung des Versuchs an sich eigentlich verlangt, indem sie zugleich zu verschiedenen im Raume geltenden Gesetzen oder Beziehungen führt, die auch an sich nicht ohne geometrisches Interesse sind. Dabei ist aber zu bemerken, dass für einen jeden, der mit den Lehren der analytischen Geometrie vertraut ist, die Durchführung dieser ganzen Untersuchung keine grosse Schwierigkeit haben kann, weil dieselbe in der That eigentlich nichts weiter ist und nichts weiter fordert, als die Uebertragung der vorher deutlich und bestimmt ausgesprochenen, hier zur Geltung kommenden allgemeinen Principien in die Sprache der mathematischen Analysis. Dass aber alle Untersuchungen dieser Art mit Hülfe der analytischen Geometrie mit weit grösserer Strenge und Eleganz, als mittelst anderer mathematischer Methoden geführt werden, wird Jeder zugeben, der in dem Gebrauche dieses wichtigen Hülfsmittels gehörig geübt und bewandert ist; deshalb ist dasselbe von mir im Folgenden auch durchgängig in Anwendung gebracht worden.

I.

Die allgemeinen Principien.

Wenn das in einem beliebigen Punkte der Oberfläche der um ihre Axe sich drehenden Erde, die wir hier als ein Ellipsoid betrachten, in geeigneter Weise aufgehängte Pendel in einer beliebigen Ebene in Schwingungen versetzt wird, so wird die Schwingungsebene

erstens durch die Schwerkraft genöthigt werden, fortwährend durch die Normale des Punktes der Erdoberfläche, in welchem das Pendel aufgehängt ist, zu gehen;

zweitens aber vermöge der Trägheit der Pendelmasse das Bestreben haben, ihre Lage im Raume nicht zu verändern, d. h. sich selbst im Raume fortwährend parallel zu bleiben.

Diesem letzteren Bestreben würde die Schwingungsebene in der That auch vollständig folgen, wenn die Schwerkraft nicht vorhanden wäre, welche sie verhindert, demselben vollständig zu folgen; daher wird sie dem durch die Trägheit ihr eingedrückten Bestreben,

bei der Bewegung der Erde fortwährend sich selbst parallel zu bleiben, nur so weit oder in dem Maasse folgen, als es ihr von der Schwerkraft, die sie nöthigt, unausgesetzt durch die Normale des Punktes der Erdoberfläche, in welchem das Pendel aufgehängt ist, den wir von jetzt an den Beobachtungsort nennen wollen, zu gehen, gewissermaassen erlaubt oder gestattet wird. Hiernach wird also bei der Bewegung der Erde um ihre Axe die Schwingungsebene des Pendels offenbar stets eine solche Lage im Raume annehmen müssen, dass sie immer durch die Normale des Beobachtungsorts geht, und die, ihre in stetiger Folge unmittelbar vorhergehende Lage darstellende Ebene zwar schneidet, aber so schneidet, dass sie möglichst wenig von der zu derselben parallelen Lage abweicht. Bringen wir dieses hier im Allgemeinen ausgesprochene Princip auf einen strengen geometrischen Ausdruck, wie es die auf dasselbe zu gründende strenge mathematische Untersuchung fordert und gebietet, so wird sich für die Bestimmung der Lage der Schwingungsebene des Pendels in jedem Zeitmomente das folgende geometrische Princip ergeben:

Die Schwingungsebene des Pendels nimmt bei der Drehung der Erde in jedem Zeitmomente eine solche Lage im Raume an, dass sie durch die Normale des Beobachtungsorts geht, und die, ihre in stetiger Folge unmittelbar vorhergehende Lage darstellende Ebene unter dem kleinsten Winkel schneidet, unter dem diese Ebene überhaupt von ihr geschnitten werden kann.

Dieser Lagenbestimmung der Schwingungsebene des Pendels nun einen Ausdruck in analytischen Formeln zu geben, werden wir, was bei derartigen Untersuchungen immer zweckmässig und der Erreichung wahrer mathematischer Strenge und Evidenz in jeder Rücksicht förderlich ist, zuerst das bei derselben zur Geltung kommende Princip der Stetigkeit aufgeben müssen, und demzufolge zunächst das folgende geometrische Problem im Allgemeinen aufzulösen haben:

Durch einen gegebenen Punkt auf der um ihre Axe sich drehenden Erde, bei einer bestimmten Lage derselben, ist eine zugleich durch die Normale des in Rede stehenden Punktes gehende Ebene von gegebener Lage gelegt; wenn nun vermöge der Drehung der Erde um ihre Axe dieser Punkt in eine andere beliebige Lage gekommen ist, so soll man die Lage einer durch diesen Punkt und die demselben entsprechende Normale der Erdoberfläche gehenden Ebene bestim-

men, welche die erstere Ebene unter dem kleinsten Winkel schneidet, unter welchem dieselbe überhaupt von einer solchen Ebene geschnitten werden kann.

Wenn uns die Auflösung dieses, zuerst den Fall der Discontinuität in's Auge fassenden Problems in zweckentsprechender Weise gelungen sein wird, so wird es, wie wir weiter unten sehen werden, dann auch leicht sein, durch einen strengen Gränzenübergang unmittelbar zu dem Falle der Continuität zu gelangen, welcher, wie aus dem Obigen unmittelbar hervorgeht, hier durch die Natur der Sache von selbst gefordert wird.

II.

Analytische Auflösung der vorhergehenden Aufgabe.

Durch den als fest gedachten Mittelpunkt der Erde, deren grosse und kleine Halbaxe wir, wie gewöhnlich, durch a und b bezeichnen, legen wir ein festes rechtwinkliges Coordinatensystem der xyz. Die Ebene der xy sei die Ebene des Aequators, so dass also die Axe der z mit der Erdaxe zusammenfällt. Der positive Theil der Axe der x kann beliebig angenommen werden, der positive Theil der Axe der y aber werde so angenommen, dass man sich, um von dem positiven Theile der Axe der x durch den rechten Winkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen, nach derselben Richtung hin bewegen muss, nach welcher die Erde sich um ihre Axe dreht; endlich sei der positive Theil der Axe der z von dem Mittelpunkte der Erde nach deren Nordpole hin gerichtet. Dies vorausgesetzt, wollen wir uns nun den Beobachtungsort, in welchem das Pendel aufgehängt ist, in einer beliebigen Lage denken und die folgenden Bezeichnungen einführen. Der von dem Mittelpunkte der Erde nach dem Beobachtungsorte gezogene Erdhalbmesser sei r. Der Winkel, welchen die Projection dieses Erdhalbmessers auf der Ebene der xy mit dem positiven Theile der Axe der x einschliesst, indem man diesen Winkel von dem positiven Theile der Axe der x an nach dem positiven Theile der Axe der y hin, oder durch den rechten Winkel (xy) hindurch, von 0 bis 360^0 zählt, werde durch ω bezeichnet. Endlich sei B die geographische Breite des Beobachtungsorts, worunter man den 90^0 nicht übersteigenden, aber, jenachdem der Beobachtungsort in der nördlichen oder südlichen Erdhälfte liegt, als positiv oder negativ betrachteten Winkel versteht, unter welchem die Normale des Beobachtungsorts gegen die Ebene des Aequators, also gegen die Ebene der xy geneigt

ist. Durch die drei Elemente ω, B, r wird die Lage des Beobachtungsorts auf der Erdoberfläche bestimmt.

Von der geographischen Breite des Beobachtungsorts, welche eigentlich dessen Polhöhe ist, unterscheidet sich bekanntlich seine geocentrische Breite, worunter man den 90°. nicht übersteigenden, aber, jenachdem der Beobachtungsort in der nördlichen oder südlichen Erdhälfte liegt, als positiv oder negativ betrachteten Winkel versteht, unter welchem der nach dem Beobachtungsorte gezogene Erdhalbmesser gegen die Ebene des Aequators geneigt ist. Bezeichnen wir die geocentrische Breite durch $\mathfrak{B}$, so hat man, wie leicht erhellet, die folgenden Vergleichungen:

$$\operatorname{tang}\mathfrak{B}=\frac{b^2}{a^2}\operatorname{tang}B,\quad \operatorname{tang}B=\frac{a^2}{b^2}\operatorname{tang}\mathfrak{B}.$$

Ganz vorzügliche Bequemlichkeit gewährt aber die Einführung der sogenannten reducirten Breite des Beobachtungsorts, worunter man den 90° nicht übersteigenden, aber, jenachdem der Beobachtungsort in der nördlichen oder südlichen Erdhälfte liegt, als positiv oder negativ betrachteten Winkel $\overline{\omega}$ versteht, welcher aus der geographischen oder geocentrischen Breite mittelst der Formeln

$$\operatorname{tang}\overline{\omega}=\frac{b}{a}\operatorname{tang}B,\quad \operatorname{tang}\overline{\omega}=\frac{a}{b}\operatorname{tang}\mathfrak{B}$$

gefunden wird.

Besonders einfach lassen sich durch die reducirte Breite des Beobachtungsorts dessen Coordinaten ausdrücken. Denn bezeichnen wir diese Coordinaten durch X, Y, Z; so ist offenbar:

$$X=r\cos\omega\cos\mathfrak{B},\quad Y=r\sin\omega\cos\mathfrak{B},\quad Z=r\sin\mathfrak{B}.$$

Wegen der Gleichung des Erdellipsoids ist aber

$$\frac{X^2+Y^2}{a^2}+\frac{Z^2}{b^2}=1,\ \text{also}\ \left(\frac{\cos\mathfrak{B}^2}{a^2}+\frac{\sin\mathfrak{B}^2}{b^2}\right)r^2=1;$$

woraus sogleich

$$r=\frac{ab}{\sqrt{a^2\sin\mathfrak{B}^2+b^2\cos\mathfrak{B}^2}}$$

folgt. Aus der Gleichung

$$\operatorname{tang}\mathfrak{B}=\frac{b}{a}\operatorname{tang}\overline{\omega}$$

ergiebt sich aber:

$$\sin\mathfrak{B}=\frac{b\sin\overline{\omega}}{\sqrt{a^2\cos\overline{\omega}^2+b^2\sin\overline{\omega}^2}},\quad \cos\mathfrak{B}=\frac{a\cos\overline{\omega}}{\sqrt{a^2\cos\overline{\omega}^2+b^2\sin\overline{\omega}^2}};$$

folglich

$$\sqrt{a^2\sin\mathfrak{B}^2+b^2\cos\mathfrak{B}^2}=\frac{ab}{\sqrt{a^2\cos\overline{\omega}^2+b^2\sin\overline{\omega}^2}},$$

und daher nach dem Obigen:

$$r=\sqrt{a^2\cos\overline{\omega}^2+b^2\sin\overline{\omega}^2},$$

also:

$$r\cos\mathfrak{B}=a\cos\overline{\omega},\quad r\sin\mathfrak{B}=b\sin\overline{\omega};$$

und daher nach den oben für X, Y, Z gefundenen Ausdrücken:

$$1)\quad\ldots\ldots\quad\begin{cases}X=a\cos\omega\cos\overline{\omega},\\ Y=a\sin\omega\cos\overline{\omega},\\ Z=b\sin\overline{\omega};\end{cases}$$

welche Ausdrücke jedenfalls sehr einfach und elegant sind.

Zuerst wollen wir uns nun mit der Bestimmung der Lage der Schwingungsebene des Pendels bei der durch die Elemente ω, $\overline{\omega}$, r bestimmten ersten Lage des Beobachtungsorts beschäftigen.

Die Gleichungen der Normale des Beobachtungsorts sind nach den bekannten Lehren der analytischen Geometrie:

$$\frac{x-X}{b^2X}=\frac{y-Y}{b^2Y}=\frac{z-Z}{a^2Z},$$

und bezeichnen nun u', v', w' die 180° nicht übersteigenden Winkel, welchen der von dem Beobachtungsorte aus nach dem äusseren Raume der Erde hin gehende Theil der Normale des Beobachtungsorts mit den positiven Theilen der Axe der x, y, z einschliesst; so ist bekanntlich

$$\cos u':\cos v':\cos w'=b^2X:b^2Y:a^2Z,$$

woraus man mit Hülfe der bekannten Gleichung

$$\cos u'^2+\cos v'^2+\cos w'^2=1$$

und der Formeln 1) leicht findet:

$$\cos u' = \pm \frac{b \cos \omega \cos \bar{\omega}}{\sqrt{a^2 \sin \bar{\omega}^2 + b^2 \cos \bar{\omega}^2}},$$

$$\cos v' = \pm \frac{b \sin \omega \cos \bar{\omega}}{\sqrt{a^2 \sin \bar{\omega}^2 + b^2 \cos \bar{\omega}^2}},$$

$$\cos w' = \pm \frac{a \sin \bar{\omega}}{\sqrt{a^2 \sin \bar{\omega}^2 + b^2 \cos \bar{\omega}^2}};$$

in welchen Formeln die oberen und unteren Zeichen sich auf einander beziehen. Weil nun aber die Winkel u', v', w' dem von dem Beobachtungsorte aus nach dem äusseren Raume der Erde hin gehenden Theile der Normale des Beobachtungsorts entsprechen, so erhellet auf der Stelle, dass $\cos w'$ immer mit Z, also nach dem Obigen auch mit $\sin \bar{\omega}$ gleiches Vorzeichen hat, dass man also in den verstehenden Formeln die oberen Zeichen nehmen, und daher

$$2) \quad \ldots \quad \begin{cases} \cos u' = \dfrac{b \cos \omega \cos \bar{\omega}}{\sqrt{a^2 \sin \bar{\omega}^2 + b^2 \cos \bar{\omega}^2}}, \\[2ex] \cos v' = \dfrac{b \sin \omega \cos \bar{\omega}}{\sqrt{a^2 \sin \bar{\omega}^2 + b^2 \cos \bar{\omega}^2}}, \\[2ex] \cos w' = \dfrac{a \sin \bar{\omega}}{\sqrt{a^2 \sin \bar{\omega}^2 + b^2 \cos \bar{\omega}^2}} \end{cases}$$

setzen muss.

Von dem Beobachtungsorte aus denken wir uns in der Ebene seines Meridians senkrecht auf seiner Normale nach der Seite des Nordpols der Erde hin eine Gerade gezogen, die also im Horizont des Beobachtungsorts liegt, und bezeichnen die von dieser Linie mit den positiven Theilen der Coordinatenaxen eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel durch u, v, w; so sind die Gleichungen dieser Geraden:

$$\frac{x-X}{\cos u} = \frac{y-Y}{\cos v} = \frac{z-Z}{\cos w}.$$

Die Gleichung der Ebene des Meridians des Beobachtungsorts ist

$$x \sin \omega - y \cos \omega = 0$$

oder, weil in dieser Ebene der Beobachtungsort (XYZ) liegt, also

$$X \sin \omega - Y \cos \omega = 0$$

ist, auch

$$(x-X)\sin\omega-(y-Y)\cos\omega=0.$$

Weil in dieser Ebene die vorher von dem Beobachtungsorte aus gezogene Gerade liegt, so ist

$$\sin\omega\cos u-\cos\omega\cos v=0,$$

und weil diese Gerade auf der Normale des Beobachtungsorts senkrecht steht, so ist

$$\cos u'\cos u+\cos v'\cos v+\cos w'\cos w=0,$$

wozu noch die bekannte Gleichung

$$\cos u^2+\cos v^2+\cos w^2=1$$

kommt. Aus den beiden ersten der drei vorstehenden Gleichungen erhält man mit Hülfe der Gleichungen 2) ohne Schwierigkeit:

$$\cos u=-\frac{a}{b}\cos\omega\tang\overline{\omega}\cos w,$$

$$\cos v=-\frac{a}{b}\sin\omega\tang\overline{\omega}\cos w;$$

also mit Hülfe der dritten der drei in Rede stehenden Gleichungen:

$$\cos u=\mp\frac{a\cos\omega\sin\overline{\omega}}{\sqrt{a^2\sin\overline{\omega}^2+b^2\cos\overline{\omega}^2}},$$

$$\cos v=\mp\frac{a\sin\omega\sin\overline{\omega}}{\sqrt{a^2\sin\overline{\omega}^2+b^2\cos\overline{\omega}^2}},$$

$$\cos w=\pm\frac{b\cos\overline{\omega}}{\sqrt{a^2\sin\overline{\omega}^2+b^2\cos\overline{\omega}^2}};$$

in welchen Formeln die oberen und unteren Zeichen sich auf einander beziehen. Denken wir uns nun, um zu ermitteln, welche Zeichen in diesen Formeln zu nehmen sind, in der von dem Beobachtungsorte aus in dessen Meridian-Ebene senkrecht gegen seine Normale gezogenen Geraden einen beliebigen Punkt, dessen Entfernung von dem Beobachtungsorte ϱ sein mag; so ist die dritte Coordinate dieses Punktes in einem durch den Beobachtungsort als Anfang parallel mit dem primitiven Systeme gelegten Coordinatensysteme offenbar in völliger Allgemeinheit $\varrho\cos w$, also nach dem Obigen:

$$\pm\frac{\varrho b\cos\overline{\omega}}{\sqrt{a^2\sin\overline{\omega}^2+b^2\cos\overline{\omega}^2}}.$$

Da nun aber diese Coordinate unter den gemachten Voraussetzungen offenbar immer positiv ist und auch $\cos\overline{\omega}$ stets positiv ist, so sieht man, dass man in dem vorstehenden Ausdrucke und also auch überhaupt in den obigen Ausdrücken der Cosinus der Winkel u, v, w die oberen Zeichen nehmen, folglich

$$3)\quad \left\{\begin{aligned} \cos u &= -\frac{a\cos\omega\sin\overline{\omega}}{\sqrt{a^2\sin\overline{\omega}^2+b^2\cos\overline{\omega}^2}},\\ \cos v &= -\frac{a\sin\omega\sin\overline{\omega}}{\sqrt{a^2\sin\overline{\omega}^2+b^2\cos\overline{\omega}^2}},\\ \cos w &= \frac{b\cos\overline{\omega}}{\sqrt{a^2\sin\overline{\omega}^2+b^2\cos\overline{\omega}^2}} \end{aligned}\right.$$

setzen muss.

Weil die Schwingungsebene des Pendels durch den Beobachtungsort geht, so hat ihre Gleichung im Allgemeinen die Form

$$A(x-X)+B(y-Y)+C(z-Z)=0,$$

und da die Normale des Beobachtungsorts in der Schwingungsebene liegt, so ist nach dem Obigen:

$$Ab^2X+Bb^2Y+Ca^2Z=0$$

oder, wenn man für X, Y, Z ihre Werthe aus 1) setzt:

$$Ab\cos\omega\cos\overline{\omega}+Bb\sin\omega\cos\overline{\omega}+Ca\sin\overline{\omega}=0.$$

Ziehen wir von dem Beobachtungsorte aus eine auf seiner Normale senkrecht stehende, in der Schwingungsebene liegende Gerade und bezeichnen die von dieser Geraden mit den positiven Theilen der Coordinatenaxen eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel durch u_1, v_1, w_1, so sind die Gleichungen dieser Geraden:

$$\frac{x-X}{\cos u_1}=\frac{y-Y}{\cos v_1}=\frac{z-Z}{\cos w_1}.$$

Weil diese Gerade in der Schwingungsebene liegt, so ist nach dem Obigen:

$$A\cos u_1+B\cos v_1+C\cos w_1=0,$$

und weil dieselbe auf der Normale des Beobachtungsorts senkrecht steht, so ist

$$\cos u'\cos u_1+\cos v'\cos v_1+\cos w'\cos w_1=0,$$

wo für $\cos u'$, $\cos v'$, $\cos w'$ ihre obigen Werthe zu setzen sind. Aus diesen beiden Gleichungen ergeben sich die drei folgenden Gleichungen:

$$(A\cos w' - C\cos u')\cos u_1 - (C\cos v' - B\cos w')\cos v_1 = 0,$$

$$(B\cos u' - A\cos v')\cos v_1 - (A\cos w' - C\cos u')\cos w_1 = 0,$$

$$(C\cos v' - B\cos w')\cos w_1 - (B\cos u' - A\cos v')\cos u_1 = 0;$$

und man kann also, wenn G einen gewissen Factor bezeichnet, offenbar setzen:

$$4) \quad \ldots \quad \left\{\begin{aligned} \cos u_1 &= G(C\cos v' - B\cos w'), \\ \cos v_1 &= G(A\cos w' - C\cos u'), \\ \cos w_1 &= G(B\cos u' - A\cos v'); \end{aligned}\right.$$

woraus sich, weil

$$\cos u_1^2 + \cos v_1^2 + \cos w_1^2 = 1$$

ist, sogleich

5)

$$G = \pm \frac{1}{\sqrt{(A\cos v' - B\cos u')^2 + (B\cos w' - C\cos v')^2 + (C\cos u' - A\cos w')^2}}$$

ergiebt.

Bezeichnen wir den 180° nicht übersteigenden Winkel, welchen die beiden von dem Beobachtungsorte aus senkrecht gegen dessen Normale in seiner Meridian-Ebene und in der Schwingungsebene des Pendels gezogenen Geraden mit einander einschliessen, durch θ, so ist

$$\cos\theta = \cos u \cos u_1 + \cos v \cos v_1 + \cos w \cos w_1,$$

also, wie man mittelst der Formeln 2), 3), 4) leicht findet:

$$6) \quad \ldots \quad \cos\theta = -G(A\sin\omega - B\cos\omega),$$

wo für G sein obiger Werth zu setzen, wegen des Vorzeichens aber die folgende Bestimmung zu geben ist.

Die Projection des nach dem Beobachtungsorte gezogenen Erdhalbmessers auf der Ebene des Aequators wollen wir als den positiven Theil der Axe der x_1 eines rechtwinkligen Coordinatensystems der $x_1y_1z_1$ mit dem Mittelpunkte der Erde als Anfang annehmen; die Ebene des Aequators sei die Ebene der x_1y_1, und der positive Theil der Axe der y_1 werde so angenommen, dass man sich, um von dem positiven Theile der Axe der x_1 durch

den rechten Winkel $(x_1 y_1)$ hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y_1 zu gelangen, im Sinne der Drehung der Erde um ihre Axe bewegen muss; der positive Theil der Axe der z_1 sei vom Mittelpunkte der Erde nach dem Nordpole hin gerichtet, und falle also mit dem positiven Theile der Axe der z zusammen. Dann hat man nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten bekanntlich die folgenden Gleichungen:

$$x_1 = y \sin\omega + x \cos\omega,$$
$$y_1 = y \cos\omega - x \sin\omega;$$

und sind nun x, y, z und x_1, y_1, z_1 die Coordinaten eines in der von dem Beobachtungsorte aus in der Schwingungsebene auf der Normale des Beobachtungsorts senkrecht gezogenen Geraden, dessen Entfernung vom Beobachtungsorte ϱ ist; so ist

$$x = X + \varrho\cos u_1, \quad y = Y + \varrho\cos v_1, \quad z = Z + \varrho\cos w_1;$$

also:

$$x_1 = Y\sin\omega + X\cos\omega + \varrho(\sin\omega\cos v_1 + \cos\omega\cos u_1),$$
$$y_1 = Y\cos\omega - X\sin\omega + \varrho(\cos\omega\cos v_1 - \sin\omega\cos u_1);$$

also nach 1), 2), 4), wie man leicht findet:

$$x_1 = a\cos\overline{\omega} + \frac{\varrho G a(A\sin\omega - B\cos\omega)\sin\overline{\omega}}{\sqrt{a^2\sin\overline{\omega}^2 + b^2\cos\overline{\omega}^2}},$$

$$y_1 = \frac{\varrho G\{a(A\cos\omega + B\sin\omega)\sin\overline{\omega} - Cb\cos\overline{\omega}\}}{\sqrt{a^2\sin\overline{\omega}^2 + b^2\cos\overline{\omega}^2}}.$$

Weil nun aber nach dem Obigen

$$Ab\cos\omega\cos\overline{\omega} + Bb\sin\omega\cos\overline{\omega} + Ca\sin\overline{\omega} = 0,$$

und folglich

$$A\cos\omega + B\sin\omega = -\frac{a}{b}C\tang\overline{\omega}$$

ist, so ist, wie man leicht findet:

$$y_1 = -\frac{\varrho GC\sqrt{a^2\sin\overline{\omega}^2 + b^2\cos\overline{\omega}^2}}{b\cos\overline{\omega}}.$$

Nehmen wir nun die von dem Beobachtungsorte aus senkrecht auf seiner Normale in der Schwingungsebene gezogene Gerade so an, dass sie auf der Seite des Meridians des Beobachtungsorts liegt, nach welcher hin sich die Erde bewegt, so ist y_1 offenbar positiv, und aus der vorstehenden Gleichung erhellet also, dass man unter der so eben gemachten Voraussetzung das Vorzeichen

von G immer so nehmen muss, dass das Produkt GC negativ wird, wobei man nicht unbeachtet lassen darf, dass $\cos\overline{\omega}$ stets positiv ist, weil der absolute Werth von $\overline{\omega}$ nicht grösser als 90^0 ist.

Die Lage der Schwingungsebene des Pendels wollen wir uns jetzt durch die gerade Linie bestimmt denken, in welcher von derselben der Horizont des Beobachtungsorts geschnitten wird, wollen aber immer nur den einen der beiden Theile dieser Linie, in welche dieselbe von dem Beobachtungsorte getheilt wird, in's Auge fassen, und werden im Folgenden diesen Theil der Kürze wegen die Schwingungslinie nennen; der Theil der Mittagslinie des Beobachtungsorts, welcher von dem Beobachtungsorte aus nach der Seite des Nordpols der Erde hin liegt, soll dagegen von jetzt an die Nordlinie genannt werden. Die von der Schwingungslinie mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z eingeschlossenen, 180^0 nicht übersteigenden Winkel wollen wir respective durch α, β, γ bezeichnen, und der von der Schwingungslinie mit der Nordlinie eingeschlossene Winkel, indem man diesen Winkel von der Nordlinie an nach der Seite des Meridians des Beobachtungsorts hin, nach welcher die Bewegung der Erde gerichtet ist, also eigentlich der Drehung der Erde entgegen *), von 0 bis 360^0 zählt, soll durch Θ bezeichnet werden. Unter diesen Voraussetzungen sind die Gleichungen der Geraden, in welcher der Horizont des Beobachtungsorts von der Schwingungsebene des Pendels geschnitten wird:

$$\frac{x-X}{\cos\alpha}=\frac{y-Y}{\cos\beta}=\frac{z-Z}{\cos\gamma}$$

oder nach 1):

$$\frac{x-a\cos\omega\cos\overline{\omega}}{\cos\alpha}=\frac{y-a\sin\omega\cos\overline{\omega}}{\cos\beta}=\frac{z-b\sin\overline{\omega}}{\cos\gamma}.$$

Da diese Linie auf der Normale des Beobachtungsorts senkrecht steht, so ist

$$\cos\alpha\cos u'+\cos\beta\cos v'+\cos\gamma\cos w'=0,$$

also nach 2):

$$b\cos\alpha\cos\omega\cos\overline{\omega}+b\cos\beta\sin\omega\cos\overline{\omega}+a\cos\gamma\sin\overline{\omega}=0;$$

und da die in Rede stehende Gerade in der Schwingungsebene liegt, deren Gleichung bekanntlich

---

*) Wenn man sich, im Beobachtungsorte stehend, das Gesicht nach Norden gekehrt, zugleich mit der Erde fortbewegt denkt.

$$A(x-X)+B(y-Y)+C(z-Z)=0$$

ist, so ist

$$A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma=0.$$

Daher haben wir zwischen den Grössen A, B, C die zwei Gleichungen:

$$A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma=0,$$

$$Ab\cos\omega\cos\overline{\omega}+Bb\sin\omega\cos\overline{\omega}+Ca\sin\overline{\omega}=0;$$

und bezeichnet also G_1 einen gewissen Factor, so kann man setzen:

$$A=G_1(a\cos\beta\sin\overline{\omega}-b\cos\gamma\sin\omega\cos\overline{\omega}),$$

$$B=G_1(b\cos\gamma\cos\omega\cos\overline{\omega}-a\cos\alpha\sin\overline{\omega}),$$

$$C=G_1 b(\cos\alpha\sin\omega-\cos\beta\cos\omega)\cos\overline{\omega}.$$

Also ist, wie man leicht findet:

$$A\sin\omega-B\cos\omega=G_1\{a(\cos\alpha\cos\omega+\cos\beta\sin\omega)\sin\overline{\omega}-b\cos\gamma\cos\overline{\omega}\}$$

und

$$C\cos v'-B\cos w'=G_1\cos\alpha\sqrt{a^2\sin\overline{\omega}^2+b^2\cos\overline{\omega}^2},$$

$$A\cos w'-C\cos u'=G_1\cos\beta\sqrt{a^2\sin\overline{\omega}^2+b^2\cos\overline{\omega}^2},$$

$$B\cos u'-A\cos v'=G_1\cos\gamma\sqrt{a^2\sin\overline{\omega}^2+b^2\cos\overline{\omega}^2};$$

wobei man immer die aus dem Obigen bekannte Gleichung

$$b\cos\alpha\cos\omega\cos\overline{\omega}+b\cos\beta\sin\omega\cos\overline{\omega}+a\cos\gamma\sin\overline{\omega}=0$$

zu berücksichtigen hat. Also ist nach 4):

$$7)\quad\left\{\begin{array}{l}\cos u_1=GG_1\cos\alpha\sqrt{a^2\sin\overline{\omega}^2+b^2\cos\overline{\omega}^2},\\ \cos v_1=GG_1\cos\beta\sqrt{a^2\sin\overline{\omega}^2+b^2\cos\overline{\omega}^2},\\ \cos w_1=GG_1\cos\gamma\sqrt{a^2\sin\overline{\omega}^2+b^2\cos\overline{\omega}^2};\end{array}\right.$$

folglich

$$G^2G_1{}^2=\frac{1}{a^2\sin\overline{\omega}^2+b^2\cos\overline{\omega}^2}.$$

Man kann aber, wie aus dem Obigen sogleich erhellet, unbeschadet der Allgemeinheit $G_1=1$ setzen. Dann ist

$$G=\pm\frac{1}{\sqrt{a^2\sin\overline{\omega}^2+b^2\cos\overline{\omega}^2}},$$

und nach dem Obigen:

$$A = a\cos\beta\sin\overline{\omega} - b\cos\gamma\sin\omega\cos\overline{\omega},$$
$$B = b\cos\gamma\cos\omega\cos\overline{\omega} - a\cos\alpha\sin\overline{\omega},$$
$$C = b(\cos\alpha\sin\omega - \cos\beta\cos\omega)\cos\overline{\omega};$$

folglich:

$$A\sin\omega - B\cos\omega = a(\cos\alpha\cos\omega + \cos\beta\sin\omega)\sin\overline{\omega} - b\cos\gamma\cos\overline{\omega}.$$

Wenn nun die Schwingungslinie auf der Seite des Meridians des Beobachtungsorts liegt, nach welcher die Drehung der Erde gerichtet ist, so ist es nach dem Obigen offenbar verstattet, $\Theta = \theta$, folglich $\cos\Theta = \cos\theta$, $\sin\Theta = \sin\theta$ zu setzen, und nach dem Obigen ist also in diesem Falle:

$$\cos\Theta = \mp\frac{a(\cos\alpha\cos\omega + \cos\beta\sin\omega)\sin\overline{\omega} - b\cos\gamma\cos\overline{\omega}}{\sqrt{a^2\sin\overline{\omega}^2 + b^2\cos\overline{\omega}^2}},$$

das Zeichen so genommen, dass

$$GC = \pm\frac{b(\cos\alpha\sin\omega - \cos\beta\cos\omega)\cos\overline{\omega}}{\sqrt{a^2\sin\overline{\omega}^2 + b^2\cos\overline{\omega}^2}},$$

d. h., weil $\cos\overline{\omega}$ positiv ist, dass

$$\pm(\cos\alpha\sin\omega - \cos\beta\cos\omega)$$

negativ wird; wenn dagegen die Schwingungslinie auf der entgegengesetzten Seite des Meridians des Beobachtungsorts liegt, so muss man offenbar $\Theta = \theta + 180^0$, also $\cos\Theta = -\cos\theta$, $\sin\Theta = -\sin\theta$ setzen, und nach dem Obigen ist also in diesem Falle:

$$\cos\Theta = \pm\frac{a(\cos\alpha\cos\omega - \cos\beta\sin\omega)\sin\overline{\omega} - b\cos\gamma\cos\overline{\omega}}{\sqrt{a^2\sin\overline{\omega}^2 + b^2\cos\overline{\omega}^2}},$$

das Zeichen so genommen, dass

$$GC = \pm\frac{b(\cos\alpha\sin\omega - \cos\beta\cos\omega)\cos\overline{\omega}}{\sqrt{a^2\sin\overline{\omega}^2 + b^2\cos\overline{\omega}^2}},$$

d. h., weil $\cos\overline{\omega}$ positiv ist, dass

$$\pm(\cos\alpha\sin\omega - \cos\beta\cos\omega)$$

negativ wird.

Sind jetzt x, y, z und x_1, y_1, z_1 die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Schwingungslinie, dessen Entfernung von dem Beobachtungsorte ϱ ist, in den beiden vorher eben so bezeichneten Coordinatensystemen; so ist

$$x = X + \varrho\cos\alpha,\quad y = Y + \varrho\cos\beta,\quad z = Z + \varrho\cos\gamma;$$

und folglich ganz auf dieselbe Art wie oben in einem ähnlichen Falle:

$$x_1 = Y\sin\omega + X\cos\omega + \varrho(\sin\omega\cos\beta + \cos\omega\cos\alpha),$$

$$y_1 = Y\cos\omega - X\sin\omega + \varrho(\cos\omega\cos\beta - \sin\omega\cos\alpha);$$

also, wie man leicht findet:

$$x_1 = a\cos\overline{\omega} + \varrho(\sin\omega\cos\beta + \cos\omega\cos\alpha),$$

$$y_1 = \varrho(\cos\omega\cos\beta - \sin\omega\cos\alpha);$$

also, weil y_1 im ersten der beiden oben unterschiedenen Fälle offenbar positiv, im zweiten offenbar negativ ist, die Grösse

$$\cos\alpha\sin\omega - \cos\beta\cos\omega$$

im ersten Falle negativ, im zweiten Falle positiv. Hieraus ergiebt sich mittelst des Obigen auf der Stelle, dass in beiden Fällen, also in völliger Allgemeinheit,

$$\cos\Theta = -\frac{a(\cos\alpha\cos\omega + \cos\beta\sin\omega)\sin\overline{\omega} - b\cos\gamma\cos\overline{\omega}}{\sqrt{a^2\sin\overline{\omega}^2 + b^2\cos\overline{\omega}^2}}$$

oder

$$\cos\Theta = \frac{b\cos\gamma\cos\overline{\omega} - a(\cos\alpha\cos\omega + \cos\beta\sin\omega)\sin\overline{\omega}}{\sqrt{a^2\sin\overline{\omega}^2 + b^2\cos\overline{\omega}^2}}$$

gesetzt werden muss.

Weil bekanntlich

$$b\cos\alpha\cos\omega\cos\overline{\omega} + b\cos\beta\sin\omega\cos\overline{\omega} + a\cos\gamma\sin\overline{\omega} = 0,$$

und folglich

$$\cos\alpha\cos\omega + \cos\beta\sin\omega = -\frac{a}{b}\cos\gamma\,\mathrm{tang}\,\overline{\omega},$$

$$\cos\gamma = -\frac{b}{a}(\cos\alpha\cos\omega + \cos\beta\sin\omega)\cot\overline{\omega}$$

ist, so ist, wie man leicht findet:

$$\cos\Theta = \frac{\cos\gamma\sqrt{a^2\sin\overline{\omega}^2 + b^2\cos\overline{\omega}^2}}{b\cos\overline{\omega}}$$

$$= -\frac{(\cos\alpha\cos\omega + \cos\beta\sin\omega)\sqrt{a^2\sin\overline{\omega}^2 + b^2\cos\overline{\omega}^2}}{a\sin\overline{\omega}}.$$

Also ist ferner

$$\sin\Theta^2 = 1 - \frac{\cos\gamma^2(a^2\sin\overline{\omega}^2 + b^2\cos\overline{\omega}^2)}{b^2\cos\overline{\omega}^2}$$

$$= 1 - \cos\gamma^2 - \frac{a^2}{b^2}\cos\gamma^2\,\mathrm{tang}\,\overline{\omega}^2,$$

folglich, weil bekanntlich

$$\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2=1,$$

und nach dem Obigen

$$\frac{a^2}{b^2}\cos\gamma^2\operatorname{tang}\overline{\omega}^2=(\cos\alpha\cos\omega+\cos\beta\sin\omega)^2$$

ist:

$$\sin\Theta^2=\cos\alpha^2+\cos\beta^2-(\cos\alpha\cos\omega+\cos\beta\sin\omega)^2,$$

woraus sich ferner leicht

$$\sin\Theta^2=(\cos\alpha\sin\omega-\cos\beta\cos\omega)^2,$$

und daher nach dem vorher Bewiesenen offenbar in völliger Allgemeinheit

$$\sin\Theta=-(\cos\alpha\sin\omega-\cos\beta\cos\omega)$$

ergiebt. Daher haben wir jetzt die folgenden, für unsere fernere Untersuchung sehr wichtigen, ganz allgemein gültigen Formeln:

$$(8)\quad\left\{\begin{aligned}\cos\Theta&=\frac{\cos\gamma\sqrt{a^2\sin\overline{\omega}^2+b^2\cos\overline{\omega}^2}}{b\cos\overline{\omega}}\\&=-\frac{(\cos\alpha\cos\omega+\cos\beta\sin\omega)\sqrt{a^2\sin\overline{\omega}^2+b^2\cos\overline{\omega}^2}}{a\sin\overline{\omega}},\\\sin\Theta&=\cos\beta\cos\omega-\cos\alpha\sin\omega.\end{aligned}\right.$$

Bevor wir in unseren analytischen Betrachtungen weiter fortschreiten, wollen wir zuerst zeigen, wie die Lage einer Ebene bestimmt wird, die durch eine gegebene gerade Linie geht und gegen eine gegebene Ebene unter dem kleinsten Winkel geneigt ist. Zu dem Ende sei in Taf. III. Fig. 10. die gegebene gerade Linie $\overline{AB}$, und $\overline{MN}$ sei die gegebene Ebene. Durch den Durchschnittspunkt B der geraden Linie $\overline{AB}$ mit der Ebene $\overline{MN}$ ziehe man in der letzteren die beliebige gerade Linie $\overline{DE}$, fälle von A auf die gegebene Ebene das Perpendikel $\overline{AA_1}$, auf die Linie $\overline{DE}$ das Perpendikel $\overline{AC}$, und ziehe die Linien $\overline{BA_1}$ und $\overline{CA_1}$. Dann ist

$$\overline{AA_1}=\overline{AC}.\sin\overline{ACA_1},$$
$$\overline{AC}=\overline{AB}.\sin\overline{ABC};$$

also

$$\overline{AA_1}=\overline{AB}.\sin\overline{ABC}.\sin\overline{ACA_1}$$

oder

$$\sin\overline{ACA_1}=\frac{\overline{AA_1}}{\overline{AB}.\sin\overline{ABC}}.$$

Da das Verhältniss der Linien $\overline{AA_1}$ und $\overline{AB}$ constant ist, so wird der Winkel $\overline{ACA_1}$ ein Minimum werden, wenn $\sin\overline{ABC}$ ein Maximum wird, also für $\angle\overline{ABC} = 90^0$, oder wenn die Linie $\overline{DE}$ in der Ebene $\overline{MN}$ auf der Linie $\overline{AB}$ senkrecht steht. Folglich wird die gesuchte Ebene bestimmt durch die gegebene Linie und die auf derselben senkrecht stehende, in der gegebenen Ebene liegende gerade Linie.

Ferner wollen wir uns nun mit der Bestimmung der Lage der Schwingungsebene des Pendels bei einer durch die Elemente ω_1, $\overline{\omega}$, r bestimmten zweiten Lage des Beobachtungsorts beschäftigen.

Bei dieser Bestimmung halten wir uns ganz an die im Obigen für dieselbe entwickelten Principien und suchen denselben nur einen analytischen Ausdruck zu geben.

Die Coordinaten des Beobachtungsorts in seiner durch die Elemente ω_1, $\overline{\omega}$, r bestimmten zweiten Lage seien X_1, Y_1, Z_1, so ist nach 1):

$$9) \quad \ldots\ldots \quad \left\{\begin{aligned} X_1 &= a\cos\omega_1\cos\overline{\omega}, \\ Y_1 &= a\sin\omega_1\cos\overline{\omega}, \\ Z_1 &= b\sin\overline{\omega}. \end{aligned}\right.$$

Die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche der von dem Beobachtungsorte aus nach dem äusseren Raume des Erdkörpers hin gehende Theil der Normale des Beobachtungsorts mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z einschliesst, seien respective u_1', v_1', w_1', so ist nach 2):

$$10) \quad \ldots \quad \left\{\begin{aligned} \cos u_1' &= \frac{b\cos\omega_1\cos\overline{\omega}}{\sqrt{a^2\sin\overline{\omega}^2 + b^2\cos\overline{\omega}^2}}, \\ \cos v_1' &= \frac{b\sin\omega_1\cos\overline{\omega}}{\sqrt{a^2\sin\overline{\omega}^2 + b^2\cos\overline{\omega}^2}}, \\ \cos w_1' &= \frac{a\sin\overline{\omega}}{\sqrt{a^2\sin\overline{\omega}^2 + b^2\cos\overline{\omega}^2}}. \end{aligned}\right.$$

Die Gleichungen der Normale des Beobachtungsorts sind folglich:

$$\frac{x - X_1}{\cos u_1'} = \frac{y - Y_1}{\cos v_1'} = \frac{z - Z_1}{\cos w_1'},$$

also:

$$\frac{x - X_1}{b\cos\omega_1\cos\overline{\omega}} = \frac{y - Y_1}{b\sin\omega_1\cos\overline{\omega}} = \frac{z - Z_1}{a\sin\overline{\omega}},$$

oder:

$$\frac{x-a\cos\omega_1\cos\bar{\omega}}{b\cos\omega_1\cos\bar{\omega}}=\frac{y-a\sin\omega_1\cos\bar{\omega}}{b\sin\omega_1\cos\bar{\omega}}=\frac{z-b\sin\bar{\omega}}{a\sin\bar{\omega}}.$$

Bezeichnen wir die Coordinaten des Durchschnittspunkts dieser Normale mit der ersten Schwingungsebene, deren Gleichung bekanntlich

$$A(x-X)+B(y-Y)+C(z-Z)=0$$

ist, durch $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$; so haben wir zur Bestimmung dieser Coordinaten die drei folgenden Gleichungen:

$$\frac{\mathfrak{x}-X_1}{b\cos\omega_1\cos\bar{\omega}}=\frac{\mathfrak{y}-Y_1}{b\sin\omega_1\cos\bar{\omega}}=\frac{\mathfrak{z}-Z_1}{a\sin\bar{\omega}},$$

$$A(\mathfrak{x}-X)+B(\mathfrak{y}-Y)+C(\mathfrak{z}-Z)=0.$$

Durch diesen Durchschnittspunkt wollen wir eine Gerade legen, welche in der ersten Schwingungsebene liegt und auf der Normale des Beobachtungsorts in seiner zweiten Lage senkrecht steht. Die von dieser Geraden mit den positiven Theilen der Coordinatenaxen eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel seien u'', v'', w''; so sind die Gleichungen der in Rede stehenden Geraden:

$$\frac{x-\mathfrak{x}}{\cos u''}=\frac{y-\mathfrak{y}}{\cos v''}=\frac{z-\mathfrak{z}}{\cos w''};$$

und für die Winkel u'', v'', w'' hat man die Gleichung:

$$\cos u_1'\cos u''+\cos v_1'\cos v''+\cos w_1'\cos w''=0,$$

also nach 10):

$$b\cos\omega_1\cos\bar{\omega}\cos u''+b\sin\omega_1\cos\bar{\omega}\cos v''+a\sin\bar{\omega}\cos w''=0.$$

Die zweite Schwingungsebene geht durch den Beobachtungsort $(X_1 Y_1 Z_1)$ und den Punkt $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$; also ist ihre Gleichung:

$$A_1(x-X_1)+B_1(y-Y_1)+C_1(z-Z_1)=0$$

oder

$$A_1(x-\mathfrak{x})+B_1(y-\mathfrak{y})+C_1(z-\mathfrak{z})=0,$$

folglich auch:

$$A_1(\mathfrak{x}-X_1)+B_1(\mathfrak{y}-Y_1)+C_1(\mathfrak{z}-Z_1)=0;$$

also nach dem Obigen:

$$A_1 b\cos\omega_1\cos\bar{\omega}+B_1 b\sin\omega_1\cos\bar{\omega}+C_1 a\sin\bar{\omega}=0.$$

Die zweite Schwingungsebene geht aber auch durch die, durch die Gleichungen

$$\frac{x-\mathfrak{x}}{\cos u''}=\frac{y-\mathfrak{y}}{\cos v''}=\frac{z-\mathfrak{z}}{\cos w''}$$

charakterisirte Gerade, und es ist also:

$$A_1\cos u''+B_1\cos v''+C_1\cos w''=0.$$

Die Gleichung der ersten Schwingungsebene ist, weil der Punkt $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ in derselben liegt, auch

$$A(x-\mathfrak{x})+B(y-\mathfrak{y})+C(z-\mathfrak{z})=0,$$

und da die durch die Gleichungen

$$\frac{x-\mathfrak{x}}{\cos u''}=\frac{y-\mathfrak{y}}{\cos v''}=\frac{z-\mathfrak{z}}{\cos w''}$$

charakterisirte Gerade in der ersten Schwingungsebene liegt, so ist also auch:

$$A\cos u''+B\cos v''+C\cos w''=0.$$

Daher haben wir zur Bestimmung von u'', v'', w'' die drei folgenden Gleichungen:

$$A\cos u''+B\cos v''+C\cos w''=0,$$
$$b\cos\omega_1\cos\bar{\omega}\cos u''+b\sin\omega_1\cos\bar{\omega}\cos v''+a\sin\bar{\omega}\cos w''=0,$$
$$\cos u''^2+\cos v''^2+\cos w''^2=1.$$

Aus den beiden ersten dieser Gleichungen folgt, wenn G' einen gewissen Factor bezeichnet:

$$\cos u''=G'(Cb\sin\omega_1\cos\bar{\omega}-Ba\sin\bar{\omega}),$$
$$\cos v''=G'(Aa\sin\bar{\omega}-Cb\cos\omega_1\cos\bar{\omega}),$$
$$\cos w''=G'b(B\cos\omega_1-A\sin\omega_1)\cos\bar{\omega};$$

und aus den beiden Gleichungen

$$A_1\cos u''+B_1\cos v''+C_1\cos w''=0,$$
$$A_1 b\cos\omega_1\cos\bar{\omega}+B_1 b\sin\omega_1\cos\bar{\omega}+C_1 a\sin\bar{\omega}=0$$

erhält man, wenn auch G_1' einen gewissen Factor bezeichnet:

$$A_1=G_1'(b\sin\omega_1\cos\bar{\omega}\cos w''-a\sin\bar{\omega}\cos v''),$$
$$B_1=G_1'(a\sin\bar{\omega}\cos u''-b\cos\omega_1\cos\bar{\omega}\cos w''),$$
$$C_1=G_1'b(\cos\omega_1\cos v''-\sin\omega_1\cos u'')\cos\bar{\omega}.$$

Also ist, wie man leicht findet, wenn der Kürze wegen

11) . . $\Omega = AB\cos\omega_1\cos\overline{\omega} + Bb\sin\omega_1\cos\overline{\omega} + Ca\sin\overline{\omega}$

gesetzt wird:

$$A_1 = -G'G_1'\{A(a^2\sin\overline{\omega}^2 + b^2\cos\overline{\omega}^2) - b\Omega\cos\omega_1\cos\overline{\omega}\},$$
$$B_1 = -G'G_1'\{B(a^2\sin\overline{\omega}^2 + b^2\cos\overline{\omega}^2) - b\Omega\sin\omega_1\cos\overline{\omega}\},$$
$$C_1 = -G'G_1'\{C(a^2\sin\overline{\omega}^2 + b^2\cos\overline{\omega}^2) - a\Omega\sin\overline{\omega}\};$$

oder, wie unbeschadet der Allgemeinheit offenbar kürzer gesetzt werden kann:

$$12) \;.\;.\; \begin{cases} A_1 = A(a^2\sin\overline{\omega}^2 + b^2\cos\overline{\omega}^2) - b\Omega\cos\omega_1\cos\overline{\omega}, \\ B_1 = B(a^2\sin\overline{\omega}^2 + b^2\cos\overline{\omega}^2) - b\Omega\sin\omega_1\cos\overline{\omega}, \\ C_1 = C(a^2\sin\overline{\omega}^2 + b^2\cos\overline{\omega}^2) - a\Omega\sin\overline{\omega}. \end{cases}$$

Führt man in den Ausdruck von Ω für A, B, C die aus dem Obigen bekannten Ausdrücke

$$A = a\cos\beta\sin\overline{\omega} - b\cos\gamma\sin\omega\cos\overline{\omega},$$
$$B = b\cos\gamma\cos\omega\cos\overline{\omega} - a\cos\alpha\sin\overline{\omega},$$
$$C = b(\cos\alpha\sin\omega - \cos\beta\cos\omega)\cos\overline{\omega}$$

ein, so erhält man nach einigen leichten Reductionen für Ω den folgenden Ausdruck:

$$13) \; \Omega = 2b\sin\tfrac{1}{2}(\omega - \omega_1) \begin{Bmatrix} a\cos\alpha\cos\tfrac{1}{2}(\omega + \omega_1)\sin\overline{\omega} \\ + a\cos\beta\sin\tfrac{1}{2}(\omega + \omega_1)\sin\overline{\omega} \\ - b\cos\gamma\cos\tfrac{1}{2}(\omega - \omega_1)\cos\overline{\omega} \end{Bmatrix} \cos\overline{\omega}.$$

Bezeichnen jetzt α_1, β_1, γ_1 die von der zweiten Schwingungslinie mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel, so haben wir ganz in derselben Weise wie früher zwischen denselben die folgenden Gleichungen:

$$A_1\cos\alpha_1 + B_1\cos\beta_1 + C_1\cos\gamma_1 = 0,$$
$$b\cos\omega_1\cos\overline{\omega}\cos\alpha_1 + b\sin\omega_1\cos\overline{\omega}\cos\beta_1 + a\sin\overline{\omega}\cos\gamma_1 = 0;$$

also, wenn G'' einen gewissen Factor bezeichnet:

$$\cos\alpha_1 = G''(C_1 b\sin\omega_1\cos\overline{\omega} - B_1 a\sin\overline{\omega}),$$
$$\cos\beta_1 = G''(A_1 a\sin\overline{\omega} - C_1 b\cos\omega_1\cos\overline{\omega}),$$
$$\cos\gamma_1 = G''b(B_1\cos\omega_1 - A_1\sin\omega_1)\cos\overline{\omega};$$

und folglich, wenn man für A_1, B_1, C_1 ihre Werthe aus 12) einführt, wie man nach leichter Rechnung findet:

$$14)\quad\begin{cases}\cos\alpha_1=G''(Cb\sin\omega_1\cos\overline{\omega}-Ba\sin\overline{\omega})(a^2\sin\overline{\omega}^2+b^2\cos\overline{\omega}^2),\\ \cos\beta_1=G''(Aa\sin\overline{\omega}-Cb\cos\omega_1\cos\overline{\omega})(a^2\sin\overline{\omega}^2+b^2\cos\overline{\omega}^2),\\ \cos\gamma_1=G''b(B\cos\omega_1-A\sin\omega_1)\cos\overline{\omega}(a^2\sin\overline{\omega}^2+b^2\cos\overline{\omega}^2).\end{cases}$$

Bezeichnet endlich Θ_1 den von der zweiten Schwingungslinie mit der zweiten Nordlinie eingeschlossenen, ganz auf ähnliche Weise wie früher den Winkel Θ genommenen Winkel, so ist wie früher in 8):

$$15)\quad\begin{cases}\cos\Theta_1=\dfrac{\cos\gamma_1\sqrt{a^2\sin\overline{\omega}^2+b^2\cos\overline{\omega}^2}}{b\cos\overline{\omega}}\\ \qquad=-\dfrac{(\cos\alpha_1\cos\omega_1+\cos\beta_1\sin\omega_1)\sqrt{a^2\sin\overline{\omega}^2+b^2\cos\overline{\omega}^2}}{a\sin\overline{\omega}},\\ \sin\Theta_1=\cos\beta_1\cos\omega_1-\cos\alpha_1\sin\omega_1;\end{cases}$$

und folglich nach 14):

16)

$$\cos\Theta_1=G''(B\cos\omega_1-A\sin\omega_1)(a^2\sin\overline{\omega}^2+b^2\cos\overline{\omega}^2)^{\frac{3}{2}},$$

$$\sin\Theta_1=G''\{(A\cos\omega_1+B\sin\omega_1)a\sin\overline{\omega}-Cb\cos\overline{\omega}\}(a^2\sin\overline{\omega}^2+b^2\cos\overline{\omega}^2).$$

Weil nun $\sin(\Theta-\Theta_1)=\sin\Theta\cos\Theta_1-\cos\Theta\sin\Theta_1$ ist, so erhält man mittelst der Gleichungen 8) und 16) zuvörderst leicht:

$$\begin{aligned}\sin(\Theta-\Theta_1)=\;&G''(A\cos\beta-B\cos\alpha)\sin(\omega-\omega_1)(a^2\sin\overline{\omega}^2+b^2\cos\overline{\omega}^2)^{\frac{3}{2}}\\ &+G''(A\cos\alpha+B\cos\beta)\cos(\omega-\omega_1)(a^2\sin\overline{\omega}^2+b^2\cos\overline{\omega}^2)^{\frac{3}{2}}\\ &-G''\frac{b}{a}C(\cos\alpha\cos\omega+\cos\beta\sin\omega)\cot\overline{\omega}(a^2\sin\overline{\omega}^2+b^2\cos\overline{\omega}^2)^{\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

Mit Rücksicht auf die bekannten Gleichungen

$$\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2=1,$$

$$b\cos\alpha\cos\omega\cos\overline{\omega}+b\cos\beta\sin\omega\cos\overline{\omega}+a\cos\gamma\sin\overline{\omega}=0$$

findet man aber mittelst der aus dem Obigen bekannten Ausdrücke von A, B, C leicht:

$$A\cos\beta-B\cos\alpha=a\sin\overline{\omega},$$

$$A\cos\alpha+B\cos\beta=-C\cos\gamma,$$

$$(\cos\alpha\cos\omega+\cos\beta\sin\omega)\cot\overline{\omega}=-\frac{a}{b}\cos\gamma;$$

also, wenn man zugleich $1-\cos(\omega-\omega_1)=2\sin\frac{1}{2}(\omega-\omega_1)^2$ setzt:

$$17)\quad\sin(\Theta-\Theta_1)=G''\{a\sin(\omega-\omega_1)\sin\overline{\omega}+2C\cos\gamma\sin\tfrac{1}{2}(\omega-\omega_1)^2\}\times(a^2\sin\overline{\omega}^2+b^2\cos\overline{\omega}^2)^{\frac{3}{2}},$$

folglich:

$$18)\quad \frac{\sin(\Theta-\Theta_1)}{\sin(\omega-\omega_1)}=G''\{a\sin\overline{\omega}+C\cos\gamma\tan\tfrac{1}{2}(\omega-\omega_1)\}(a^2\sin\overline{\omega}^2+b^2\cos\overline{\omega}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Weil ferner

$$\cos(\Theta-\Theta_1)=\cos\Theta\cos\Theta_1+\sin\Theta\sin\Theta_1$$

ist, so erhält man zuvörderst mittelst 8), 16), 11) leicht:

$$\cos(\Theta-\Theta_1)=G''\frac{\left\{\begin{array}{l}(A\cos\beta-B\cos\alpha)\cos(\omega-\omega_1)\\-(A\cos\alpha+B\cos\beta)\sin(\omega-\omega_1)\end{array}\right\}}{a\sin\overline{\omega}}(a^2\sin\overline{\omega}^2+b^2\cos\overline{\omega}^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$+G''\frac{(\cos\alpha\sin\omega-\cos\beta\cos\omega)\Omega b\cos\overline{\omega}(a^2\sin\overline{\omega}^2+b^2\cos\overline{\omega}^2)}{a\sin\overline{\omega}},$$

also, weil

$$A\cos\beta-B\cos\alpha=a\sin\overline{\omega},$$
$$A\cos\alpha+B\cos\beta=-C\cos\gamma$$
$$=b(\cos\beta\cos\omega-\cos\alpha\sin\omega)\cos\gamma\cos\overline{\omega}$$
$$=b\sin\Theta\cos\gamma\cos\overline{\omega}$$
$$=\frac{b^2\sin\Theta\cos\Theta\cos\overline{\omega}^2}{\sqrt{a^2\sin\overline{\omega}^2+b^2\cos\overline{\omega}^2}},$$
$$\cos\alpha\sin\omega-\cos\beta\cos\omega=-\sin\Theta$$

ist, wie man nach leichter Rechnung findet:

$$19)\quad \frac{\cos(\Theta-\Theta_1)}{\cos(\omega-\omega_1)}=G''(a^2\sin\overline{\omega}^2+b^2\cos\overline{\omega}^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$\times\left\{1-\frac{b\sin\Theta[\Omega+b\cos\Theta\cos\overline{\omega}\sin(\omega-\omega_1)\sqrt{a^2\sin\overline{\omega}^2+b^2\cos\overline{\omega}^2}]\cot\overline{\omega}}{a(a^2\sin\overline{\omega}^2+b^2\cos\overline{\omega}^2)\cos(\omega-\omega_1)}\right\}.$$

Mit der Bestimmung des Factors G'', von der nachher die Rede sein wird, wollen wir uns jetzt der Kürze wegen nicht weiter beschäftigen.

III.

Uebergang zum Falle der Continuität.

Wir wollen jetzt annehmen, dass sich $\omega-\omega_1$, und folglich auch $\Theta-\Theta_1$, der Null nähere. Weil sich unter dieser Voraussetzung $\sin(\omega-\omega_1)$ der Null, $\cos(\omega-\omega_1)$ der Einheit, und nach 13) auch Ω sich offenbar der Null nähert, so ist nach 19), wie auf der Stelle erhellet:

$$\mathrm{Lim}\frac{\cos(\Theta-\Theta_1)}{\cos(\omega-\omega_1)}=(a^2\sin\overline{\omega}^2+b^2\cos\overline{\omega}^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{Lim}\,G'',$$

woraus, weil offenbar

$$\operatorname{Lim} \frac{\cos(\Theta-\Theta_1)}{\cos(\omega-\omega_1)},$$

da $\cos(\omega-\omega_1)$ und $\cos(\Theta-\Theta_1)$ sich beide der Einheit nähern, eine positive Grösse ist, auf der Stelle erhellet, dass $\operatorname{Lim} G''$ eine positive Grösse ist. Nach 14) ist aber offenbar:

$$\frac{1}{G''^2}=(a^2\sin\overline{\omega}^2+b^2\cos\overline{\omega}^2)^2\left\{\begin{array}{c}(Cb\sin\omega_1\cos\overline{\omega}-Ba\sin\overline{\omega})^2\\ +(Aa\sin\overline{\omega}-Cb\cos\omega_1\cos\overline{\omega})^2\\ +b^2(B\cos\omega_1-A\sin\omega_1)^2\cos\overline{\omega}^2\end{array}\right\},$$

also, wie man mittelst leichter Rechnung findet:

$$\frac{1}{G''^2}=(a^2\sin\overline{\omega}^2+b^2\cos\overline{\omega}^2)^2\{(A^2+B^2+C^2)(a^2\sin\overline{\omega}^2+b^2\cos\overline{\omega}^2)-\Omega^2\}.$$

Aus den bekannten Ausdrücken von A, B, C ergiebt sich aber, mit Rücksicht auf die Gleichungen

$$\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2=1,$$
$$b\cos\alpha\cos\omega\cos\overline{\omega}+b\cos\beta\sin\omega\cos\overline{\omega}+a\cos\gamma\sin\overline{\omega}=0,$$

leicht, dass

$$A^2+B^2+C^2=a^2\sin\overline{\omega}^2+b^2\cos\overline{\omega}^2,$$

und folglich

$$G''^2=\frac{1}{(a^2\sin\overline{\omega}^2+b^2\cos\overline{\omega}^2)^2\{(a^2\sin\overline{\omega}^2+b^2\cos\overline{\omega}^2)^2-\Omega^2\}}$$

ist. Also ist

$$\operatorname{Lim}.G''^2=(\operatorname{Lim} G'')^2=\frac{1}{(a^2\sin\overline{\omega}^2+b^2\cos\overline{\omega}^2)^4},$$

folglich, weil, wie wir so eben gesehen haben, $\operatorname{Lim} G''$ positiv ist:

$$\operatorname{Lim} G''=\frac{1}{(a^2\sin\overline{\omega}^2+b^2\cos\overline{\omega}^2)^2}.$$

Weil unter der gemachten Voraussetzung auch $\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\omega-\omega_1)$ sich der Null nähert, so ergiebt sich aus der Gleichung 18) auf der Stelle der folgende Ausdruck:

$$\operatorname{Lim}\frac{\sin(\Theta-\Theta_1)}{\sin(\omega-\omega_1)}=\frac{a\sin\overline{\omega}}{\sqrt{a^2\sin\overline{\omega}^2+b^2\cos\overline{\omega}^2}}.$$

Nun ist aber bekanntlich

$$\operatorname{tang} B=\frac{a}{b}\operatorname{tang}\overline{\omega},$$

wo B die geographische Breite, eigentlich die Polhöhe, des Beobachtungsorts bezeichnet; also, wie man leicht findet:

$$\sin B = \frac{a\sin\overline{\omega}}{\sqrt{a^2\sin\overline{\omega}^2+b^2\cos\overline{\omega}^2}},\quad \cos B = \frac{b\cos\overline{\omega}}{\sqrt{a^2\sin\overline{\omega}^2+b^2\cos\overline{\omega}^2}};$$

folglich nach dem Vorhergehenden:

$$20)\quad \ldots\ldots\quad \mathrm{Lim}\frac{\sin(\theta-\theta_1)}{\sin(\omega-\omega_1)}=\sin B.$$

Ueberlegt man aber, dass

$$\frac{\sin(\theta-\theta_1)}{\sin(\omega-\omega_1)}=\left\{\frac{\sin(\theta-\theta_1)}{\theta-\theta_1}:\frac{\sin(\omega-\omega_1)}{\omega-\omega_1}\right\}.\frac{\theta-\theta_1}{\omega-\omega_1},$$

also

$$\mathrm{Lim}\frac{\sin(\theta-\theta_1)}{\sin(\omega-\omega_1)}=\left\{\mathrm{Lim}\frac{\sin(\theta-\theta_1)}{\theta-\theta_1}:\mathrm{Lim}\frac{\sin(\omega-\omega_1)}{\omega-\omega_1}\right\}.\mathrm{Lim}\frac{\theta-\theta_1}{\omega-\omega_1},$$

und nach einem bekannten Satze

$$\mathrm{Lim}\frac{\sin(\theta-\theta_1)}{\theta-\theta_1}=1,\quad \mathrm{Lim}\frac{\sin(\omega-\omega_1)}{\omega-\omega_1}=1$$

ist; so überzeugt man sich auf der Stelle, dass

$$\mathrm{Lim}\frac{\sin(\theta-\theta_1)}{\sin(\omega-\omega_1)}=\mathrm{Lim}\frac{\theta-\theta_1}{\omega-\omega_1},$$

folglich nach 20):

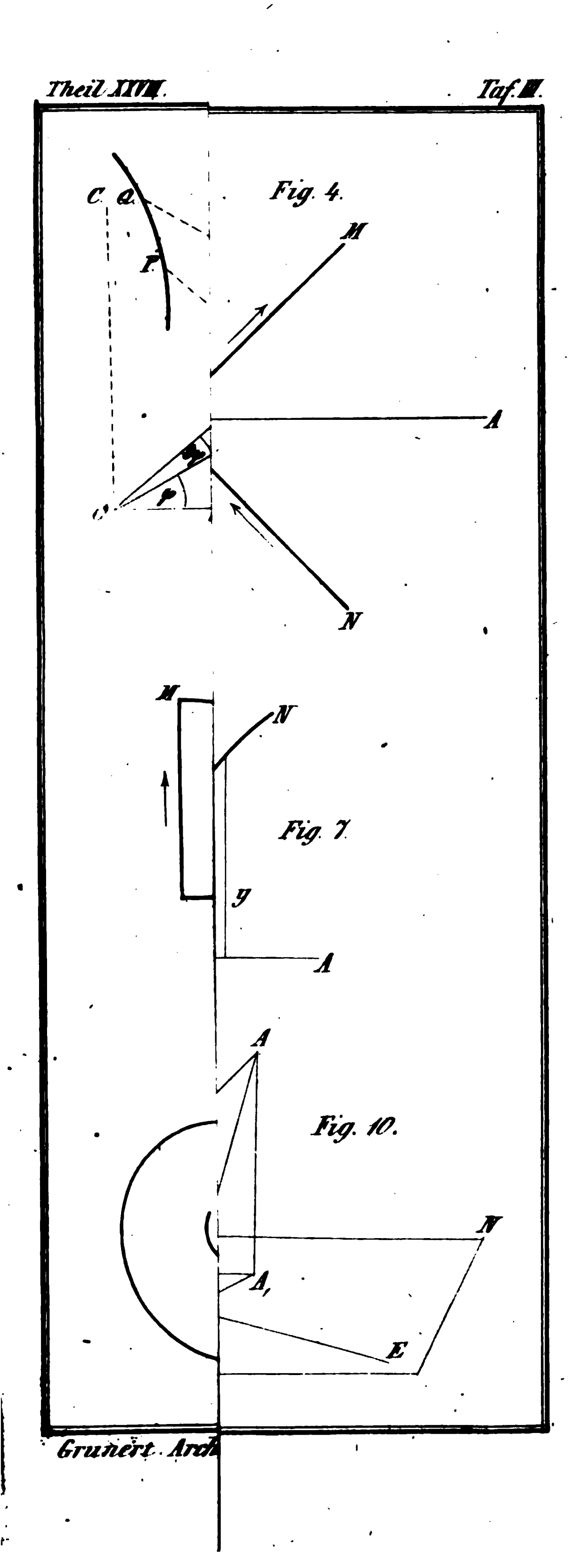
$$21)\quad \ldots\ldots\ldots\quad \mathrm{Lim}\frac{\theta-\theta_1}{\omega-\omega_1}=\sin B$$

ist.

Hieraus schliesst man nun aber, was einer weiteren Erläuterung an diesem Orte nicht bedürfen wird, leicht, dass überhaupt

$$\frac{\theta-\theta_1}{\omega-\omega_1}=\sin B \quad\text{oder}\quad \theta-\theta_1=(\omega-\omega_1)\sin B$$

ist. In dieser Gleichung ist die ganze Theorie des Foucault-schen Pendelversuchs enthalten, und man sieht aus derselben zugleich, dass das früher für die kugelförmige Erde bewiesene bekannte Gesetz im Wesentlichen auch ganz für die ellipsoidische Erde gilt, wenn man nur für B immer die wirkliche geographische Breite oder die Polhöhe des Beobachtungsorts setzt, nämlich den gehörig als positiv oder negativ betrachteten Winkel, unter welchem die Normale des Beobachtungsorts gegen die Ebene des Erdäquators geneigt ist.


Fig. 4.
C
Q
P
M
A
N
φ
Fig. 7.
M
N
y
A
Fig. 10.
A
N
A,
E

XI.

Vier Aufgaben über die Kegelschnitte und die Maxima und Minima.

Von

Herrn Professor Dr. *Lehmus*

zu Berlin.

Erste Aufgabe.

Die Parameter p, q in der Gleichung $y^2 = px + qx^2$ eines Kegelschnitts (K) und die Abscissen x desselben, welche den Durchschnittspunkten (D) von K mit einer gegebenen Geraden (G) entsprechen, der Bedingung genügend zu bestimmen, dass die Inhalte (Q) der von den zugehörigen Abschnitten des K bei der Umdrehung um ihre Abscisse x erzeugten Körper ein Max. oder ein Min. werde.

Lösung.

Es schneide (Taf. IV. Fig. 1.) G die Achse X in S in der Entfernung a vom Scheitelpunkt O unter dem Winkel α und tangα werde durch t ausgedrückt, so ist

$$(1) \qquad px + qx^2 = (\pm a \mp x)^2 . t^2,$$

woraus, nach p abgeleitet:

$$(2) \qquad [2(t^2 - q)x - 2at^2 - p]\partial x_p - x = 0,$$

und nach q abgeleitet:

$$(3) \qquad [2(t^2 - q)x - 2at^2 - p]\partial x_q - x^2 = 0$$

entsteht.

Aus

$$Q = \pi \int_0^x (px + qx^2)\,dx = \frac{\pi}{6}(3px^2 + 2qx^3)$$

folgen ferner als die Bedingungen des Max. oder Min. $\partial Q_p = 0$ und $\partial Q_q = 0$, oder

(4) $$2(p + qx)\partial x_p + x = 0$$

und

(5) $$3(p + qx)\partial x_q + x^2 = 0;$$

und diese fünf Gleichungen würden p, q, x, ∂x_p und ∂x_q bestimmen, wenn sie nicht Widersprüche enthielten, indem aus (2) und (3)

$\partial x_q : \partial x_p = x$, aus (4) und (5) aber $\partial x_q : \partial x_p = \frac{2}{3}x$

hervorgeht. Dieselben Widersprüche ergeben sich auch in dem Fall, wenn (Taf. IV. Fig. 2.) S in der entgegengesetzten Verlängerung der Achse X, also a negativ angenommen wird.

Dieses Ergebniss führt auf folgende

Zweite Aufgabe.

Es sei, q als gegeben vorausgesetzt, p und q so zu bestimmen, dass Q ein Max. oder Min. wird.

Lösung.

In Beziehung auf die Lage in Taf. IV. Fig. 1. ist

(1) $$px + qx^2 = (x - a)^2 . t^2,$$

und wenn hieraus p entwickelt und in $Q = \frac{\pi}{6}(3px^2 + 2qx^3)$ eingeführt wird:

(2) $$Q = \frac{\pi}{6}[3t^2(a - x)^2 x - qx^3],$$

woraus

(3) $$\partial Q_x = \frac{\pi}{2}[a^2t^2 - 4at^2x + (3t^2 - q)x^2]$$

und

(4) $$\partial^2 Q_x = \pi[-2at^2 + (3t^2 - q)x]$$

folgt.

In Beziehung auf die Lage in Taf. IV. Fig. 2. werden diese Gleichungen aber folgende:

$$(5) \qquad px + qa^2 = (a + x)^2 t^2,$$

$$(6) \qquad Q = \frac{\pi}{6}[3t^2(a + x)^2 x - qx^3],$$

$$(7) \qquad \partial Q_x = \frac{\pi}{2}\{a^2t^2 + 4at^2x + (3t^2 - q)x^2\}$$

und

$$(8) \qquad \partial^2 Q_x = \pi[2at^2 + (3t^2 - q)x].$$

In beiden Fällen bestimmen sich dann die zwei Werthe für x, welche ein Max. oder Min. liefern können, aus der Gleichung $\partial Q_x = 0$, und tritt einer oder beide ein, so entscheidet dann (4) oder (8), ob ein Max. oder Min. gefunden ist. Aus (1) und (2) oder aus (5) und (6) sind dann die zugehörigen Werthe für p und Q zu entnehmen.

Dritte Aufgabe.

Die besonderen Werthe von x, p und Q in Beziehung auf Taf. IV. Fig. 1. für die verschiedenen Kegelschnitte zu bestimmen.

Lösung.

A. Für die Parabel, also zu $q = 0$.

Aus $\partial Q_x = 0$ folgt $(3x - a)(x - a) = 0$, und nur $3x - a = 0$ liefert, wie erforderlich, für p einen positiven Werth; die Resultate sind daher:

$$x = \frac{a}{3}, \quad p = \frac{4}{3}at^2 \text{ und } Q = \frac{2\pi}{27}a^3t^2 \text{ als Max.}$$

B. Für die Ellipse, also q negativ gewählt.

Es entsteht:

$$x = \frac{2t \pm \sqrt{(t^2 - q)}}{3t^2 + q}at,$$

$$p = \frac{t^2 + q \mp t\sqrt{(t^2 - q)}}{3t^2 + q}.2at^2,$$

$$Q = \frac{t^3 \mp 3qt \mp (t^2 - q)^{\frac{3}{2}}}{(3t^2 + q)^2}.\frac{\pi a^3 t^3}{3}.$$

Für die oberen Zeichen wird Q ein Min., für die unteren ein Max., doch nur wenn $t^2 > q$ festgesetzt ist. Zu $q = t^2$ existirt weder ein Max., noch ein Min., indem zu $x = \frac{a}{2}$ und $p = qa$ sich $\partial^2 Q_x = 0$ und $\partial^3 Q_x = 4t^2$ ergiebt.

C. Für die Hyperbel, also q positiv gewählt.

Die Formeln führen auf folgende Abtheilungen:

a) Wenn $q = 3t^2$ ist.

Es entsteht nur

$$x = \frac{a}{4}, \quad p = \tfrac{3}{2}at^2 \text{ und } Q = \frac{\pi}{16}a^3t^2 \text{ als Max.}$$

b) Wenn $q > 3t^2$ angenommen ist.

Wird unter n jede positive Zahl > 0 verstanden und $q = (3+n)t^2$ gesetzt, so erhält man:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{(4+n)}}{n}a,$$

$$p = \frac{2+n \mp \sqrt{(4+n)}}{n} . 2at^2$$

und

$$Q = \frac{(4+n)^{\frac{3}{2}} \mp (8+3n)}{n^2} . \frac{\pi}{3}a^3t^2$$

als Max. für die oberen Zeichen, aber nicht als Min. für die unteren, indem für den absoluten Werth, welchen x in diesem Fall annimmt, also für $x = \frac{2+\sqrt{(4+n)}}{n}a$, ein D in den zweiten Zweig der Hyperbel fällt, weil $\frac{2+\sqrt{(4+n)}}{n}a$ grösser ist als die Zwergachse $\frac{p}{q} = \frac{2+n+\sqrt{(4+n)}}{n(3+n)} . 2a$ und zwar um

$$\frac{2+(1+n)\sqrt{(4+n)}}{n(3+n)}a = u;$$

dann ist aber die Gleichung $y^2 = px + qx^2$ nicht mehr entsprechend, sondern die $y^2 = -px + qx^2$ oder bequemer die $y^2 = pu + qu^2$, zu welcher

$$Q = \int_{\frac{p}{q}}^{x} (-px + qx^2)\,dx$$

oder

$$=\int_0^u (pu+qu^2)\,du = \frac{\pi}{6}(3pu^2+2qu^3)$$

sich ergiebt, woraus ein ausgezeichneter Werth nicht hervorgehen kann.

c) Für $q < 3t^2$.

Bezeichnet m jede positive Zahl zwischen 0 und 3 und wird q durch $(3-m)t^2$ ausgedrückt, so ergiebt sich:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(4-m)}}{m}\,a,$$

$$p = \frac{m-2 \mp \sqrt{(4-m)}}{m}\cdot 2at$$

und

$$Q = \frac{(4-m)^{\frac{3}{2}} \pm (8-3m)}{m^2}\cdot\frac{\pi}{3}a^3t^2$$

als Max. für die unteren Zeichen, aber nicht als Min. für die oberen, welche Behauptung so wie in b) zu begründen ist, indem hier p negativ wird.

Zu bemerken ist hier noch, dass, wenn m zwischen 2 und 3 fällt, nur ein Zweig von G geschnitten wird, beide aber, wenn $m < 2$ ist; zu $m = 2$, also $q = t^2$, wird G parallel mit der einen Asymptote, und es findet nur ein D statt, wozu $x = (1-\sqrt{\tfrac{1}{2}})a$, $p = at^2\sqrt{2}$ und $Q = \frac{\sqrt{2}-1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}a^3t^2$ als Max. sich ergiebt.

Vierte Aufgabe.

Für die verschiedenen Kegelschnitte in Beziehung auf Taf. IV. Fig. 2. die besonderen Werthe von x, p und Q zu ermitteln.

Lösung.

Für die Parabel und Ellipse gehen aus (7), $\partial Q_x = 0$ gesetzt, nur negative Werthe für x hervor, zu welchen kein D existirt. Für die Hyperbel wird, wenn $q = 3t^2$ ist, x sowohl wie Q negativ, was nicht entsprechen kann; zu $q \lesseqgtr 3t^2$ ist die Untersuchung übereinstimmend mit der in C. b) und c) der dritten Aufgabe.

XII.

Integration der Differentialgleichung

(1) $$y^{(n)}=Ax^my'+Bx^{m-1}y,$$

unter A und B positive und unter m und n ganze positive Zahlen verstanden.

Von

Herrn *Simon Spitzer*

zu Wien.

Ich setze das Integral obiger Differentialgleichung in folgender Form voraus:

(2) $$y=\int_{u_1}^{u_2}\psi(ux).V\partial u,$$

unter V und $\psi(ux)$ Functionen von u und ux, und unter u_1 und u_2 constante Zahlen verstanden.

Aus (2) folgt:

$$y'=\int_{u_1}^{u_2}u\psi'(ux)V\partial u,\quad y^{(n)}=\int_{u_1}^{u_2}u^n\psi^{(n)}(ux)V\partial u,$$

und werden diese Werthe in (1) substituirt, so erhält man:

(3) $$\int_{u_1}^{u_2}V\{u^n\psi^{(n)}(ux)-Ax^mu\psi'(ux)-Bx^{m-1}\psi(ux)\}\partial u=0.$$

Das mittlere Glied des links stehenden Ausdrucks lässt sich transformiren, es ist nämlich

$$-\int_{u_1}^{u_2} VAx^m u\psi'(ux)\partial u$$

$$= -Ax^{m-1}\left\{Vu\psi(ux)\right\}_{u_1}^{u_2} + A\int_{u_1}^{u_2} x^{m-1}\psi(ux).\frac{\partial(Vu)}{\partial u}.\partial u.$$

Man hat demnach

$$-Ax^{m-1}\left\{Vu\psi(ux)\right\}_{u_1}^{u_2}$$

$$+\int_{u_1}^{u_2}\left\{u^n\psi^{(n)}(ux)V + Ax^{m-1}\psi(ux)\frac{\partial(Vu)}{\partial u} - BVx^{m-1}\psi(ux)\right\}\partial u = 0.$$

Setzt man nun

(4) $$\psi^{(n)}(ux) = u^{m-1}x^{m-1}\psi(ux),$$

so geht obige Gleichung über in:

$$-Ax^{m-1}\left\{Vu\psi(ux)\right\}_{u_1}^{u_2} + x^{m-1}\int_{u_1}^{u_2}\psi(ux)\left\{Vu^{m+n-1} + A\frac{\partial(Vu)}{\partial u} - BV\right\}\partial u$$
$$= 0,$$

und dieser genügt man, wenn man V so wählt, dass

(5) $$Vu^{m+n-1} + A\frac{\partial(Vu)}{\partial u} - BV = 0,$$

und die Integrationsgrenzen so, dass

(6) $$\left\{Vu\psi(ux)\right\}_{u_1}^{u_2} = 0$$

wird. Aus (5) folgt:

$$V = u^{\frac{B}{A}-1}.e^{-\frac{u^{m+n-1}}{A(m+n-1)}},$$

und diess in (6) substituirt, gibt die Gleichung:

$$u^{\frac{B}{A}}.e^{-\frac{u^{m+n-1}}{A(m+n-1)}}\psi(ux) = 0,$$

der man genügt für $u=0$ und für $u=\infty$. Es ist somit das Integral der vorgelegten Gleichung:

$$y = \int_{u_1}^{u_2}\psi(ux).u^{\frac{B}{A}-1}.e^{-\frac{u^{m+n-1}}{A(m+n-1)}}.\partial u.$$

$\psi(ux)$ muss aus der Gleichung (4) bestimmt werden, und diess lehrt Kummer im 19ten Bande von Crelle's Journal.

Sehr leicht ist es, diese Methode zu verallgemeinern und die Grenzen ihrer Anwendbarkeit zu erweitern.

XIII.

Ueber die Construction der Korbbögen.

Von

Herrn *C. Küpper*,

Lehrer an der Prov.-Gewerbeschule in Trier.

Bisher hat selten ein Mathematiker von Fach diesen aus Kreisbögen zusammengesetzten Linien einige Aufmerksamkeit zugewandt, vielleicht, weil die sie betreffenden Fragen durch ganz elementare Erörterungen sich erledigen lassen. Dies ist auch wohl der Grund, weshalb noch keine der Einfachheit des Gegenstandes entsprechende Darstellung desselben erschienen ist. Indem ich eine solche versuche, wird sich mir die Gelegenheit bieten, Eins oder das Andere, das für die Praxis von einigem Nutzen sein könnte, hervorzuheben.

I. Korbbogen, aus drei Mittelpunkten beschrieben.

Erste allgemeine Construction.

OA (Taf. IV. Fig. 3.) ist die halbe Spannweite, OB die Pfeilhöhe des Bogens. Man nehme $MA > OB$ und beschreibe mit MA um M den Viertelkreis AD, verbinde D mit B und verlängere BD bis an den Viertelkreis in E; nun ziehe man EM, so

trifft diese Gerade die verlängerte Pfeilhöhe in dem zweiten Mittelpunkte N; der dritte Mittelpunkt liegt auf der Spannweite, eben so weit von O entfernt wie M.

Beweis. Die Dreiecke MED, NEB sind ähnlich, folglich das letztere gleichschenkelig: $NE = NB$.

Für die Folge werde beachtet, dass der Peripheriewinkel AED oder $\angle AEB = \text{const.} = 135^0$.

Zweite allgemeine Construction.

Mit der halben Spannweite als Radius beschreibe man um O (Taf. IV. Fig. 4.) den Viertelkreis AB', wähle auf diesem einen Punkt G im Allgemeinen beliebig, und verbinde ihn mit A, B, O; hierauf ziehe man durch B $BE \parallel B'G$, sodann $EMN \parallel GO$, so sind M, N zwei Mittelpunkte.

Beweis. Die Dreiecke MAE, MBE sind beziehlich ähnlich OAG, OBG, und da diese letzteren gleichschenkelig sind, so ist auch:

$$MA = ME, \quad NB = NE.$$

Auch hier genügt ein Blick auf die Figur, um zu erkennen, dass $\angle AEB = \angle AGB' = 135^0$.

Diese Auflösung ergibt nur dann einen brauchbaren Gewölbebogen, wenn man den Punkt G nicht ausserhalb eines gewissen Theiles des Viertelkreises AB' annimmt. Zieht man $BG' \parallel BA$, so erhält man diesen Theil, auf den man sich mit der Wahl von G beschränken muss; lässt man G mit G' zusammenfallen, so wird $MA = 0$, und der Korbbogen fällt mit einem Kreisbogen zusammen, der durch A, B geht und dessen Mittelpunkt auf BO liegt; fällt G in B', so wird $MA = OB$, $NB = \infty$, und der Korbbogen besteht aus einem Viertelkreise und einer horizontalen Tangente desselben. Man sieht also, dass der Spielraum für die möglichen Korbbogenformen um so grösser ist, je grösser der Winkel BAO oder auch dessen Tangente, d. i. je grösser das Verhältniss der Pfeilhöhe zur Spannweite. Es gibt also bei einer vorgeschriebenen Construction, die etwa dem Winkel AME einen gegebenen Werth zuschreibt, ein Minimum jenes Verhältnisses, bei welchem die Construction unmöglich wird. Soll z. B., wie dies in der Praxis gewöhnlich vorkommt, $\angle AME = 60^0$, also $\angle AOG = 60^0$ sein, so müsste $\angle G'B'O$ oder $\angle ABO < \angle GB'O$, d. h. $\angle ABO < 75^0$ oder $\angle OAB > 15^0$ sein.

Drittens: Ort des Anschlusses E.

Der Punkt E, in welchem die beiden, den Korbbogen zusammensetzenden Kreisbögen sich berühren, der sogenannte Anschluss, liegt auf einem bestimmten Kreisbogen, welcher von den Punkten A, B begrenzt ist, und dem ein Centriwinkel von 90^0 entspricht. Denn stets ist $\angle AEB = 135^0$.

Um das Dreieck AOB (Taf. IV. Fig. 5.) beschreibe man einen Kreis und halbire in O' den Halbkreis AOB, aus O' mit $O'A$ als Radius beschreibe man den Bogen AEB, so ist dieser der Ort für den Anschluss E. Zieht man BE' horizontal, so begrenzt man auf diesem Bogen ein Stück AE', auf welchem jeder Punkt zum Anschluss genommen werden kann. $\angle AE'B = 135^0$, also $\angle E'AO = 45^0$, E' ist demnach der Anschluss für den Korbbogen, der aus einem Viertelkreise und seiner horizontalen Tangente besteht. Geht man vom Anschluss aus und wählt E auf dem Bogen AE' beliebig, so sieht man leicht, wie mit Hülfe einer der angegebenen Verfahrungsarten die zugehörigen Mittelpunkte M, N zu erlangen sind.

Dieser Weg scheint mir von allen der angemessenste zu sein, weil die Lage des Punktes E, in welchem die Krümmung des Gewölbebogens sich plötzlich ändert, für die Beurtheilung der Festigkeit von Bedeutung ist. Wählt man E so, dass das Verhältniss der Radien der in diesem Punkte sich berührenden Kreise sich der Einheit möglichst nähert, so erhält man eine der vorzüglichsten Constructionen:

Es sei (Taf. IV. Fig. 6.) $MA = x$ der erste, $NB = y$ der zweite Radius, es soll das Verhältniss $\frac{x}{y}$ ein Maximum werden.

Ich ziehe $E\delta \parallel E'B$, verbinde E mit B, diese letztere Linie trifft die AE' in D, so dass MD vertikal und $= x$; demnach ist

$$x:y = ME:NE = DE:BE = E\delta : E\delta + BE'.$$

Das Verhältniss $\frac{E\delta}{E\delta + BE'}$ wird aber ein Maximum, wenn $\frac{BE'}{E\delta}$ ein Minimum, oder da $BE' = \text{const.} = OA - OB$, wenn $E\delta$ ein Maximum wird, d. i. wenn E die Mitte des Bogens AE' wird.

Es sei also Bogen $AE =$ Bogen EE', $\angle BAO = \alpha$, $OA = a$, $OB = b$. Man sieht:

$$\angle EAO = \angle E'AO + \angle EAE' = 45^0 + \frac{\alpha}{2} = \tfrac{1}{2} QAB;$$

E ist mithin der Mittelpunkt des in das Dreieck AQB beschriebenen Kreises, woraus eine bekannte Construction sich ergibt.

Ferner denken wir um M den zum Korbbogen gehörigen Kreis beschrieben, welcher durch E, D geht und die AB in F trifft, so wird auf diesem Kreise Bogen AE = Bogen EF, also EM in H auf AB senkrecht sein. Ueberdies ist Sehne EE' = Sehne EF, also $BE' = BF$; nun war aber $BE' = OA - OB = a - b$, folglich $BF = a - b$. Man findet demnach unmittelbar den Punkt F, wenn man BF gleich der Differenz der halben Spannweite und der Pfeilhöhe nimmt; errichtet man darauf in der Mitte H von AF auf AB die Senkrechte HMN, so erhält man die Punkte M, N.

Die Radien x, y zu berechnen, betrachte man die ähnlichen Dreiecke MAH, AOB und NBH, AOB, und setze $\sqrt{a^2+b^2} = AB = c$.

Da E der Mittelpunkt des in das Dreieck AQB beschriebenen Kreises ist, so folgt:

$$AH = \frac{-a+b+c}{2} = \alpha,$$

$$BH = \frac{a-b+c}{2} = \beta;$$

somit $x = \alpha . \frac{c}{a}$, $y = \beta . \frac{c}{b}$.

Aus diesen Relationen folgt noch:

$$a.x + b.y = (\alpha + \beta).c = c^2$$

und

$$x.y = \alpha.\beta.\frac{c^2}{a.b} = \frac{c^2}{2}.$$

II. Der aus fünf Mittelpunkten beschriebene Korbbogen.

Der erste Mittelpunkt M (Taf. IV. Fig. 6.) ist nur an die Bedingung $MA < OB$ gebunden; aber der auf der verlängerten Pfeilhöhe anzunehmende dritte Mittelpunkt N ist nicht mehr ganz willkührlich, nachdem schon M gewählt wurde. Seien nämlich AE, BF die Kreisbögen, welche durch einen dritten Bogen EF,

dessen Mittelpunkt P sei, verbunden werden können. Da $PE = PF = z$, so folgt:

$$MP + PN = (y - z) + (z - x) = y - x.$$

x, y sind von der Lage von M, N abhängig, und damit es einen Punkt P gebe, welcher der Gleichung

$$MP + PN = y - x \qquad (1)$$

Genüge leistet, muss vor allem $MN < y - x$ sein.

Jedem Punkte M entspricht nun ein Punkt N' so, dass

$$MN' = N'B - x;$$

diesen Punkt erhält man durch die erste der beiden vorigen Constructionen. Wird nun N unterhalb dieses Punktes N' angenommen, so hat man:

$$y = BN' + N'N,$$

also

$$y - x = MN' + N'N,$$

also

$$y - x > MN.$$

Für die Punkte wie r, oberhalb N', ist:

$$Br - x = BN' - N'r - x = MN' - N'r, \text{ d. h. } Br - x < Mr.$$

Hieraus folgt, dass nur bei der Annahme N unterhalb N' die Construction möglich ist.

Wenn aber N so gewählt wurde, dass $MN < y - x$, so sei P so bestimmt, dass $MP + PN = y - x$; dann ist $MP + x = y - NP$, demnach ist die Bedingung (1) erforderlich und hinreichend für die Ausführbarkeit der Construction. Ist dieselbe erfüllt, so ist dadurch ein Ort für P bestimmt, nämlich eine Ellipse, deren Brennpunkte M, N sind und deren grosse Achse $y - x$ ist. Auf dieser Ellipse liegt, wie man leicht sieht, der zur Determination dienende Punkt N'.

III.

Schliesslich möge hier ein geometrischer Satz Platz finden, der eine Generalisation des für den Anschluss gefundenen Ortes ausdrückt und ebenso leicht zu beweisen ist.

Wenn man zwei Punkte A, B (Taf. IV. Fig. 7.) durch zwei sich

an einander schliessende Kreisbögen verbindet, welche in den gegebenen Punkten zwei gegebene Tangenten (AT, BT) haben, so besteht der Ort des Anschlusses aus zwei Kreisen, welche durch A, B gehen. Beschreibt man um das Dreieck ATB einen Kreis, und halbirt die beiden Bögen dieses Kreises, welche A, B zu Endpunkten haben, so erhält man die Mittelpunkte der beiden Ortskreise.

XIV.

Grundzüge einer Theorie der Polaren.

Von

Herrn *C. Küpper*,

Lehrer an der Prov.-Gewerbeschule in Trier.

Im Nachstehenden beabsichtige ich einen analytischen Nachweis der Existenz harmonischer Elemente der Kegelschnitte zu führen. Ich glaube dies auf einem sehr einfachen Wege erreicht zu haben, und obwohl dieser Beweis für sich selbst verständlich, und nach so oftmaliger Bearbeitung das Interesse an Untersuchungen über die Polaren merklich erkaltet ist, so hoffe ich doch, dass in Rücksicht auf den Zusammenhang der Leser geneigt sein dürfte, einige Weitläufigkeit zu entschuldigen, sowie, dass es Manchem neu und erwünscht sein wird, die harmonische Theilung aus dem Grundprinzip der Polarentheorie hergeleitet zu sehen.

Ich bezeichne Punkte mit grossen, Gerade mit kleinen Buchstaben; für die Gleichung einer Geraden a gebrauche ich den Ausdruck $a=0$, verstehe also unter a irgend eine lineare Function von x, y. Soll ausgedrückt werden, dass ein bestimmter Punkt P (x, y oder $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$) auf der Geraden a liegt, so geschieht dies durch $a_{x,y}=0$, $a_{\mathfrak{x},\mathfrak{y}}=0$.

Durch zwei Geraden a, b ist ein Punkt ab bestimmt, durch zwei Punkte A, B eine Gerade AB, die Geraden a, b oder die Punkte A, B heissen ein Paar, und zwar ein Geradenpaar des Punktes ab oder ein Punktenpaar der Geraden AB.

1) Eine Function zweiten Grades mit zwei Veränderlichen:

$$f(x, y) = Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F$$

kann als besonderer Fall folgender Function mit vier Veränderlichen x, y, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ angesehen werden:

$$f(x, y, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = Ay\mathfrak{y} + (Bx\mathfrak{y} + B\mathfrak{x}y) + Cx\mathfrak{x} + Dy + D\mathfrak{y} + Ex + E\mathfrak{x} + F.$$

Diese letztere ist, wie die Schreibweise zeigt, so gebildet, dass sie in Bezug auf (x, y), $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ symmetrisch ist und durch Einführung von x, y statt $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ in

$$f(x, y, x, y) = f(x, y)$$

übergeht. $f(x, y) = 0$ stellt eine Linie zweiten Grades dar. Geben wir $x, y, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ solche Werthe, welche $f(x, y, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0$ befriedigen, so ist hierdurch eine bestimmte Beziehung zwischen den Punkten x, y und den $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ hergestellt. Dem Punkte $P(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}')$ entsprechen nämlich unendlich viele $Q(x, y)$, welche auf der bestimmten Geraden

$$q \equiv f(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}', x, y) = 0$$

liegen. Ist x', y' irgend ein Punkt Q dieser Geraden, d. h. ist

$$q_{x', y'} \equiv f(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}', x', y') = 0, \qquad \text{(I)}$$

so folgt, dass $(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}')$ ein Punkt derjenigen Geraden p ist, welche Q ebenso entspricht, wie q dem Punkte P. Denn es ist

$$p \equiv f(x', y', \mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0,$$

und (I) ist identisch mit

$$p_{\mathfrak{x}', \mathfrak{y}'} = 0.$$

Durch die Angabe einer Linie zweiten Grades ist also das System der Geraden und Punkte in der Ebene so geordnet, dass jedem Punkte P eine Gerade q entspricht, welche seine Polare heisst, und dass die Polare irgend eines Punktes Q der Geraden q den Punkt P enthält, welcher der Pol der Geraden q heisst:

1. Die Polaren aller Punkte (Q) einer Geraden (q) enthalten den Pol P dieser Geraden.
2. Die Pole aller Geraden p eines Punktes P liegen in der Polaren (q) dieses Punktes; betrachten wir nämlich P

als gemeinsamen Punkt der Geraden p, so muss seine Polare nach 1. den Pol einer jeden dieser Geraden enthalten.

2) Wenn eine Function zweiten Grades als das Product zweier linearen Functionen a, b angesehen werden kann, so stellt $a.b=0$ das Geradenpaar a, b dar. In diesem Falle ist die Gleichung der Polare von $P(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$:

$$q=a.b_{\mathfrak{x},\mathfrak{y}}+b.a_{\mathfrak{x},\mathfrak{y}}=0,$$

denn diese Gleichung hat die in 1) ausgesprochene Grundeigenschaft. Die Form der Gleichung zeigt, dass q den Punkt ab enthält, ferner folgt, dass für alle Punkte (x, y), für welche

$$\frac{a_{x,y}}{b_{x,y}}=\frac{a_{\mathfrak{x},\mathfrak{y}}}{b_{\mathfrak{x},\mathfrak{y}}},$$

d. h. für diejenigen, welche auf der Geraden

$$p=a.b_{\mathfrak{x},\mathfrak{y}}-b.a_{\mathfrak{x},\mathfrak{y}}=0$$

liegen, ein und dieselbe Gerade q erhalten wird.

Allen Punkten einer durch ab gehenden Geraden p entspricht als Polare für das Paar a, b eine und dieselbe Gerade q des Punktes ab.

Ist $a-\alpha.b=0$ die Gleichung von p, also für den Punkt $P(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$: $\dfrac{a_{\mathfrak{x},\mathfrak{y}}}{b_{\mathfrak{x},\mathfrak{y}}}=\alpha$, so ist nach dem Vorigen

$$q=a.b_{\mathfrak{x},\mathfrak{y}}+b.a_{\mathfrak{x},\mathfrak{y}}=0$$

oder

$$a+\alpha b=0$$

die Gleichung der Polare von P. Hieraus sieht man, dass umgekehrt p die Polare aller Punkte von q ist. Ferner für das Geradenpaar (p, q) ist b die Polare aller Punkte von a, a die Polare aller Punkte von b. Denn a hat zur Gleichung:

$$(a+\alpha b)+1.(a-\alpha b)=0,$$

und b:

$$(a+\alpha b)-1.(a-\alpha b)=0.$$

Das Paar a, b heisst durch p, q, das Paar p, q durch a, b harmonisch getheilt. Die vier Geraden a, b, p, q heissen harmonische Geraden des Punktes ab oder pq, a zu b, p zu q zugeordnet.

3) Ein Geradenpaar e, d hat mit einem anderen a, b vier Punkte gemein, nämlich ac oder A, ad oder B, bc oder C, bd oder D; es gibt stets ein drittes Paar e, f, welches dieselben Punkte enthält und durch diese bestimmt wird.

Ein Punktenpaar C, D hat mit einem anderen A, B vier Gerade gemein, nämlich AC oder a, AD oder b, BC oder c, BD oder d; es gibt stets ein drittes Paar E, F, welches dieselben Geraden a, b, c, d enthält und durch diese bestimmt wird.

Jede Linie zweiten Grades, welche die Punkte A, B, C, D enthält, kann durch

$$\alpha . ab + \beta . cd = 0 \qquad \text{(I)}$$

dargestellt werden; α, β sind unbestimmte Coeffizienten, für besondere Werthe derselben bezeichnet diese Gleichung das Paar e, f.

Ist nun q die Polare eines Punktes P in Bezug auf das Paar a, b; r die Polare für das Paar c, d; so stellt $\alpha . q + \beta . r = 0$ die Polare von P in Bezug auf irgend eine der Linien zweiten Grades dar, deren Gleichung (I) ist. (Nach 1)).

Die Form dieser letzteren Gleichung zeigt, dass die Polaren von P in Bezug auf alle Linien zweiten Grades, welche durch vier gegebene Punkte gehen, einen bestimmten Punkt (qr) enthalten.

Erwägen wir ferner, dass, wenn wir P mit dem Punkte ab zusammenfallen lassen, $q = 0$ in obiger Formel (I) zu setzen ist, so folgt, dass die Polaren des Punktes ab für alle in (I) begriffene Linien mit der Geraden r zusammenfallen. Gleiches gilt für die Punkte cd und ef.

Bestimmt man also für den Punkt ab in den Paaren c, d und e, f die Polaren, so fallen diese in eine Gerade zusammen, und da sie die Punkte cd und ef enthalten muss, so ist sie die gemeinsame Gerade dieser Punkte.

Bilden wir aus den Punkten ab, cd, ef ein Dreieck, so hat dieses die Eigenschaft, dass für alle durch A, B, C, D gehende Linien zweiten Grades jede Seite desselben die Polare zur gegenüberliegenden Ecke ist.

4) Aus der vorigen Nummer folgt:

Wenn die harmonischen Geraden p, a, b, q mit den p, a', b', q' die Gerade p gemein haben, so liegt der gemeinsame Punkt der p entsprechenden Geraden q, q' in gerader Linie mit aa', bb' und mit ab', ba'. Die Punkte ab, $a'b'$, qq' sind nämlich die Eckpunkte des Polardreiecks.

Haben vier harmonische Geraden a, b, p, q mit einer Geraden m die Punkte A, B, P, Q gemein, so sind je vier Gerade,

welche A, B, C, D mit irgend einem Punkt der Ebene gemein haben, harmonische. Denn nach dem eben ausgesprochenen Satz sind offenbar die Geraden, welche irgend ein Punkt von p, a, b, q mit A, B, P, Q gemein hat, vier harmonische, z. B. p, a', b', q'; dann haben wieder die Punkte von a', b' oder q' diese Eigenschaft, also überhaupt jeder Punkt der Ebene. Die Polaren von P in Bezug auf alle Geradenpaare, welche die Punkte A, B enthalten, enthalten einen festen Punkt Q von AB; ebenso enthalten die Polaren von Q in Bezug auf diese Geradenpaare den Punkt P. Dass Aehnliches für die Punkte A, B in Bezug auf das Punktenpaar P, Q gilt, leuchtet ein.

Die vier Punkte A, B, P, Q nennen wir vier harmonische der Geraden AB, das Paar A, B durch P, Q, oder P, Q durch A, B harmonisch getheilt.

Hiernach können wir aufstellen:

> Vier harmonische Geraden haben mit jeder Geraden vier harmonische Punkte, vier harmonische Punkte mit jedem Punkt vier harmonische Geraden gemein.

Reciproke Constructionen.

Sind drei Geraden a, b, p eines Punktes gegeben, und man soll die vierte, etwa zu p zugeordnete harmonische (q) finden, so nehme man in einem willkührlichen Punkt von p ein Paar c, d an. Dieses bestimmt mit a, b ein Paar e, f; der Punkt ef liegt auf q.

Sind drei Punkte A, B, P einer Geraden gegeben, und man soll den vierten, etwa zu P zugeordneten harmonischen Q finden, so nehme man auf einer willkührlichen Geraden von P ein Paar C, D an. Dieses bestimmt mit A, B ein Paar E, F; die Gerade EF geht durch P.

Um die Polare q (Taf. V. Fig. 1.) eines Punktes P in Bezug auf eine Linie zweiten Grades K zu finden, lege man durch P irgend ein Paar a, b, welches mit K die vier Punkte A, B, C, D gemein hat. Dadurch sind noch zwei Paare (AD, CB), (AC, BD) gegeben, welche diese Punkte enthalten. Wenn Q', R' die Punkte sind, denen diese Paare angehören, so ist $Q'R'$ die Polare zu P. Diese Gerade $Q'R'$ oder q bestimmt mit a, b zwei Punkte Q, R, die, wie man sieht, beziehlich mit P die Paare A, B und C, D harmonisch theilen. Weil nun a, b beliebig waren, so folgt, dass q eine jede Gerade von P, welche mit K zwei

Punkte M, N gemein hat, in einem Punkte trifft, welcher im Paare (M, N) zu P der zugeordnet harmonische ist.

Das Reziproke des am Eingange dieser Nummer aufgestellten Satzes leuchtet nach dem Gesagten von selbst ein:

Wenn die harmonischen Punkte P, A, B, Q den Punkt P gemein haben, so geht die gemeinsame Gerade der zu P zugeordneten Punkte Q, Q' durch einen Punkt mit AA', BB' und mit AB', BA'.

5) $\alpha . ad + \beta . bc = 0$ stellt eine Linie zweiten Grades dar (K), welche die Punkte ab oder M, cd oder N, ac oder A, bd oder B enthält. (Taf. V. Fig. 2.)

Jeder Punkt x, y der Linie K erfüllt die Bedingung

$$\frac{b_{x,y} . c_{x,y}}{a_{x,y} . d_{x,y}} = -\frac{\alpha}{\beta},$$

und umgekehrt, jeder Punkt, welcher diese Bedingung erfüllt, liegt auf K.

Wir wollen $\frac{\alpha}{\beta}$ so bestimmt denken, dass der Punkt $P(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ auf K liegt, d. h. durch die fünf Punkte M, N, A, B, P eine Linie zweiten Grades legen. Wir müssen setzen:

$$\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{b_{\mathfrak{x},\mathfrak{y}} . c_{\mathfrak{x},\mathfrak{y}}}{a_{\mathfrak{x},\mathfrak{y}} . d_{\mathfrak{x},\mathfrak{y}}},$$

wodurch die Gleichung für K wird:

$$b_{\mathfrak{x},\mathfrak{y}} . c_{\mathfrak{x},\mathfrak{y}} . a . d - a_{\mathfrak{x},\mathfrak{y}} . d_{\mathfrak{x},\mathfrak{y}} . b . c = 0.$$

Nun ist für die Polaren von P in Bezug auf die Paare a, b und c, d:

$$\frac{b_{\mathfrak{x},\mathfrak{y}}}{a_{\mathfrak{x},\mathfrak{y}}} = -\frac{b}{a}, \quad \frac{c_{\mathfrak{x},\mathfrak{y}}}{d_{\mathfrak{x},\mathfrak{y}}} = -\frac{c}{d}.$$

Also auch für den Punkt Q, (x, y), den diese beiden Polaren gemein haben:

$$\frac{b_{x,y} . c_{x,y}}{a_{x,y} . d_{x,y}} = \frac{b_{\mathfrak{x},\mathfrak{y}} . c_{\mathfrak{x},\mathfrak{y}}}{a_{\mathfrak{x},\mathfrak{y}} . d_{\mathfrak{x},\mathfrak{y}}} = -\frac{\alpha}{\beta},$$

d. i. Q liegt auf der Linie K.

Hieraus ergibt sich als besonderer Fall: Wenn P auf AB liegt, so liegt Q auch auf AB; K wird das Geradenpaar MN, AB, und da M, N willkührlich in der Ebene genommen werden können, so leuchtet ein, dass, wenn von irgend vier harmonischen Geraden p, a, b, q die Geraden p, a, b die Punkte P, A, B enthalten, dann auch die vierte q den Punkt Q enthalten muss.

Wenn P in keiner der Geraden a, b, c, d, MN, AB liegt, also die Verhältnisse

$$\frac{b_{\mathfrak{x},\mathfrak{y}}}{a_{\mathfrak{x},\mathfrak{y}}}, \quad \frac{c_{\mathfrak{x},\mathfrak{y}}}{d_{\mathfrak{x},\mathfrak{y}}}$$

weder 0 noch $\frac{1}{0}$ sind, noch K ein Geradenpaar ist, so findet sich Q ebenfalls in keiner dieser Geraden.

Für einen Kegelschnitt folgt also:

In Bezug auf zwei Punkte des Kegelschnitts entspricht jedem Punkte desselben ein vierter Punkt, welcher auch auf dem Kegelschnitt liegt, so, dass die Geraden, welche diese vier Punkte mit irgend einem Punkte M des Kegelschnitts gemein haben, vier harmonische mit bestimmter Zuordnung bilden.

Ist z. B. in den vier harmonischen Geraden a, b, c, d die Zuordnung a zu b, c zu d gewählt, so sind die vier Geraden, welche M' mit A, B, C, D gemein hat, vier harmonische mit der Zuordnung a' zu b', c' zu d'. (Taf. V. Fig. 3.)

Die vier Punkte A, B, C, D nennt man vier harmonische Punkte des Kegelschnitts; ausser den Punkten des Kegelschnitts gibt es keinen Punkt, welcher mit A, B, C, D vier harmonische Geraden mit der gegebenen Zuordnung A zu B gemein hätte; denn wenn auf der Geraden a irgend ein Punkt N etwa diese Eigenschaft haben soll, so müssen nach der vorigen Nummer die Punkte A, B, C, D in einer Geraden liegen.

6) Wenn A, B, C, D (Taf. V. Fig. 4.) vier Punkte sind, von denen keine drei in einer Geraden liegen, so gibt es auf jeder Geraden eines dieser Punkte (etwa auf der Geraden a des Punktes A) einen, aber auch nur einen, Punkt M so, dass die Geraden a, b, c, d, welche er mit den gegebenen Punkten gemein hat, vier harmonische mit bestimmter Zuordnung bilden (a zu b, c zu d).

Denn bestimmen wir zu dem Punkte A', welchen die willkührlich im Punkte A angenommene Gerade a mit CD gemein hat, im Paar C, D den zugeordnet harmonischen Punkt B'; dann ist

BB' die Gerade b, und der gemeinsame Punkt von a und b, nämlich ab, ist der gesuchte M.

Wenn es noch einen Punkt auf a geben sollte von der verlangten Eigenschaft, so müssten die Punkte A, B, C, D nach 4) in einer Geraden liegen.

Auf diese Weise findet man die Punkte M eines Kegelschnitts, welcher unter allen durch A, B, C, D möglichen Kegelschnitten dadurch charakterisirt ist, dass für ihn A, B, C, D vier harmonische Punkte mit der Zuordnung A zu B sind. Steiner nennt diesen Kegelschnitt den um das Viereck $ABCD$ beschriebenen harmonischen Kegelschnitt.

Wird keine Zuordnung festgesetzt, so gibt es deren natürlich drei, je nachdem die Zuordnung A zu B, A zu C oder A zu D ist.

Wenn wir in der vorigen Construction B' mit $\mathfrak{B}$, dem gemeinsamen Punkt von CD und AB, zusammenfallen lassen, so wird umgekehrt A' der zu $\mathfrak{B}$ in Paare C, D zugeordnet harmonische Punkt. Für die Gerade AA' oder a fällt sodann M mit A zusammen. Es gibt also auf dieser Geraden ausser A keinen Punkt des Kegelschnitts, sie berührt ihn also.

Die vier Tangenten in A, B, C, D, die hiernach leicht erhalten werden, wollen wir a, b, c, d nennen. Von einem um das Viereck $ABCD$ beschriebenen harmonischen Kegelschnitt sind mithin noch die vier Tangenten a, b, c, d gegeben.

7) Sind A, B, C, D vier harmonische Punkte eines Kegelschnitts, und in denselben a, b, c, d die Tangenten, so sind a, AB, AC, AD; b, BA, BC, BD; u. s. w. je vier harmonische Geraden (Taf. V. Fig. 5.). Die Genannten haben die Gerade AB entsprechend gemein, daher müssen nach 4) die Punkte ab oder P, C, D, in einer Geraden liegen; dasselbe gilt für cd oder Q, A, B.

Wenn demnach A, B zwei Punkte eines Kegelschnitts sind, a, b seien Tangenten für diese Punkte, so wird jede durch den Punkt ab oder P gehende Gerade den Kegelschnitt in zwei Punkten C, D treffen, die mit A, B vier harmonische bilden; denn bestimmen wir zu C den im Paare A, B ihm zugeordnet harmonischen D, so enthält die Gerade CD den Punkt P.

Ziehen wir von einem Punkte P an einen Kegelschnitt zwei Tangenten a, b, und eine den Kegelschnitt schneidende Gerade p, so sind auf dieser die Punkte P, C, D, Q' harmonisch mit

der Zuordnung P zu Q'. Denn BA, BC, BD, BP sind vier harmonische Geraden. Vergleichen wir dies Resultat mit der in 4) angegebenen Construction der Polare, so finden wir, dass AB oder q die Polare von P ist.

Der Pol einer Geraden AB ist der gemeinsame Punkt der Tangenten a, b. Die Pole aller Geraden, welche den Punkt A enthalten, liegen somit in a, folglich ist a die Polare von A.

Die Tangente ist Polare des Berührungspunktes; wenn $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ die Coordinaten dieses letzteren sind, so ist mithin die Gleichung der Tangente: $f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, x, y) = 0$.

8) Sind die Punkte A, B, C, D harmonische Punkte eines Kegelschnitts, a, b, c, d die Tangenten, so sind diese harmonische Geraden, d. h. wie jeder Punkt M von K vier harmonische Geraden mit A, B, C, D gemein hat, so hat jede Tangente m vier harmonische Punkte mit a, b, c, d gemein.

Denn die Punkte ma, mb, mc, md sind die Pole von MA, MB, MC, MD, diese letzteren bilden vier harmonische Geraden des Punktes M, folglich müssen jene vier harmonische Punkte der Geraden m sein. (Nach der in 4) nachgewiesenen Reziprozität der Construction harmonischer Punkte und harmonischer Geraden.)

Es leuchtet ferner ein, da nur die Punkte M des Kegelschnitts die Eigenschaft haben, mit A, B, C, D verbunden, harmonische Geraden zu geben, dass auch nur der Geraden m des Kegelschnitts die Eigenschaft zukommt, mit a, b, c, d harmonische Punkte gemein zu haben.

Wenn a, b, c, d vier Geraden sind, von denen keine drei durch einen Punkt gehen, so kann man für jeden Punkt irgend einer derselben eine, aber auch nur eine Gerade m bestimmen, so dass die Punkte ma, mb, mc, md vier harmonische Punkte mit gegebener Zuordnung sind (Taf. V. Fig. 6.).

Dann nehmen wir A' auf a beliebig, verbinden A' mit cd, und bestimmen zu dieser Geraden a' im Paare c, d die zugeordnet harmonische b'. Die Verbindungslinie von A' mit dem Punkt bb' ist die gesuchte Gerade m.

Wird die eben construirte Gerade b' durch den Punkt ab gelegt, d. h. ist sie die Verbindungslinie p von ab und cd; so fällt m mit a zusammen. Also ist unter den Punkten von a, für welche es nur eine Gerade m gibt, einer A, für den a selber diese Gerade ist.

Der Punkt A ist der vierte harmonische zu ab, ac, ad, und zwar zu ab zugeordnet; wir haben ihn erhalten, indem wir zu p die zugeordnet harmonische Gerade r im Paare c, d construirten, als Durchschnittspunkt von r und a. Es sei q ebenso im Paare a, b zu p zugeordnet harmonisch, so haben wir vier Punkte A, B, C, D, nämlich ra, rb, qc, qd, für welche die Geraden m beziehlich mit a, b, c, d zusammenfallen.

Ziehen wir AB, AC, AD, so zeigt die Figur, dass a die zugeordnet harmonische Gerade zu AB im Paare AC, AD ist. Aehnliches für B, C, D.

Legen wir also durch A, B, C, D einen Kegelschnitt so, dass A, B, C, D harmonische Punkte mit der Zuordnung A zu B werden, so berührt dieser die Geraden a, b, c, d und wird von der gesuchten Geraden m umhüllt.

9) Die Polarfigur eines Kegelschnitts K in Bezug auf einen andern Kegelschnitt ist wieder ein Kegelschnitt $\mathfrak{K}$.

A, B, C, D seien vier harmonische Punkte von K, a zu b zugeordnet, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ seien die Polaren dieser Punkte; jeder Punkt M von K hat die Eigenschaft, dass MA, MB, MC, MD vier harmonische Geraden sind. Ist also $\mathfrak{m}$ die Polare von M, so müssen nach Früherem die Punkte $\mathfrak{ma}$, $\mathfrak{mb}$, $\mathfrak{mc}$, $\mathfrak{md}$ harmonische Punkte sein, demnach ein Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{m}$ umhüllt werden.

Berührt ferner $\mathfrak{K}$ die Geraden $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ in den Punkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, und sind a, b, c, d die Tangenten von K in den Punkten A, B, C, D, so ist nach dem vorigen Satze $\mathfrak{A}$ der vierte harmonische Punkt zu $\mathfrak{ab}$, $\mathfrak{ac}$, $\mathfrak{ad}$; a die vierte harmonische Gerade zu AB, AC, AD, folglich, weil $\mathfrak{ab}$, $\mathfrak{ac}$, $\mathfrak{ad}$ die Pole von AB, AC, AD sind, ist $\mathfrak{A}$ der Pol zu a, ebenso $\mathfrak{B}$ der Pol zu b, $\mathfrak{C}$ zu c, $\mathfrak{D}$ zu d.

Um dies kurz auszudrücken, denken wir M und zu gleicher Zeit m (nämlich die Tangente in M) den Kegelschnitt K beschreiben; $\mathfrak{m}$ (die Polare zu M) und $\mathfrak{M}$ (der Pol von m) beschreiben dann zugleich den Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, so dass $\mathfrak{m}$ stets Tangente von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{M}$ ihr Berührungspunkt ist.

XV.

Integration einiger Differential-Gleichungen zweiter Ordnung.

Von
Herrn Professor Dr. *J. Ph. Wolfers*
zu Berlin.

Es ist bekannt, dass die Auffindung der Integrale im allgemeinen, in höherm Maasse die Integration der Differential-Gleichungen, besondern Schwierigkeiten unterworfen ist und daher an Mängeln leidet, welche wohl nie ganz beseitigt werden dürften. An ähnlichen Schwierigkeiten leiden alle indirecten Operationen der Analysis und erstere werden nur dadurch leichter überwunden, dass man bei den einfachern Operationen eher im Stande ist, durch Anwendung der entgegengesetzten directen Operationen die Richtigkeit des auf irgend eine Weise ermittelten Resultates der indirecten Operation darzuthun. In Euler's Integral-Rechnung werden nun verschiedene Methoden angegeben und auseinandergesetzt, nach denen man im Stande ist, die Integrale gegebener Differential-Gleichungen aufzusuchen. Es fehlt dabei nicht an Beispielen, welche die Anwendung dieser Hülfsmittel erläutern. Ist dies nun sicher für die vollständige Einsicht in die Zweckmässigkeit der dargestellten Methoden höchst angemessen, so dürfte dieser Zweck noch mehr erreicht werden, wenn man den von Euler selbst an den betreffenden Stellen aufgeführten Beispielen noch anderweitige hinzufügte. Hierzu bietet dasselbe Werk Gelegenheit, indem der Verfasser an andern Stellen die Integrale von einzelnen Differential-Gleichungen zweiter Ordnung anführt, ohne die Art ihrer Herleitung mitzutheilen.

§. 1.

Der erste Fall dieser Art kommt im zweiten Theile, pag. 285. vor, wo für die Differential-Gleichung

$$x^2(a-bx)ddy-2x(2a-bx)dxdy+2(3a-bx)ydx^2=6a^2dx^2$$

als Integral die Gleichung

$$y=a+bx+\frac{(A+Bx)x^2}{a-bx},$$

aufgeführt wird; A und B sind hier die beliebigen Constanten.

Dass dieses Integral jener Differential-Gleichung Genüge leiste, wird man durch angestellte Differentiation leicht einsehen können; wir wollen nun aber mittelst der vorangehenden Methoden zeigen, wie man dieses Integral möglichst direct herleiten könne. Zu diesem Ende führen wir die Aufgabe 108. pag. 99. an, wonach man für die Gleichung

$$(1)\qquad ddy+Pdydx+Qydx^2=Xdx^2$$

den Multiplicator V als eine Function von x finden soll, welcher diese Gleichung integrabel mache. P, Q und X werden hierbei als irgend welche Functionen von x gedacht.

Nach der dort gegebenen Auflösung soll

$$(2)\qquad Vddy+VPdydx+VQydx^2=VXdx^2$$

integrabel sein, und indem man für das Integral des ersten Theiles den Ausdruck

$$Vdy+Sydx$$

annimmt, erhält man

$$(3)\qquad VPdydx+VQydx^2=dydV+Sdydx+ydSdx,$$

und weil nothwendig S eine Function von x ist,

$$VPdx=dV+Sdx \quad \text{und} \quad VQdx=dS$$

oder

$$S=VP-\frac{dV}{dx}.$$

Wir erhalten daher zur Bestimmung von V die Differential-Gleichung

$$VQdx = VdP + PdV - \frac{ddV}{dx}$$

oder

(4) $$ddV - PdVdx + Vdx(Qdx - dP) = 0.$$

Diese Gleichung, welche zur Bestimmung von V dienen soll, ist zwar wieder eine Differential-Gleichung zweiter Ordnung, indessen hat man sie für einfacher als die ursprünglich gegebene zu halten, weil X nicht darin enthalten ist. Kann man daher diese Gleichung auflösen, oder ist wenigstens ein besonderes Integral derselben bekannt, damit man V erhalte; so wird nach der oben angenommenen Form des Differentiales erster Ordnung und dem für S erhaltenen Werthe:

(5) $$Vdy + y(VPdx - dV) = dx \int VPdx.$$

Da offenbar

$$Vdy - ydV$$

integrabel wird, wenn man durch V^2 dividirt, so kann man statt (5) schreiben:

$$d.\frac{y}{V} + \frac{y}{V}Pdx = \frac{dx}{V^2}\int VPdx,$$

und indem wir den ersten Theil durch σ multipliciren, setzen wir

$$\sigma d.\frac{y}{V} + \frac{\sigma y}{V}Pdx = d.\frac{\sigma y}{V} = \sigma d.\frac{y}{V} + \frac{y}{V}d\sigma;$$

alsdann wird

$$\frac{d\sigma}{\sigma} = Pdx \quad \text{und} \quad \sigma = e^{\int Pdx}.$$

Demnach wird der erste Theil von (5) integrabel, wenn wir ihn durch

$$\frac{e^{\int Pdx}}{V^2}$$

multipliciren; es ergibt sich demnach

$$\frac{y}{V}e^{\int Pdx} = \int \frac{dx}{V^2} e^{\int Pdx} \int VXdx,$$

oder

(6) $$y = Ve^{-\int Pdx} \int \frac{dx}{V^2} e^{\int Pdx} \int VXdx.$$

Wir können nun die zu integrirende Differential-Gleichung zweiter Ordnung so schreiben:

$$ddy - \frac{2(2a-bx)}{x(a-bx)}dydx + \frac{2(3a-bx)}{x^2(a-bx)}ydx^2 = \frac{6a^3}{x^2(a-bx)}dx^2,$$

und vergleichen wir diese mit (1), so haben wir:

$$P = \frac{-2(2a-bx)}{x(a-bx)},$$

$$Q = \frac{2(3a-bx)}{x^2(a-bx)},$$

$$X = \frac{6a^3}{x^2(a-bx)};$$

und hieraus sogleich

$$\int Pdx = -4\int\frac{dx}{x} - 2\int\frac{bdx}{a-bx} = -4lx + 2l(a-bx),$$

also

$$e^{\int Pdx} = \frac{(a-bx)^2}{x^4}.$$

Wir haben zunächst das Integral

$$\int VXdx = 6a^3\int\frac{Vdx}{x^2(a-bx)}$$

zu bestimmen, und wir sehen daher sogleich, dass diese Integration sich einfach wird durchführen lassen, wenn wir für V die Form

$$V = \frac{(a-bx)^\nu}{x^n}$$

annehmen, wo ν und n positive ganze Zahlen bezeichnen. Um deren Werthe zu bestimmen, benutzen wir die Gleichung (4), indem wir darin

$$V = \frac{(a-bx)^\nu}{x^n},$$

$$\frac{dV}{dx} = -\frac{n(a-bx)^\nu}{x^{n+1}} - \frac{\nu b(a-bx)^{\nu-1}}{x^n},$$

$$\frac{ddV}{dx^2} = \frac{n(n+1)(a-bx)^\nu}{x^{n+2}} + \frac{2n\nu b(a-bx)^{\nu-1}}{x^{n+1}} + \frac{\nu(\nu-1)b^2(a-bx)^{\nu-2}}{x^n}$$

und

$$\frac{dP}{dx} = \frac{4a^2 - 8abx + 2b^2x^2}{x^2(a-bx)^2},$$

so wie ausserdem die Werthe von P und Q substituiren. Wir erhalten alsdann nach einiger Reduction die Gleichung

$$\frac{(a-bx)^{\nu-2}}{x^{n+2}} \{(n-1)(n-2) + (n-2)(n-\nu)abx + [n(n-1) + \nu(1+\nu-2n)]\}$$
$$= 0,$$

woraus sich folgende drei Gleichungen ergeben:

$$\text{I.} \quad (n-1)(n-2) = 0,$$

$$\text{II.} \quad (n-2)(n-\nu) = 0,$$

$$\text{III.} \quad n(n-1) + \nu(1+\nu-2n) = 0.$$

Aus I. folgt entweder $n=1$ oder $n=2$,

für $n=1$ aus II. $\nu = n = 1$,

„ III. $\nu = 0$ oder $\nu = 1$,

von denen nur der letztere Werth gelten kann, weil der erste der Gleichung II. nicht entsprechen würde.

Für $n=2$ ist die Gleichung II. von selbst erfüllt, und wir erhalten aus III.

$$\nu = 1 \quad \text{oder} \quad \nu = 2,$$

welche beide Werthe gelten können. Wir haben demnach für n und ν die zusammengehörigen Werthe

$$n=1 \text{ und } \nu=1, \quad n=2 \text{ und } \nu=1, \quad n=2 \text{ und } \nu=2;$$

sowie

$$V = \frac{a-bx}{x}, \quad V = \frac{a-bx}{x^2} \quad \text{und} \quad V = \frac{(a-bx)^2}{x^2}.$$

Für den ersten Werth von V erhalten wir nun:

$$\int VXdx = 6a^2 \int \frac{dx}{x^3} = -\frac{3a^2}{x^2} + C,$$

$$\int e^{\int Pdx} \frac{dx}{V^2} \int VXdx = \int [-\frac{3a^2dx}{x^4} + \frac{Cdx}{x^2}] = \frac{a^2}{x^3} - \frac{C}{x} + B$$

und nach (6)

$$y=\frac{x^2}{a-bx}\left[\frac{a}{x^2}-\frac{C}{x}+B\right],$$

d. h., indem wir statt der beliebigen Constanten C setzen:

$$C=b^2-A,$$

$$y=a+bx+\frac{(A+Bx)x^2}{a-bx}.$$

Für den zweiten Werth von V erhalten wir:

$$\int VXdx=6a^3\int\frac{dx}{x^4}=-\frac{2a^3}{x^3}+B,$$

$$\int e^{\int Pdx}\frac{dx}{V^2}\int VXdx=\int dx[-\frac{2a^3}{x^3}+B]=\frac{a^3}{x^2}+Bx+C,$$

$$y=\frac{x^2}{a-bx}\left[\frac{a^2}{x^2}+Bx+C\right],$$

oder, indem wir

$$C=A-b^2$$

setzen,

$$y=a+bx+\frac{(A+Bx)x^2}{a-bx}.$$

Für den dritten Werth von V wird:

$$\int VXdx=6a^2\int\frac{(a-bx)dx}{x^4}=-\frac{2a^3}{x^3}+\frac{3a^2b}{x^2}+C,$$

$$\int e^{\int Pdx}\frac{dx}{V^2}\int VXdx=-2a^3\int\frac{dx}{x^3(a-bx)^2}+3a^2b\int\frac{dx}{x^2(a-bx)^2}$$
$$+C\int\frac{dx}{(a-bx)^2}.$$

Nach der allgemeinen Integral-Formel

$$\int\frac{dx}{x^m(a+bx)^n}=\frac{-1}{(m-1)ax^{m-1}(a+bx)^{n-1}}-\frac{b(m+n-2)}{a(m-1)}\int\frac{dx}{x^2(a-bx)^2}$$

wird nun

$$-2a^3\int\frac{dx}{x^3(a-bx)^2}=\frac{a^2}{x^2(a-bx)}-3a^2b\int\frac{dx}{x^2(a-bx)^2},$$

wonach daſs zweite Glied fortfällt, ferner

$$C\int\frac{dx}{(a-bx)^2}=\frac{C}{b(a-bx)};$$

daher nach (6)

$$y=x^2\left[\frac{a^2}{x^2(a^2-bx)}+\frac{C}{b(a-bx)}+B\right],$$

d. h. indem wir

$$C=b(A-b^2)$$

setzen,

$$y=\frac{a^2-b^2x^2+Ax^2+Bax^2-Bbx^3}{a-bx},$$

oder endlich, indem wir

$$A+Ba=A' \quad \text{und} \quad -Bb=B'$$

setzen:

$$y=a+bx+\frac{(A'+B'x)x^2}{a-bx}.$$

A' und B', wie vorher A und B, sind die beliebigen zwei Constanten, welche der zweimaligen Integration entsprechen.

§. 2.

Eine zweite Differential-Gleichung zweiter Ordnung findet sich in demselben Werke, pag. 293, nämlich

$$ddy+\frac{ydx^2}{x^2}=0,$$

als deren Integral an demselben Orte

$$y=Ax^{\frac{1}{2}}\sin\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\log x+\alpha\right]$$

aufgeführt wird.

Um dieses herzuleiten, gehen wir auf die Aufgabe 99. pag. 60. zurück, wonach man eine Differential-Gleichung zweiter Ordnung auf eine erster Ordnung zurückführen soll, wenn die erstere erst dann homogen wird, indem man der einen Veränderlichen y n Dimensionen beilegt.

Die dortige Auflösung ist nun folgende. Setzt man

(1) $$dy=pdx \quad \text{und} \quad dp=qdx,$$

so erhält man statt der vorausgesetzten Differential-Gleichung, nach Substitution dieser Werthe, eine Gleichung zwischen den

vier endlichen Grössen x, y, p und q. Wir wollen nun sehen, wie dieselbe in Rücksicht auf die Homogeneität beschaffen sein wird. Da, wenn wir für x Eine Dimension annehmen, y deren n haben wird, so hat

$$p=\frac{dy}{dx} \quad n-1 \text{ und } q=\frac{dp}{dx} \quad n-2 \text{ Dimensionen.}$$

Setzen wir demnach

(2) $$y=x^n u,\quad p=x^{n-1}t \text{ und } q=x^{n-2}v;$$

so erhalten wir nach (1)

$$xdu+nudx=tdx \quad\text{und}\quad xdt+(n-1)tdx=vdx,$$

mithin

$$\frac{dx}{x}=\frac{du}{t-nu}=\frac{dt}{v-(n-1)t},$$

oder

(3) $$du[v-(n-1)t]=dt(t-nu).$$

Nimmt man aber die obigen Substitutionen in der Gleichung zwischen x, y, p und q vor, so fällt nach der Voraussetzung die Veränderliche x ganz fort und man erhält eine Gleichung zwischen den drei Grössen u, t und v allein, mittelst welcher man v durch u und t bestimmen kann. Substituirt man diesen Werth von v in (3), so erhält man eine Differential-Gleichung erster Ordnung zwischen den zwei Veränderlichen u und t. Mittelst dieser Gleichung wird also t durch u bestimmt werden können, und indem man diesen Werth von t in

$$\frac{dx}{x}=\frac{du}{t-nu}$$

substituirt, kann man nun x durch u bestimmen, und weil nach (2)

$$u=\frac{y}{x^n}$$

ist, erhält man eine Integral-Gleichung zwischen x und y, und zwar wegen der zweifachen Integration eine vollständige.

Wenden wir diese Regeln auf die vorliegende Differential-Gleichung zweiter Ordnung an, welche wir so schreiben können:

$$\text{I.}\quad x^2ddy+ydx^2=0,$$

so erhalten wir nach (1)

$$\text{II.}\quad qx^2+y=0.$$

Da offenbar die Gleichung I. am einfachsten homogen wird, wenn man y die Dimension 0 beilegt, so wird nach (2) für $n=0$

$$y=u,\quad p=\frac{t}{x},\quad q=\frac{v}{x^2}$$

und nach II.

$$q=-\frac{y}{x^2};$$

mithin

$$v=-y.$$

Vermittelst dieser Werthe wird nach (3)

$$\text{III.}\quad dy(-y+t)=tdt,$$

und weil diese Gleichung homogen ist, indem wir

$$t=yz,\quad \text{also}\quad dt=ydz+zdy$$

setzen, statt III.

$$\text{IV.}\quad \frac{dy}{y}=-\frac{zdz}{1-z+z^2}.$$

Aus

$$dy=pdx$$

folgt ferner

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{px}=\frac{dy}{t}=\frac{dy}{yz},$$

oder nach IV.

$$\text{V.}\quad \frac{dx}{x}=-\frac{zdz}{1-z+z^2}.$$

Setzen wir nun

$$\text{VI.}\quad 1-z+z^2=(f+z)(g+z),$$

so erhält man leicht

$$\frac{dy}{y}=\frac{fdz}{(g-f)(f+z)}-\frac{gdz}{(g-f)(g+z)},$$

also

$$\text{VII.}\quad y=b\,\frac{(f+z)^{\frac{f}{g-f}}}{(g+z)^{\frac{g}{g-f}}},$$

wo b die eine beliebige Constante der Integration ist. Ganz ähnlich folgt aus V.

$$\frac{dx}{x}=\frac{dz}{(g-f)(g+z)}-\frac{dz}{(g-f)(f+z)},$$

mithin

$$\text{VIII.}\quad x=b'\left(\frac{g+z}{f+z}\right)^{\frac{1}{g-f}},$$

wo b' eine beliebige zweite Constante bezeichnet. Wir erhalten aber aus VIII.

$$z=\frac{fx^{g-f}-gb'^{g-f}}{b'^{g-f}-x^{g-f}},$$

und wenn wir diesen Werth in VII. substituiren:

$$\text{IX.}\quad y=\frac{b(f-g)^{-1}b'^{f}(b'^{g-f}-x^{g-f})}{x^{g}}.$$

Aus VI. folgt aber

$$f=-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}\quad\text{und}\quad g=-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-3},$$

also, wenn wir diese Werthe in IX. substituiren und dabei

$$\frac{bb'^{f}}{f-g}=B\quad\text{und}\quad b'^{g-f}=\gamma$$

setzen:

$$\text{X.}\quad y=Bx^{\frac{1}{2}}[\gamma x^{\frac{1}{2}\sqrt{-3}}-x^{-\frac{1}{2}\sqrt{-3}}].$$

Ferner setzen wir

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}=\tfrac{1}{2}\sqrt{3}.\sqrt{-1}=\omega\sqrt{-1},$$

alsdann wird

$$x^{\frac{1}{2}\sqrt{-3}}=x^{\omega\sqrt{-1}}=e^{\omega\log x\sqrt{-1}}=\cos(\omega\log x)+\sin(\omega\log x).\sqrt{-1}$$

$$x^{-\frac{1}{2}\sqrt{-3}}\qquad\qquad=\cos(\omega\log x)-\sin(\omega\log x).\sqrt{-1};$$

mithin statt X.

$$\text{XI.}\quad y=Bx^{\frac{1}{2}}[(\gamma-1)\cos(\omega\log x)+(\gamma+1)\sin(\omega\log x)\sqrt{-1}].$$

Endlich setzen wir

$$B(\gamma-1)=A\sin\alpha$$

und

$$B(\gamma+1)\sqrt{-1}=A\cos\alpha,$$

und erhalten so aus XI.

$$\text{XII.}\quad y=Ax^{\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\log x+\alpha\right),$$

wo A und α die zwei beliebigen Constanten sind.

§. 3.

Eine dritte Gleichung findet sich pag. 293., nämlich

$$ddy+\frac{2dxdy}{x}+\frac{f^2ydx^2}{x^4}=0,$$

und zwar wird als deren Integral

$$y=A\sin\left(\frac{f}{x}+\alpha\right)$$

aufgeführt.

Um dieses herzuleiten, gehen wir auf die Aufgabe 110. pag. 113. zurück, nach welcher das vollständige Integral der Differential-Gleichung zweiter Ordnung

$$(1)$$

$$\frac{ddy}{dx}+\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dK}{K}+\tfrac{1}{4}y\left[d.\frac{dL}{Ldx}-\frac{dL^2}{2L^2dx}+\frac{dKdL}{KLdx}+\frac{2CL^2dx}{K^2}\right]=0$$

gefunden werden soll.

Diese Gleichung wird nämlich nach der Anmerkung. pag. 108. integrabel gemacht, wenn man sie durch

$$\frac{K^2}{L}\left[\frac{dy}{dx}+\frac{ydL}{2Ldx}\right]$$

multiplicirt, und zwar ist alsdann ihr erstes vollständiges Integral, wie a. a. O. gezeigt wird:

$$(2)\qquad \frac{K^2}{2L}\left[\left(\frac{dy}{dx}+\frac{ydL}{2Ldx}\right)^2+\frac{CL^2}{K^2}y^2\right]=\text{Const.}$$

Diese Differential-Gleichung erster Ordnung muss man noch integriren, und da diess wegen der unbestimmten Constanten höchst schwierig ist, vernachlässigt man diese zunächst, um zuvörderst ein besonderes Integral zu suchen. Wir erhalten dann aus der Gleichung

$$(3)\qquad \left(\frac{dy}{dx}+\frac{ydL}{2Ldx}\right)^2+\frac{CL^2}{K^2}y^2=0,$$

indem man die Wurzel auszieht:

$$\frac{dy}{dx}+\frac{ydL}{2Ldx}=\pm\frac{Ly}{K}\sqrt{-C}\,,$$

oder

$$\frac{dy}{y}+\frac{dL}{2L}=\pm\frac{Ldx}{K}\sqrt{-C},$$

und hieraus

$$(4)\qquad y\sqrt{L}=\alpha e^{\pm\int\frac{Ldx}{K}\sqrt{-C}}.$$

Da nun die zwei Werthe

$$y=\frac{\alpha}{\sqrt{L}}e^{\int\frac{Ldx}{K}\sqrt{-C}}\quad\text{und}\quad y=\frac{\beta}{\sqrt{L}}e^{-\int\frac{Ldx}{K}\sqrt{-C}}$$

der Gleichung (1) Genüge leisten, so wird es auch die Verbindung beider Werthe. Hierdurch werden die zwei beliebigen Constanten α und β eingeführt, und wir erhalten das vollständige Integral:

$$(5)\qquad y=\frac{\alpha}{\sqrt{L}}e^{\int\frac{Ldx}{K}\sqrt{-C}}+\frac{\beta}{\sqrt{L}}e^{-\int\frac{Ldx}{K}\sqrt{-C}},$$

vorausgesetzt dass $\sqrt{-C}$ reell sei; hingegen

$$(6)\qquad y=\frac{\gamma}{\sqrt{L}}\sin\left(\int\frac{Ldx}{K}\sqrt{C}+\zeta\right),$$

wenn $\sqrt{-C}$ imaginär ist. In (5) sind α und β, in (6) hingegen γ und ζ die erforderlichen zwei beliebigen Constanten.

Vergleichen wir nun mit der Gleichung (1) die vorliegende

$$\frac{ddy}{dx}+2\cdot\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{x}+y\frac{f^2dx}{x^4}=0,$$

so ist offenbar

$$\frac{dK}{K}=\frac{2dx}{x},\quad\text{also}\quad K=x^2;$$

$dL=0$, $L=1$, $C=f^2$, mithin $\sqrt{-C}=\pm f\sqrt{-1}$ und $\sqrt{C}=\pm f$,

$$\int\frac{Ldx}{K}=\int\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}$$

und so nach (6):

$$\text{II.}\quad y=\gamma\sin\left(\frac{\pm f}{x}+\zeta\right),$$

oder in Uebereinstimmung mit der im Werke aufgeführten Formel:

$$\text{III.}\quad y=A\sin\left(\alpha\pm\frac{f}{x}\right).$$

Beide Werthe leisten Genüge, und A und α sind, wie vorher γ und ζ, die erforderlichen zwei beliebigen Constanten.

§. 4.

Eine vierte Gleichung finden wir pag. 295., nämlich

$$x^2ddy-2xdxdy+2ydx^2=\frac{x^2ydx^2}{f^2},$$

als deren Integral

$$y=Axe^{\frac{x}{f}}+Bxe^{-\frac{x}{f}}$$

aufgeführt ist.

Wir nehmen, indem wir die vorausgesetzte Differential-Gleichung durch x^2dx dividiren, also die Gleichung

$$\text{I.}\quad \frac{ddy}{dx}-\frac{2dx}{x}\cdot\frac{dy}{dx}+y\left(\frac{2}{x^2}-\frac{1}{f^2}\right)dx=0$$

erhalten, zu der Gleichung (1) des vorigen Paragraphen unsere Zuflucht. Es wird offenbar, indem wir beide Gleichungen mit einander vergleichen, zunächst

$$\frac{dK}{K}=-\frac{2dx}{x},\quad\text{also}\quad K=\frac{1}{x^2};$$

ferner können wir aus

$$d.\frac{dL}{Ldx}-\frac{dL^2}{2L^2dx}+\frac{dKdL}{KLdx}+\frac{2CL^2dx}{K^2}=\frac{4dx}{x^2}-\frac{2dx}{f^2}$$

auf

$$\frac{2CL^2}{K^2}=-\frac{2}{f^2}$$

oder

$$L=K=\frac{1}{x^2} \text{ und } \sqrt{-C}=\frac{1}{f}$$

schliessen. Dieser Werth von L leistet vollständig Genüge, indem

$$d.\frac{dL}{Ldx}-\frac{dL^2}{2L^2dx}+\frac{dKdL}{KLdx}+\frac{2CL^2dx}{K^2}$$

$$=\frac{2dx}{x^2}-\frac{2dx}{x^2}+\frac{4dx}{x^2}-\frac{2dx}{f^2}=\frac{4dx}{x^2}-\frac{2dx}{f^2}$$

wird. Wir erhalten demnach

$$\text{II.} \quad \int\frac{Ldx}{K}\sqrt{-C}=\frac{x}{f}$$

und daher nach der Gleichung (5) des vorhergehenden Paragraphen:

$$\text{III.} \quad y=Axe^{\frac{x}{f}}+Bxe^{-\frac{x}{f}},$$

wo A und B die zwei beliebigen Constanten sind.

XVI.

Neue Entwickelung der Theorie des Maasses der Curvatur oder des Maasses der Krümmung.

Von
dem Herausgeber.

Bekanntlich hat Gauss unter dem Namen: das Maass der Curvatur oder das Maass der Krümmung einen Begriff in die Geometrie eingeführt, welcher für die allgemeine Theorie der Flächen in vielen Beziehungen von grosser Wichtigkeit ist und zu einer nicht geringen Anzahl merkwürdiger Folgerungen führt. Da Gauss aber selbst bei der Entwickelung der Theorie des Maasses der Krümmung sich ganz eigenthümlicher, von den gewöhnlichen Methoden, nach denen man sonst die allgemeine Theorie der Flächen zu behandeln pflegt, ziemlich abweichender Methoden bedient, so will ich im Folgenden diese Theorie nach einer für den Unterricht in der analytischen Geometrie mir mehr geeignet zu sein scheinenden Methode entwickeln, wobei ich mich zugleich theilweise an meine beiden im ersten und zweiten Hefte dieses Theils des Archivs veröffentlichten Abhandlungen über die Krümmung der ebenen Schnitte des allgemeinen dreiaxigen Ellipsoids und der Flächen überhaupt anschliessen werde.

I.

Die allgemeine Gleichung der gegebenen Fläche sei

$$f(X,\ Y,\ Z)=0,$$

wo X, Y, Z die veränderlichen oder laufenden Coordinaten be zeichnen sollen, immer rechtwinklige Coordinaten vorausgesetzt.

Ein beliebiger, aber bestimmter Punkt dieser Fläche sei (xyz), so dass also auch

$$f(x, y, z) = 0$$

ist; wenn aber $f(x, y, z)$ im Allgemeinen als eine Function dreier veränderlicher Grössen betrachtet wird, so soll

$$u = f(x, y, z)$$

gesetzt werden. Alle im Folgenden vorkommenden Differentialquotienten sind partielle Differentialquotienten.

Die Gleichungen der Normale der krummen Fläche in dem Punkte (xyz) sind nach den Lehren der analytischen Geometrie bekanntlich:

$$\frac{X-x}{\frac{\partial u}{\partial x}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial u}{\partial y}} = \frac{Z-z}{\frac{\partial u}{\partial z}};$$

und wenn nun φ, ψ, χ die 180° nicht übersteigenden Winkel sind, welche der eine der beiden von dem Punkte (xyz) ausgehenden Theile dieser Normale mit den positiven Theilen der drei Coordinatenaxen einschliesst, G aber einen gewissen Factor bezeichnet, so ist:

$$\cos\varphi = G\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \cos\psi = G\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \cos\chi = G\frac{\partial u}{\partial z};$$

also, weil

$$\cos\varphi^2 + \cos\psi^2 + \cos\chi^2 = 1$$

ist:

$$G = \pm\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}},$$

und folglich, mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$\cos\varphi = \pm \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\cos\psi = \pm \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\cos\chi = \pm \frac{\frac{\partial u}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}}.$$

Die oberen Zeichen in diesen Formeln entsprechen offenbar dem einen, die unteren dem anderen der beiden von dem Punkte (xyz) ausgehenden Theile der Normale. Es ist aber nöthig, ein Kriterium zu haben, mittelst welches man diese beiden Theile der Normale von einander unterscheiden kann, worüber wir Folgendes bemerken.

Wenn ∂u wie gewöhnlich das vollständige Differential von u bezeichnet, so ist bekanntlich

$$\partial u = \frac{\partial u}{\partial x}\partial x + \frac{\partial u}{\partial y}\partial y + \frac{\partial u}{\partial z}\partial z;$$

nach dem Obigen ist aber:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \pm\cos\varphi\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \pm\cos\psi\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \pm\cos\chi\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2};$$

also:

$$\partial u = \pm(\cos\varphi\partial x + \cos\psi\partial y + \cos\chi\partial z)\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

Wenn nun aber

$$x + \partial x,\quad y + \partial y,\quad z + \partial z$$

die Coordinaten eines Punktes in dem Theile der Normale sind, welchem die Winkel φ, ψ, χ entsprechen, so ist offenbar:

$$\partial x = \cos\varphi \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2},$$

$$\partial y = \cos\psi \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2},$$

$$\partial z = \cos\chi \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2};$$

also:

$$\cos\varphi\partial x + \cos\psi\partial y + \cos\chi\partial z$$

$$= (\cos\varphi^2 + \cos\psi^2 + \cos\chi^2)\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2}$$

$$= \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2},$$

und folglich nach dem Vorhergehenden:

$$\partial u = \pm \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

Also ist ∂u für den Theil der Normale, welchem im Obigen die oberen Zeichen entsprechen, positiv, für den Theil der Normale dagegen, welchem im Obigen die unteren Zeichen entsprechen, negativ; und nennen wir also die Seite der krummen Fläche, nach welcher hin, von dem Punkte (xyz) an gerechnet, ∂u und, weil $f(x, y, z) = 0$ ist, also auch u positiv ist, die **positive Seite**, die Seite der krummen Fläche dagegen, nach welcher hin, von dem Punkte (xyz) an gerechnet, ∂u und aus demselben Grunde wie vorher also auch u negativ ist, die **negative Seite**, so ist klar, dass man in den Formeln

$$\cos\varphi = \pm \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\cos\psi = \pm \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\cos\chi = \pm \frac{\frac{\partial u}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}}$$

die oberen oder unteren Zeichen nehmen muss, jenachdem der entsprechende Theil der Normale auf der positiven oder negativen Seite der krummen Fläche liegt. Ziehen wir daher, wie von jetzt an immer geschehen soll, die Normale auf der positiven Seite der krummen Fläche, so müssen wir

$$\cos\varphi = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\cos\psi = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\cos\chi = \frac{\frac{\partial u}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}}$$

setzen.

Nehmen wir z als Function der beiden unabhängigen veränderlichen Grössen x und y an, so ist bekanntlich

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

oder

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y};$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$\cos\varphi = -\frac{\frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \left\{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right\}}},$$

$$\cos\psi = -\frac{\frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \left\{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right\}}},$$

$$\cos\chi = \frac{\frac{\partial u}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \left\{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right\}}};$$

und folglich, wenn man die oberen oder unteren Zeichen nimmt, jenachdem $\frac{\partial u}{\partial z}$ positiv oder negativ ist:

$$\cos\varphi = \mp\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}},$$

$$\cos\psi = \mp\frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}},$$

$$\cos\chi = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}.$$

II.

Mit einem der Längeneinheit gleichen Halbmesser wollen wir uns nun um den Anfang der Coordinaten als Mittelpunkt eine Kugelfläche beschrieben denken, und wollen die Coordinaten des Punktes, in welchem die Kugelfläche von einem, von ihrem Mittelpunkte aus mit der vorher betrachteten Normale parallel und gleich gerichtet gezogenen Halbmesser geschnitten wird, durch $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ bezeichnen, indem wir zugleich die beiden auf der gegebenen Fläche und der Kugelfläche liegenden Punkte (xyz) und $(\mathfrak{xyz})$ in der Folge der Kürze wegen einander entsprechende Punkte nennen werden. Dann ist offenbar in völliger Allgemeinheit

$$\mathfrak{x}=\cos\varphi,\quad \mathfrak{y}=\cos\psi,\quad \mathfrak{z}=\cos\chi$$

und folglich nach dem Vorhergehenden:

$$\mathfrak{x} = \mp\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}},$$

$$\mathfrak{y} = \mp\frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}},$$

$$\mathfrak{z} = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}};$$

wo man die oberen oder die unteren Zeichen zu nehmen hat, jenachdem $\frac{\partial u}{\partial z}$ positiv oder negativ ist.

III.

Wir wollen nun ausser dem Punkte (xyz) der krummen Fläche noch zwei diesem Punkte unendlich nahe liegende Punkte $(x_1y_1z_1)$ und $(x_2y_2z_2)$ dieser Fläche, also überhaupt die drei einander unendlich nahe liegenden Punkte

$$(xyz),\quad (x_1y_1z_1),\quad (x_2y_2z_2)$$

der krummen Fläche betrachten. Die diesen Punkten entsprechenden Punkte der Kugelfläche seien

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}),\quad (\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1),\quad (\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_2\mathfrak{z}_2).$$

Die Flächenräume der zwischen den drei Punkten auf der krummen Fläche und zwischen den drei Punkten auf der Kugelfläche liegenden unendlich kleinen Dreiecke, deren Ebenen offenbar einander parallel sind, weil sie auf parallelen geraden Linien senkrecht stehen, mögen respective durch D und $\mathfrak{D}$, und ihre Projectionen auf der Ebene der xy respective durch D_{xy} und $\mathfrak{D}_{xy}$ bezeichnet werden. Dann ist nach einem bekannten geometrischen Satze*):

$$2D_{xy} = \mp\{(x_1-x_2)y + (x_2-x)y_1 + (x-x_1)y_2\},$$

wenn man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem man sich, um von dem Punkte (xy) durch den Punkt (x_1y_1) zu dem Punkte (x_2y_2) zu gelangen, nach derselben Richtung, nach welcher man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der Axe der x durch den rechten Winkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen, oder nach der entgegengesetzten Richtung hin bewegen muss; und ganz eben so ist

$$2\mathfrak{D}_{xy} = \mp\{(\mathfrak{x}_1-\mathfrak{x}_2)\mathfrak{y} + (\mathfrak{x}_2-\mathfrak{x})\mathfrak{y}_1 + (\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_1)\mathfrak{y}_2\},$$

mit einer ganz ähnlichen Bestimmung wegen der Vorzeichen wie vorher. Bezeichnen wir nun das, jenachdem die Punkte

$$(xyz),\quad (x_1y_1z_1),\quad (x_2y_2z_2)$$

auf der krummen Fläche, und die Punkte

*) M. s. Archiv. Thl. III. S. 263.

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}),\quad (\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1),\quad (\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_2\mathfrak{z}_2)$$

auf der Kugelfläche eine gleichstimmige oder eine ungleichstimmige Lage haben, wovon der Sinn aus dem unmittelbar Vorhergehenden sogleich ganz von selbst erhellen wird, positiv oder negativ genommenen Verhältniss $\frac{\mathfrak{D}}{D}$ durch k, so können wir nach dem Vorhergehenden, weil nach einem bekannten Satze von den Projectionen

$$\frac{\mathfrak{D}}{D}=\frac{\mathfrak{D}_{xy}}{D_{xy}}$$

ist, offenbar in völliger Allgemeinheit

$$k=\frac{(\mathfrak{x}_1-\mathfrak{x}_2)\mathfrak{y}+(\mathfrak{x}_2-\mathfrak{x})\mathfrak{y}_1+(\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_1)\mathfrak{y}_2}{(x_1-x_2)y+(x_2-x)y_1+(x-x_1)y_2}$$

setzen, und diese Grösse wird das **Maass der Curvatur** oder das **Maass der Krümmung** der krummen Fläche in dem Punkte (xyz) genannt, insofern es sich, was wohl zu beachten ist, um einander entsprechende unendlich kleine Flächenelemente auf der krummen Fläche und der Kugelfläche, oder eigentlich um die Gränze handelt, welcher der Bruch

$$\frac{(\mathfrak{x}_1-\mathfrak{x}_2)\mathfrak{y}+(\mathfrak{x}_2-\mathfrak{x})\mathfrak{y}_1+(\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_1)\mathfrak{y}_2}{(x_1-x_2)y+(x_2-x)y_1+(x-x_1)y_2}$$

sich nähert, wenn die Punkte $(x_1y_1z_1)$ und $(x_2y_2z_2)$ dem Punkte (xyz) immer näher und näher rücken, was wir daher von jetzt an in strengerer Weise durch

$$k=\text{Lim}\,\frac{(\mathfrak{x}_1-\mathfrak{x}_2)\mathfrak{y}+(\mathfrak{x}_2-\mathfrak{x})\mathfrak{y}_1+(\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_1)\mathfrak{y}_2}{(x_1-x_2)y+(x_2-x)y_1+(x-x_1)y_2}$$

bezeichnen wollen.

Setzen wir aber

$$x_1=x+\Delta_1x,\quad y_1=y+\Delta_1y,\quad z_1=z+\Delta_1z;$$

$$x_2=x+\Delta_2x,\quad y_2=y+\Delta_2y,\quad z_2=z+\Delta_2z$$

und

$$\mathfrak{x}_1=\mathfrak{x}+\Delta_1\mathfrak{x},\quad \mathfrak{y}_1=\mathfrak{y}+\Delta_1\mathfrak{y},\quad \mathfrak{z}_1=\mathfrak{z}+\Delta_1\mathfrak{z};$$

$$\mathfrak{x}_2=\mathfrak{x}+\Delta_2\mathfrak{x},\quad \mathfrak{y}_2=\mathfrak{y}+\Delta_2\mathfrak{y},\quad \mathfrak{z}_2=\mathfrak{z}+\Delta_2\mathfrak{z};$$

so wird, wie man leicht findet:

$$k = \mathrm{Lim}\,\frac{\Delta_1\mathfrak{x}\,\Delta_2\mathfrak{y} - \Delta_1\mathfrak{y}\,\Delta_2\mathfrak{x}}{\Delta_1 x\,\Delta_2 y - \Delta_1 y\,\Delta_2 x}.$$

Nach dem Taylor'schen Lehrsatze ist nun

$$\Delta_1\mathfrak{x} = \frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial x}\Delta_1 x + \frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial y}\Delta_1 y + \mathrm{R}_1,$$

$$\Delta_1\mathfrak{y} = \frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial x}\Delta_1 x + \frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial y}\Delta_1 y + \mathrm{R}_1'$$

und

$$\Delta_2\mathfrak{x} = \frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial x}\Delta_2 x + \frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial y}\Delta_2 y + \mathrm{R}_2,$$

$$\Delta_2\mathfrak{y} = \frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial x}\Delta_2 x + \frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial y}\Delta_2 y + \mathrm{R}_2';$$

wo die Reste R_1, R_1' und R_2, R_2' bekanntlich in Bezug auf die Veränderungen $\Delta_1 x$, $\Delta_1 y$ und $\Delta_2 x$, $\Delta_2 y$ von der zweiten Ordnung sind. Also ist, wie man mittelst leichter Rechnung findet:

$$\Delta_1\mathfrak{x}\,\Delta_2\mathfrak{y} - \Delta_1\mathfrak{y}\,\Delta_2\mathfrak{x}$$
$$= \left(\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial x}\cdot\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial y} - \frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial x}\cdot\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial y}\right)(\Delta_1 x\Delta_2 y - \Delta_1 y\,\Delta_2 x) + \mathfrak{R},$$

wo der Rest

$$\mathfrak{R} = \left(\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial x}\mathrm{R}_2' - \frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial x}\mathrm{R}_2\right)\Delta_1 x + \left(\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial y}\mathrm{R}_2' - \frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial y}\mathrm{R}_2\right)\Delta_1 y$$
$$+ \left(\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial x}\mathrm{R}_1 - \frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial x}\mathrm{R}_1'\right)\Delta_2 x + \left(\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial y}\mathrm{R}_1 - \frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial y}\mathrm{R}_1'\right)\Delta_2 y$$

in Bezug auf die Veränderungen $\Delta_1 x$, $\Delta_1 y$ und $\Delta_2 x$, $\Delta_2 y$ eine Grösse der dritten Ordnung ist. Also ist nach dem Obigen:

$$k = \mathrm{Lim}\,\frac{\left(\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial x}\cdot\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial y} - \frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial x}\cdot\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial y}\right)(\Delta_1 x\Delta_2 y - \Delta_1 y\Delta_2 x) + \mathfrak{R}}{\Delta_1 x\Delta_2 y - \Delta_1 y\,\Delta_2 x},$$

oder

$$k = \mathrm{Lim}\left\{\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial x}\cdot\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial y} - \frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial x}\cdot\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial y} + \frac{\mathfrak{R}}{\Delta_1 x\,\Delta_2 y - \Delta_1 y\,\Delta_2 x}\right\},$$

und folglich

$$k = \frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial x}\cdot\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial y} - \frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial x}\cdot\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial y} + \mathrm{Lim}\,\frac{\mathfrak{R}}{\Delta_1 x\,\Delta_2 y - \Delta_1 y\,\Delta_2 x}.$$

Weil nun aber in Bezug auf die unendlich kleinen Veränderungen $\Delta_1 x$, $\Delta_1 y$ und $\Delta_2 x$, $\Delta_2 y$ die Grösse $\mathfrak{N}$ von einer höheren Ordnung ist als $\Delta_1 x \Delta_2 y - \Delta_1 y \Delta_2 x$, so ist offenbar

$$\mathrm{Lim}\frac{\mathfrak{N}}{\Delta_1 x \Delta_2 y - \Delta_1 y\, \Delta_2 x}=0,$$

folglich

$$k=\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial x}\cdot\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial y}-\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial x}\cdot\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial y},$$

welcher allgemeine Ausdruck für das Maass der Curvatur einer weiteren Entwickelung unterworfen werden muss.

IV.

Aus den aus II. bekannten Formeln

$$\mathfrak{x}=\mp\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}},$$

$$\mathfrak{y}=\mp\frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}};$$

in denen man die oberen oder unteren Zeichen nehmen muss, jenachdem $\frac{\partial u}{\partial z}$ positiv oder negativ ist, folgt durch Differentiation leicht:

$$\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial x}=\mp\frac{\left\{1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right\}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}}{\left\{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial y}=\mp\frac{\left\{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right\}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}}{\left\{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}$$

und

$$\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial y}=\mp\frac{\left\{1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right\}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}{\left\{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial x}=\mp\frac{\left\{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right\}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}{\left\{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Also ist, wie man mittelst leichter Rechnung sogleich findet:

$$\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial x}\cdot\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial y}-\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial x}\cdot\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial y}=\frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2}{\left\{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right\}^2},$$

und folglich nach III.:

$$k=\frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2}{\left\{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right\}^2}.$$

V.

Bekanntlich ist nach den Lehren der Differentialrechnung:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0;$$

also

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial z}},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial z}};$$

folglich:

$$1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

Ferner hat man nach den Lehren der Differentialrechnung die folgenden Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0;$$

aus denen man mit Hülfe der Formeln

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial z}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial z}}$$

leicht erhält:

$$-\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^3\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2-2\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2,$$

$$-\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^3\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2-2\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

und

$$-\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^3\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2-\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2};$$

und hieraus ergiebt sich durch leichte Rechnung, wenn man aufhebt, was sich aufheben lässt:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^4 \left\{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2\right\}$$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \left\{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)^2\right\}$$

$$+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \left\{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)^2\right\}$$

$$+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2\right\}$$

$$-2\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right\}$$

$$-2\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right\}$$

$$-2\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right\}.$$

Verbindet man nun dies mit dem oben Gefundenen, so ergiebt sich aus dem in IV. entwickelten allgemeinen Ausdrucke von k sogleich die folgende merkwürdige Gleichung:

$$k\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}^2$$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \left\{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)^2\right\}$$

$$+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \left\{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)^2\right\}$$

$$+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2\right\}$$

$$-2\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right\}$$

$$-2\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right\}$$

$$-2\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right\},$$

mittelst welcher das Maass der Curvatur immer unmittelbar aus der Gleichung der gegebenen krummen Fläche durch partielle Differentiation entwickelt werden kann.

Erinnern wir uns nun an die beiden in der Abhandlung Nr. VIII. S. 200. dieses Theils bewiesenen Gleichungen:

$$\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}L$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)^2\right\}$$

$$+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)^2\right\}$$

$$+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2\right\}$$

$$+2\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$+2\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$$

$$+2\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

und $L=\Omega\Omega_1$, so gelangen wir mittelst des Obigen auf der Stelle zu der Gleichung:

$$k\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}=\Omega\Omega_1,$$

also:

$$k=\frac{\Omega\Omega_1}{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

Nach derselben Abhandlung ist aber bekanntlich, wenn R und R_1 die Krümmungshalbmesser der beiden Hauptschnitte in dem Punkte (xyz) bezeichnen:

$$R^2=\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}{\Omega^2},\quad R_1{}^2=\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}{\Omega_1{}^2};$$

also:

$$k^2=\left(\frac{1}{RR_1}\right)^2 \text{ oder } k=\pm\frac{1}{RR_1}.$$

wenn man, wie aus dem Obigen unmittelbar hervorgeht, das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem die beiden Grössen Ω und Ω_1, deren Bestimmung in der vorher erwähnten früheren Abhandlung gelehrt worden ist, gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben. Uebrigens aber leistet ja der aus dem Obigen sich unmittelbar ergebende völlig entwickelte Ausdruck durch die Coordinaten x, y, z des Punktes (xyz) zur Bestimmung von k Alles, was man in dieser Beziehung nur wünschen kann.

VI.

Denken wir uns auf einer krummen Fläche ein bestimmtes, allseitig begränztes Stück, und von den Punkten desselben aus auf der positiven Seite der Fläche Normalen gezogen, so werden die mit diesen Normalen von dem Mittelpunkte der um den Anfang der Coordinaten mit der Längeneinheit als Halbmesser beschriebenen Kugelfläche aus nach derselben Seite hin wie die Normalen gezogenen Parallelen auf der Kugelfläche ein bestimmtes Flächenstück einschliessen, welches Gauss die ganze Curvatur der Figur auf der krummen Fläche genannt hat. Wie man diese ganze Curvatur mittelst des Maasses der Curvatur durch die Integralrechnung bestimmen kann, unterliegt keinem Zweifel. Es ist aber jetzt nicht meine Absicht, diesen Gegenstand, auf den ich später zurückzukommen denke, weiter auszuführen, und ich verweise daher für jetzt auf meine Sphaeroidische Trigonometrie. Berlin. 1833. 4°. Fünftes Kapitel. und auf eine Abhandlung des Herrn Professor Dienger im Archiv. Thl. XIX. Nr. XXV.

XVII.

Ueber die Integration der linearen Differentialgleichungen.

Von

Herrn Professor Dr. *Petzval*

an der k. k. Universität zu Wien.

Wer die Geschichte der Wissenschaft studirt hat, fand immer Gelegenheit, zu bemerken, dass der gediegene Fortschritt auf diesem Felde ein specifisch sehr langsamer sei, und hat mit Befremden wahrgenommen, wie Lehren, die man jetzt bereits der unreifen Jugend aufdringt, zur Zeit ihres Entstehens oft ein Decennium brauchten, um Eingang zu finden bei der Gelehrtenwelt; ja bei Werken von grösserem Umfange, wie z. B. Newton's „Principia nova", war sogar dazu mehr als ein Menschenalter nothwendig, und gerade das letzterwähnte Werk steht da als in seiner Art einziges Beispiel. Es war allgemein gekannt, der Verfasser als einer der ersten Gelehrten Europas berühmt, und es wurde dennoch nicht gelesen. Es war in England Sitte, das Werk zu loben, darauf stolz zu sein, mitunter auch die Priorität des Inhaltes in Abrede zu stellen, aber nicht zu lesen, und erst dreissig volle Jahre nach dem Tode Newton's gingen nicht die Engländer, sondern die Franzosen an das ernste Studium desselben. Hiemit im sehr grellen Contraste steht die ganz ausserordentliche Geschwindigkeit, mit der oft kleine Entdeckungen, leicht fasslich für Jedermann, in der civilisirten Welt die Runde machen, so dass man beinahe versucht sein könnte, als Regel anzunehmen, die gelehrte Welt vertrage die ihr in grossen Massen gebotene Wissenschaft nicht, sondern man müsse sie ihr, wie Arznei, löffelweise eingeben. Gesetzt nun den Fall, die Mathematik wäre jetzt noch in ihrer Kindheit und die ganze Theorie der höheren

algebraischen Gleichungen völlig unbekannt, es wäre ferner einem emsigen Wissenschaftsforscher gelungen, sie ganz und vollständig in der Form, welche sie durch die Bemühungen der grössten Geister der Neuzeit errungen hat, und in der wir sie gegenwärtig kennen, aufzustellen, so würde muthmasslich solch ein Werk bei uns sehr schwer Eingang finden. Die Gelehrten würden zwar darin blättern, aber schon bei dem Fundamentalsatze, der die Existenz wenigstens einer einzigen Wurzel in der Form $p+q\sqrt{-1}$ erweist, sagen: wozu ist denn solch ein complicirter Beweis gut, wir wissen es ja ohnehin, dass jede Zahl in der Form $p+q\sqrt{-1}$ erscheint, also auch die Wurzel einer Gleichung, und so würden sie Satz um Satz, den einen überflüssig, den anderen ohne praktischen Nutzen finden, höchstens hätte für einen Augenblick die Cardanische Formel ihren Beifall, weil sie die Wurzeln genau angibt, so dass gar Nichts fehlt, würde aber doch bei der Erörterung des casus irreducibilis ihn wieder verlieren. Ruffini's schöner Beweis, dass geschlossene algebraische Formeln über den vierten Grad hinaus unmöglich seien, stünde vollends im Lichte des Ueberflüssigsten von dem Ueberflüssigen. Ja, würde man sagen, wenn der nicht blos seine Sätze beweisen will, sondern auch Möglichkeiten und Unmöglichkeiten, dann hat er viel zu thun. Man würde dann vermuthlich das Buch als ein Bündel unnützer Spitzfindigkeiten betrachten, der Vergessenheit überliefern, und vielleicht erst nach hundert Jahren, nachdem auf einem anderen Wege die Wissenschaft sich zu einer gewissen Höhe emporgeschwungen hat, aus dem Staube der Bibliotheken hervorziehen, um damit Prioritäten streitig zu machen.

Wem diese Darstellung übertrieben vorkommen sollte, möge bedenken, dass sich dies mit einem Theile der Theorie der algebraischen Gleichungen wirklich zugetragen hat, und dies zwar in der neuesten Zeit mit Fourier's schöner Arbeit über die algebraischen Gleichungen mit Buchstabenparametern in den Coefficienten, während die in demselben Buche enthaltene Auflösungsmethode der numerischen Gleichungen, geordnete Division u. s. w. durch alle Lehrbücher die Runde gemacht hat.

Bleiben wir bei dem beispielsweise gesetzten Falle stehen und fragen wir weiter: wenn also die Theorie der algebraischen Gleichungen in ihrer vollen Ausdehnung und auf Einmal den gelehrten Zeitgenossen nicht beizubringen wäre, was müsste der Erfinder derselben thun, um ihr dennoch Eingang zu verschaffen? Vielleicht wäre das folgende Verfahren das erspriessliche. Er veröffentlicht zuerst eine der einfachsten Annäherungsmethoden, etwa die Regula falsi, zeigt dann in einem zweiten Memoire, dass

man in gewissen Fällen, und namentlich wenn gleiche Wurzeln vorhanden sind, von dieser Regula falsi nur geneckt wird, und lehrt, die Gleichungen auf gleiche Wurzeln zu untersuchen. In einer dritten Denkschrift macht er den grossen Fund der Cardanischen Formel, ohne jedoch hinzuweisen auf ihre Untauglichkeit zur numerischen Berechnung; dann kommen die geschlossenen Formeln für Gleichungen des vierten Grades in Begleitung eines kühn hingestellten Zweifels, ob überhaupt alle höheren Gleichungen Wurzeln haben; dann wieder eine Approximationsmethode, und so würde sich der Horizont dieses Wissenszweiges immer mehr erweitern und immer mehr erhellen bis zur völligen, allmähligen Umkehrung der Begriffe, bis endlich nach Ablauf mehrerer Jahre einige gelehrte Köpfe von selbst geistreiche Bemerkungen zu machen anfangen, die der Verfasser anfangs vergebens gemacht hätte, er hätte keinen Glauben gefunden; z. B. der mathematische Wissenschaftsforscher ist kein Rechner, sondern ein Denker; er kann das Einmal Eins vollkommen vergessen haben, ohne desshalb minder Forscher zu sein. Die Theorie der algebraischen Gleichungen hat nicht blos zum Zwecke die numerische Auflösunge derselben, sondern dient weit öfter dazu, die numerische Auflösung zu vermeiden und dennoch alles zu erfahren, was man zu wissen wünscht. Die Approximationsmethoden zu den Wurzeln haben trotz der Mühe, die man darauf verwendet hat, doch nur einen sehr untergeordneten Werth. Der Praktiker hat selten eine höhere Gleichung aufzulösen, und geschieht dies je einmal, so bedient er sich in der Regel keiner dieser veredelten Methoden, sondern der regula falsi. Die allgemeinen Sätze der Theorie hingegen, wenn sie auch zur Ermittelung der Wurzeln gar Nichts beitragen, sind doch das tägliche Brod des Analysten; denn es geht beinahe kein Tag vorüber, wo er nicht Gelegenheit fände, sie in seine Meditationen einzuflechten.

Der Leser wird vielleicht etwas befremdet fragen, wozu diese Erörterungen dienen sollen, die von einem gesetzten unmöglichen Falle ausgehen. Hierauf dient zur Antwort: Der Fall ist kein unmöglicher, er ist vielmehr da und zur Thatsache geworden, zwar nicht im Gebiete der Theorie der algebraischen Gleichungen, wohl aber auf einem anderen Felde, bei der Theorie der linearen Differentialgleichungen nämlich, welche mit jener der algebraischen Gleichungen die durchgreifendste Aehnlichkeit hat und sie noch überdies an Ausdehnung weit übertrifft.

Ich bin seit mehr als zwanzig Jahren mit diesem Gegenstande beschäftigt und meine Forschungen haben mich allmählig zu immer zahlreicheren und fruchtbringenderen Resultaten geführt; es war

mir aber dennoch nicht möglich, sie alsogleich zu veröffentlichen, weil ich mich immer ausser Stand sah, aus ihnen ein gerundetes Ganze zusammenzusetzen, indem noch immer etwas daran fehlte. Als dies nun aber endlich möglich geworden war, hatte die Arbeit die namhafte Ausdehnung von einer ganzen und fast durchwegs neuen Wissenschaft gewonnen und bildete ein zweibändiges Werk unter dem Titel: „Integration der linearen Differentialgleichungen mit constanten und veränderlichen Coëfficienten“, von welchem der erste Band im Jahre 1853 erschien, der zweite aber, wenigstens theilweise, sich noch unter der Presse befindet. Dieses Werk wird sich nun muthmasslich sehr langsam Bahn brechen und zwar aus mehreren Ursachen: erstens wegen seiner grösseren Ausdehnung und zweitens, weil es die Erwartungen der meisten Leser in derselben Weise täuschen dürfte, wie dies auch die Theorie der algebraischen Gleichungen unfehlbar thäte, wenn sie eben neu erfunden wäre. Jeder Leser geht nämlich an das Studium des Werkes mit dem Gedanken: jetzt will ich einmal sehen, wie man die Differentialgleichungen integrirt, und findet statt dessen, was er sucht, einer Integrationsmethode nämlich, eine gewisse Anzahl allgemeiner Sätze über die partikulären Integrale und allgemeine Regeln, um die verschiedenen Formen zu erkennen, in welchen sie erscheinen können. Es setzt dies nun ihn zwar in den Stand, beim unmittelbaren Anblicke der Differentialgleichung viel mehr von dem Integrale anzusagen, als der ältere Analyst zu sagen wusste, nachdem er wirklich integrirt hatte. Er schätzt dies aber wenig, oder mindestens nicht nach seinem vollen Werthe, indem er meint, dass wenn er das Integral nur erst besässe, so würde er seine Eigenschaften schon herausbekommen. Vergebens würde man ihm sagen, dass der eigentliche rationelle Zweck, den man verfolgt, nicht der sein könne, sich um jeden Preis einen wie immer gestalteten, Genüge leistenden Ausdruck zu verschaffen, gleichviel, ob sich hieraus etwas Weiteres erschliessen lässt oder nicht, sondern vielmehr der, die Eigenschaften der verschiedenen Integrale kennen zu lernen, und dass, wenn man diesen Zweck durch die Betrachtung der Gleichung selbst und ohne alle Integration derselben zu erreichen im Stande ist, die Integration ganz überflüssig wird. Die reifere Erfahrung muss ihn erst lehren, dass man wirklich integrirt haben und trotzdem so klug sein kann, wie zuvor, indem der Anblick des Integrales ein ebenso trostlos undurchsichtiger wie der der Differentialgleichung selbst sein kann, für denjenigen wenigstens, dem die oberwähnten allgemeinen Sätze und Regeln wie unnützer Ballast vorkommen und für den nur Integrationsmethoden Werth haben.

Es liegt nun mir ganz begreiflicher Weise daran, meinen Forschungen auf dem Felde der linearen Differentialgleichungen eine möglichst schnelle Verbreitung zu verschaffen und selbst diejenigen Leser in den Kreis der Bearbeiter dieser schönen und anmuthigen Wissenschaft hineinzuziehen, die mit unerfüllbaren Erwartungen an das Studium derselben gehen, selbst wenn dies nur auf Kosten der wissenschaftlichen Strenge möglich wäre. Gerade so also, wie der hypothetische Erfinder der Theorie der algebraischen Gleichungen zweckmässig damit anfangen könnte, die regula falsi zu veröffentlichen oder eine andere numerische Approximationsmethode, will auch ich hier anfangen, die Integrationsmethoden selbst der mathematischen Lesewelt vorzuführen. Man wird dann sehen, dass sie sämmtlich sehr einfach sind, gerade so, wie die Auflösungsmethoden bei den algebraischen Gleichungen, man wird aber auch andererseits das Bedürfniss allgemeiner Sätze und Regeln über die Form des Integrales kennen lernen, weil ohne sie sehr Vieles in diesen Methoden unmotivirt erscheinen würde und Veranlassung gäbe zu Fragen, wie: aber warum macht man denn hier gerade das und nicht etwas anderes?

Der Integrationsmethoden, die hier auseinandergesetzt werden sollen, sind vier. Jede von ihnen hat ein besonderes Feld der vorzugsweisen Brauchbarkeit. Sie sind: *erstens* das Integriren in Form von aufsteigenden Reihen; *zweitens* das asymptotische Integriren in absteigender Form; *drittens* das Integriren durch bestimmte Integrale und *viertens* das Ermitteln der algebraischen Gleichung, aus deren Wurzeln die partikulären Integrale der Differentialgleichung abgeleitet werden können.

I.

Integration in aufsteigenden Reihen.

Es lässt sich bekanntlich eine jede Funktion einer einzigen Veränderlichen x aufsteigend nach Potenzen von $x-\alpha$ vermittelst der Mac-Laurin'schen Formel in eine Reihe entwickeln, unter α eine nach Belieben zu wählende Grösse verstanden; so auch das Integral einer Differentialgleichung, und es ist auch nicht unbekannt, dass die Coefficienten der das Integral so darstellenden Reihe ohne alle Integration durch den puren Akt des Differentiirens und Auflösens von Gleichungen gewonnen werden können. Ist nämlich die Differentialgleichung

$$P = 0,$$

unter P einen Ausdruck verstanden, der in sich enthält:

$$x, \quad y, \quad \frac{dy}{dx} = y', \quad \frac{d^2y}{dx^2} = y'', \ldots \frac{d^ny}{dx^n} = y^{(n)},$$

gleichgültig übrigens, ob nach den letzteren linear oder nicht, und man denkt sich anstatt y eine beliebige Funktion von x, gleichviel, ob Integral oder nicht, aber in Reihenform aufsteigend nach Potenzen von $x - \alpha$ geordnet, substituirt; so wird auch P übergehen in eine solche Reihe, und bezeichnet man noch überdies mit $\mathrm{y}, \mathrm{y}', \mathrm{y}'', \ldots \mathrm{P}, \mathrm{P}', \mathrm{P}'', \ldots$ dasjenige, was aus $y, y', y'', \ldots$ $\ldots P, P' = \frac{dP}{dx}, P'' = \frac{d^2P}{dx^2}, \ldots$ wird, wenn man x durch α ersetzt; so sind kraft der Mac-Laurin'schen Formel diese zwei Reihen, die für y und jene für P, die folgenden:

$$y = \mathrm{y} + \mathrm{y}'(x-\alpha) + \tfrac{1}{2}\mathrm{y}''(x-\alpha)^2 + \ldots,$$

$$P = \mathrm{P} + \mathrm{P}'(x-\alpha) + \tfrac{1}{2}\mathrm{P}''(x-\alpha)^2 + \ldots$$

Dies gilt, wie gesagt, für jeden beliebigen, anstatt y gesetzten Werth in Reihenform. Ist derselbe aber ein Integral, dann hat man

$$\mathrm{P} = \mathrm{P}' = \mathrm{P}'' = \ldots = P = 0,$$

ein System von Gleichungen, das zur Auffindung des Integrales in Reihenform, d. h. zur Ermittelung der Coefficienten, verwendet werden kann, und namentlich wird die erste dieser Gleichungen, d. h. die $\mathrm{P} = 0$, zum Werthe führen von $\mathrm{y}^{(n)}$, der eindeutig ausfallen wird, oder mehrdeutig, je nachdem diese Gleichung nach $\mathrm{y}^{(n)}$ dem ersten Grade oder einem höheren angehört. Die zweite, d. h. die $\mathrm{P}' = 0$, wird $\mathrm{y}^{(n+1)}$ geben, und zwar meist durch Auflösen einer Gleichung des ersten Grades, somit eindeutig, wenn $\mathrm{y}^{(n)}$ nur einen einzigen Werth erhielt, und $r$deutig, wenn $\mathrm{y}^{(n)}$ r verschiedene Werthe besass. Ebenso gibt die nächstfolgende dritte, d. h. die $\mathrm{P}'' = 0$, das $\mathrm{y}^{(n+2)}$ u. s. w. Die Anfangscoefficienten der Reihe jedoch, nämlich $\mathrm{y}, \mathrm{y}', \mathrm{y}'', \ldots \mathrm{y}^{(n-1)}$, werden im Allgemeinen aus diesen Gleichungen nicht bestimmt und spielen somit die Rolle von n verschiedenen Integrationsconstanten und enthalten zugleich in sich den Beweis, dass man mit der Berechnung des allgemeinen Integrales beschäftigt sei. Dies Alles ist sehr einfach und schon längst bekannt, hatte aber bisher nicht den geringsten Nutzen gebracht, weil bei den so erhaltenen Reihen das Gesetz, nach welchem die Glieder gebildet werden, und folglich auch das allgemeine Glied, selten ermittelt wer-

den konnte, und weil der so gewonnene Ausdruck seiner Undurchsichtigkeit wegen über die Natur des Integrales gar Nichts lehrte, und man sich sehr leicht überzeugen kann, dass selbst die allerlichtvollste Funktion von x, die man als ein Integral der Differentialgleichung auf einem anderen Wege ermittelt hat, durch die hier zur Sprache gebrachte Integrationsmethode in Reihenform dargestellt, ihre Durchsichtigkeit gänzlich verliere und, gewissermassen in ihren Bestandtheilen chaotisch zusammengeworfen, jeden Aufschluss über Periodicität, Maxima und Minima oder Nullwerthe der partikulären Integrale verweigere. Es ist dies eine natürliche Folge des Umstandes, dass die Reihenform ein allen Funktionen passendes Kleid ist, folglich zur speciellen Unterscheidung derselben von einander und Ermittelung ihrer besonderen Eigenschaften ganz und gar untauglich ist.

Es wäre hier sehr wichtig, diese völlige Untauglichkeit der Reihenform zur Erörterung der besonderen Eigenschaften des Integrales durch Beispiele näher zu begründen. Wir müssen jedoch, um die Grenzen dieses Aufsatzes nicht zu überschreiten, es dem Leser überlassen, sich diese analytische Erfahrung zu verschaffen, fügen aber doch die Bemerkung an, dass z. B. eine trigonometrische Funktion, wie $\sin x$ oder $\cos x$, ingleichen auch ein Logarithmus, sehr bereitwillig geometrisch construirt vor die Augen des Geistes trete. Man bringe sie in Reihenform, multiplicire die so erhaltenen Reihen, zwei oder mehrere, mit gewissen Constanten, und addire sie, so kann man Reihengebilde erhalten, denen es nun und nimmer anzusehen ist, aus welchen lichtvollen Ausdrücken sie hervorgegangen sind, und dies ist im Wesentlichen der Fall desjenigen, der aufsteigend in dieser Form integrirt.

Wenn nun aber auch diese Reihenform zur Erörterung der speciellen Eigenschaften der Integrale im Allgemeinen sich als untrüglich erweist, so ist sie dafür desto nützlicher, ja sie ist die einzige, derer man sich bedienen kann, um allgemeine Eigenschaften, wie z. B. Existenz des Integrales, zu beweisen. So würde z. B. in der eben angeführten Deduction zugleich unmittelbar der Beweis liegen, dass eine jede Differentialgleichung der $n$ten Ordnung ein allgemeines Integral mit n willkührlichen Constanten, das stets in Form einer aufsteigenden Reihe, geordnet nach Potenzen von $x-\alpha$, zu erhalten ist, besitze, wenn sich nur darthun liesse, dass die Reihen, zu welchen man so gelangt, auch wirklich gewisse Funktionen von x repräsentiren, was man aber nur dann kann, wenn man ihre Convergenz, wenn auch nur für gewisse α und begrenzte x, nachzuweisen im Stande ist. Für lineare Differentialgleichungen mit algebraischen und ganzen Coeffi-

cienten habe ich diesen Fundamentalbeweis im Eingange meines Werkes gegeben, und er spielt alldort dieselbe Rolle, wie in der Theorie der algebraischen Gleichungen der Beweis des Fundamentalsatzes, dass eine jede Gleichung des *n*ten Grades mindestens Eine Wurzel besitze in der Form $p+q\sqrt{-1}$, und es bleibt späteren mathematischen Wissenschaftsforschern überlassen, diesem wichtigen Beweise eine grössere Allgemeinheit zu verschaffen. Hieran knüpft sich die Bemerkung, dass das längst bekannte Integriren der Differentialgleichungen in Reihenform zwar bisher den Analysten beinahe gar keinen Nutzen gebracht hat, aber nicht darum, weil es, absolut genommen, unbrauchbar ist, sondern nur darum, weil man es zu Zwecken, zu welchen es brauchbar ist, nicht verwendete, und hieraus fliesst wieder eine besondere Ermahnung an den Wissenschaftsforscher, über eine Methode unmittelbar den Stab nicht zu brechen, weil sie zu einem bestimmten Zwecke sich nicht verwenden lässt, sondern vielmehr auf die Ursache dieser Nichtverwendbarkeit zurückzugehen und, darauf gestützt, die Frage zu stellen, ob sie vielleicht zu anderen Zwecken und unter anderen Umständen sich als tauglicher erweisen könne.

Nun weiss man, dass, wiewohl die Mac-Laurin'sche Formel im Allgemeinen immer und jede Funktion zu geben geeignet ist, dies doch eine Ausnahme erleide bei gewissen Funktionen und für gewisse Werthe von α, für welche dieselben stetig zu sein aufhören. Würde es sich daher in gewissen Fällen herausstellen, dass die auf die Mac-Laurin'sche Formel gegründete Integrationsmethode zur Ermittelung des Integrales für ein gewisses α nicht zureiche, so liegt auch der Schluss nahe, dass dieses Integral nothwendig einen für $x=\alpha$ unstetig werdenden Bestandtheil in sich schliessen muss, und dies würde nun eine Eigenschaft sein, welche diesen Bestandtheil vor den übrigen heraushebt und nach der Natur der unstetig machenden Grösse zu fragen veranlasst. Man frägt also in einem solchen Falle: ist die unstetig machende Ursache ein Nenner, wie $(x-\alpha)^k$, und sagt, wenn das ist, so wird die Befreiung des Integrales von diesem Nenner es unmittelbar unter die Herrschaft der Mac-Laurinschen Formel zurückführen müssen, oder ist die unstetig machende Ursache ein Bestandtheil, wie $\log(x-\alpha)$, dann wird die Sonderung dieses logarithmischen Faktors zu demselben Ziele führen. Die von mir eingeleiteten Untersuchungen haben gezeigt, dass beides der Fall sein könne dann, wenn die Differenz $x-\alpha$, nach welcher das Integral aufsteigend entwickelt werden soll, als Faktor des ersten Coefficienten der von Brüchen befreiten linearen Differentialgleichung erscheint, d. h. wenn die Differentialgleichung auf die Form gebracht ist:

(1) $$X_n y^{(n)} + X_{n-1} y^{(n-1)} + X_{n-2} y^{(n-2)} + \ldots + X_1 y' + X_0 y = 0,$$

in der die Coefficienten X_n, X_{n-1}, $X_{n-2}, \ldots X_1$, X_0 algebraische und ganze Funktionen von x sind, und wenn X_n den Faktor $x-\alpha$ ein oder mehrere Mal besitzt. Das wirkliche Integriren in Reihenform ist wohl so ausserordentlich einfach, dass es kaum einer Exposition bedarf. Nicht gar so gut einzusehen sind aber die dasselbe begleitenden analytischen Kunstgriffe und dann, was sich daran schliesst. Ich werde sie hier in den speciellsten Fällen angeben, jedoch ohne Beweis, welchen letzteren der Leser nothwendigerweise in meinem grösseren Werke aufzusuchen haben wird. Ich nehme den am allerhäufigsten vorkommenden Fall an, dass X_n einen einzigen Faktor $x-\alpha$ besitze. Der nächste Schluss, den der Rechner aus diesem Umstande zieht, ist, dass ein einziges partikuläres Integral und nicht mehr vorhanden sei, welches für $x = \alpha$ in den Ausnahmszustand des Unstetigwerdens geräth, und zwar zunächst durch das Vorhandensein eines Divisors $(x-\alpha)^k$, allwo k den leicht berechenbaren Werth

(2) $$k = \frac{\mathrm{X}_{n-1}}{\mathrm{X}_n'} - n + 1$$

hat, unter X_{n-1} und X_n' analog der früher eingeführten Bezeichnungsweise dasjenige verstanden, was aus X_{n-1} und $X_n' = \frac{dX_n}{dx}$ wird, wenn man x durch α ersetzt. Und so lange der Exponent k nach dieser Formel nicht in eine ganze Zahl übergeht, gleichgiltig ob positiv oder negativ, wird immer die Sonderung dieses Nenners hinreichen, um das partikuläre Integral seinem Ausnahmszustande zu entreissen und in Reihenform darstellbar zu machen. Anders verhält sich jedoch die Sache in den gar nicht seltenen Fällen, wo k in eine ganze, entweder negative oder positive Zahl übergeht. Der Faktor $x-\alpha$ des ersten Coefficienten hört zwar auch dann nicht auf, im ersten Falle auf ein partikuläres Integral mit einem Faktor $(x-\alpha)^h$, im zweiten mit einem Divisor $(x-\alpha)^k$ hinzudeuten, er gibt aber noch überdies Zeugniss von einer im Integrale vorkommenden logarithmischen Transcendenten, namentlich $\log(x-\alpha)$, die auf eine andere Weise im ersten und wieder auf eine andere Weise im zweiten Falle erscheint. Ist nämlich $k = -h$ eine ganze negative Zahl, so existirt ein einziges partikuläres Integral mit dem Faktor $(x-\alpha)^h$, welches der Reihenentwickelung vermittelst der Mac-Laurinschen Formel gar nicht wiederstrebt, nur dass diese ordnungsmässig h an der Zahl der Null gleiche Anfangsglieder haben wird; aber dieses eine partikuläre Integral entzieht alle übrigen, $n-1$

an der Zahl, der Herrschaft der Mac-Laurin'schen Formel, jedoch erst vom $k$ten Gliede angefangen, und zwar darum, weil es in alle einen Bestandtheil wie $(x-\alpha)^k . z . \log(x-\alpha)$ wirft, allwo $(x-\alpha)^k . z$ für sich ein partikuläres Integral, und zwar das eben erwähnte, einzige entwickelbare vorstellt. Im letzten Falle endlich, wo k eine ganze positive Zahl ist, verhält sich die Sache wieder anders und gewissermassen umgekehrt. Es existirt nämlich ein einziges partikuläres Integral mit dem Nenner $(x-\alpha)^k$, und dieses vermag weder unmittelbar, noch nach geschehener Sonderung dieses Nenners in Reihenform berechnet zu werden, weil es nebst diesem Nenner noch die Transcendente $\log(x-\alpha)$, und zwar in $n-1$ verschiedenen Gliedern enthält. Die übrigen partikulären Integrale, $n-1$ an der Zahl, aber sind unmittelbar darstellbar in Reihenform. Diese drei hier aufgezählten Fälle erfordern je eine andere Behandlung. Ist nämlich erstens k keine ganze Zahl und auch keine solche Funktion der in der Differentialgleichung erscheinenden Parameter, dass es gelegentlich in eine ganze Zahl übergehen kann, so fängt man damit an, die Differentialgleichung nach der oben angedeuteten Methode in Reihenform zu integriren, das System von Gleichungen:

$$P = P' = P'' = \ldots = 0$$

aufstellend. Diese Gleichungen sind hier speciell:

(3)

$$P = X_n y^{(n)} + X_{n-1} y^{(n-1)} + X_{n-2} y^{(n-2)} + \ldots + X_1 y' + X_0 y = 0,$$

$$P' = X_n y^{(n+1)} + \left.\begin{array}{l} X_{n-1} \\ +X_n' \end{array}\right\} y^{(n)} + \left.\begin{array}{l} X_{n-2} \\ +X_{n-1}' \end{array}\right\} y^{(n-1)} + \ldots + \left.\begin{array}{l} X_0 \\ +X_1' \end{array}\right\} y' + X_0' y = 0,$$

$$P'' = X_n y^{(n+2)} + \left.\begin{array}{l} X_{n-1} \\ +2X_n' \end{array}\right\} y^{(n+1)} + \left.\begin{array}{l} X_{n-2} \\ +2X_{n-1}' \\ +X_n'' \end{array}\right\} y^{(n)} + \ldots + \left.\begin{array}{l} +2X_0' \\ +X_1'' \end{array}\right\} y' + X_0'' y = 0$$

. . . .

In ihnen allen verschwindet gegenwärtig das erste, mit dem Faktor X_n verbundene Glied, weil $x-\alpha$ ein Multiplicator von X_n ist. In Folge dessen bestimmt die erste Gleichung nicht wie sonst $y^{(n)}$, sondern $y^{(n-1)}$ in linearer Funktion der $y, y', \ldots y^{(n-2)}$, welche letzteren man als Integrationsconstanten, $n-1$ an der Zahl, auffassen kann. Darauf gibt die zweite $y^{(n)}$ als nach eben diesen $n-1$ Constanten linearen Ausdruck. Die folgende dritte liefert

ebenso $y^{(n+1)}$ u. s. w. und es sind diese für $y^{(n-1)}$, $y^{(n)}$, $y^{(n+1)}$,.... gewonnenen Ausdrücke beziehlich gebrochen durch die Produkte M_0, M_1, M_2,...., die gegeben sind durch die Gleichungen:

$$M_0 = X_{n-1},$$

$$M_1 = X_{n-1}(X_{n-1} + X_n'),$$

$$M_2 = X_{n-1}(X_{n-1} + X_n')(X_{n-1} + 2X_n'),$$

. . . .

$$M_r = X_{n-1}(X_{n-1} + X_n')(X_{n-1} + 2X_n') \ldots\ldots (X_{n-1} + rX_n'),$$

. . . .

und nimmt man an, dass der seiner linearen Form nach bekannte Werth von $y^{(n+r-1)}$ ausgedrückt werde, wie folgt:

$$y^{(n+r-1)} = \frac{1}{M_r}\{[0,r]y + [1,r]y' + \ldots\ldots + [n-2,r]y^{(n-2)}\},$$

so sieht offenbar der auf diesem Wege gewonnene und nach den $n-1$ Constanten geordnete Werth von y folgendermaassen aus:

$$\begin{aligned} y = \quad & y\left[1 + \frac{[0,0]}{M_0}\frac{(x-\alpha)^{n-1}}{1\ldots\ldots(n-1)} + \frac{[0,1]}{M_1}\frac{(x-\alpha)^n}{1\ldots\ldots n} + \ldots\ldots\right] \\ & + y'.(x-\alpha)\left[1 + \frac{[1,0]}{M_0}\frac{(x-\alpha)^{n-2}}{1\ldots\ldots(n-1)} + \frac{[1,1]}{M_1}\frac{(x-\alpha)^{n-1}}{1\ldots\ldots n} + \ldots\ldots\right] \\ & + y''.(x-\alpha)^2\left[1 + \frac{[2,0]}{M_0}\frac{(x-\alpha)^{n-3}}{1\ldots\ldots(n-1)} + \frac{[2,1]}{M_1}\frac{(x-\alpha)^{n-2}}{1\ldots\ldots n} + \ldots\ldots\right] \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + y^{(n-2)}.(x-\alpha)^{n-2}\left[\frac{1}{1\ldots\ldots(n-2)} + \frac{[n-2,0]}{M_0}\frac{(x-\alpha)}{1\ldots\ldots(n-1)} \right. \\ & \qquad \left. + \frac{[n-2,1]}{M_1}\frac{(x-\alpha)^2}{1\ldots\ldots n} + \ldots\ldots\right], \end{aligned}$$

und stellt ein Integral der Differentialgleichung der $n$ten Ordnung mit $n-1$ Constanten, folglich kein allgemeines dar, sondern ein durch den Zusatz von noch einem einzigen Genüge leistenden Werthe mit einer einzigen Constante zu vervollständigendes. Um zu diesem einen Werthe zu gelangen, befreit man von dem Nenner $(x-\alpha)^k$, der ihm anhängt, vermittelst der Einführung einer neuen Veränderlichen z anstatt y durch die Substitution:

$$y = \frac{z}{(x-\alpha)^k},$$

und wird eine neue Differentialgleichung erhalten, aus welcher auf dem betretenen Wege dieses eine partikuläre Integral ohne Anstand zu haben ist. Es kann noch bemerkt werden, dass dieses Verfahren gelegentlich mit einigen Modifikationen auch dann noch zu einem Integrale mit $n-1$ Constanten führe, wenn k zwar eine ganze negative Zahl, aber eine solche ist, deren numerischer Werth unter der Ordnungszahl n der Differentialgleichung liegt. Wir bieten ein einziges Beispiel in der Differentialgleichung:

(4) $$P = x.y^{IV} - y = 0.$$

Es ist hier: $X_n = x$, $X_{n-1} = 0$, $n = 4$; folglich hat man kraft der Formel (2): $k = -3$. Es deutet dies auf ein in Reihenform darstellbares Integral mit dem Faktor x^3 und auf einen Bestandtheil des allgemeinen Integrales mit dem Faktor $x^3 \log x$. Ein partikuläres Integral mit drei Constanten lässt sich hier frei von dem $\log x$ und folglich in Reihenform aufsteigend nach x geordnet darstellen; das allgemeine mit vier Constanten versehene Integral jedoch vermag dieses nicht. Wir gewinnen hier auf dem Wege der Differentiation:

$$P' = x.y^{V} + y^{IV} - y',$$
$$P'' = x.y^{VI} + 2y^{V} - y'',$$

. . . .

$$P^{(r)} = x.y^{(r+4)} + ry^{(r+3)} - y^{(r)};$$

sodann durch Nullsetzen des x und nachherige Auflösung:

$$y = 0, \quad y^{IV} = y', \quad y^{V} = \frac{1}{2}y'', \quad y^{VI} = \frac{1}{3}y''',$$

$$y^{VII} = \frac{1}{4}y', \quad y^{VIII} = \frac{1}{2.5}y'', \quad y^{IX} = \frac{1}{3.6}y''',$$

$$y^{X} = \frac{1}{1.4.7}y', \quad y^{XI} = \frac{1}{2.5.8}y'', \quad y^{XII} = \frac{1}{3.6.9}y''',$$

. . . .

$$y^{(3r+1)} = \frac{1}{1.4.7\ldots.(3r-2)}y', \quad y^{(3r+2)} = \frac{1}{2.5.8\ldots.(3r-1)}y'',$$

$$y^{(3r+3)} = \frac{1}{3.6.9\ldots.(3r)}y'''.$$

Hier lassen sich also die y', y'', y''' als drei Integrationsconstanten betrachten, und es gibt die Mac-Laurin'sche Formel das nach diesen drei Konstanten geordnete Integral:

$$y = y' \cdot x\left[1 + \frac{1}{4!}\,\frac{1}{1}x^3 + \frac{1}{7!}\cdot\frac{1}{1.4}\cdot x^6 + \frac{1}{10!}\cdot\frac{1}{1.4.7}x^9 + \dots\right]$$

$$+ y'' \cdot x^2\left[\frac{1}{2!} + \frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{8!}\cdot\frac{1}{2.5}\cdot x^6 + \frac{1}{11!}\cdot\frac{1}{2.5.8}x^9 + \dots\right]$$

$$+ y''' \cdot x^3\left[\frac{1}{3!} + \frac{1}{6!}\cdot\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{9!}\cdot\frac{1}{3.6}\cdot x^6 + \frac{1}{12!}\cdot\frac{1}{3.6.9}x^9 + \dots\right].$$

Es ist aber, da ihm eine Constante fehlt, nicht das allgemeine, und es ist unerlässlich, um das letztere gleichfalls in Reihenform zu erhalten, der Einführung von zwei neuen Veränderlichen, etwa z und u anstatt der einen y voranzuschicken hier durch die Substitution:

$$y = z + ux^3 . \log x.$$

Sie gilt speciell für die Gleichung (4) und ist als ein specieller Fall enthalten in der für die allgemeine Differentialgleichung (1) mit einem einzigen Faktor $x - \alpha$ im ersten Coefficienten X_n für den Fall giltigen, dass $k = -h$ eine ganze negative Zahl ist, nämlich:

$$(5) \qquad y = z + u(x-\alpha)^h \log(x-\alpha),$$

allwo $h = n - 1 - \frac{X_{n-1}}{X_n'}$ ist.

Vermöge dieser Substitution geht jedesmal das Gleichungspolynom über in ein Aggregat aus zwei Bestandtheilen, einem mit dem Faktor $\log(x-\alpha)$ versehenen und einem anderen, der davon frei ist, d. h. die Gleichung wird die Form annehmen:

$$P + Q\log(x-\alpha) = 0,$$

und muss durch schickliche Werthe von z und u in Reihenform erfüllt werden. Man denkt sich also:

$$z = \mathrm{z} + \mathrm{z}'(x-\alpha) + \mathrm{z}'' \cdot \frac{(x-\alpha)^2}{1.2} + \dots,$$

$$u = \mathrm{u} + \mathrm{u}'(x-\alpha) + \mathrm{u}'' \cdot \frac{(x-\alpha)^2}{1.2} + \dots,$$

$$P = \mathrm{P} + \mathrm{P}'(x-\alpha) + \mathrm{P}'' \cdot \frac{(x-\alpha)^2}{1.2} + \dots,$$

$$Q = \mathrm{Q} + \mathrm{Q}'(x-\alpha) + \mathrm{Q}'' \cdot \frac{(x-\alpha)^2}{1.2} + \dots,$$

und hat zur Bestimmung der Coëfficienten der für z und u angenommenen Reihen die zwei Systeme von lineären Gleichungen:

$$P = P' = P'' = \ldots = 0, \quad Q = Q' = Q'' = \ldots = 0.$$

Dies ist der allgemeine Weg. In unserem gegenwärtig erkiesenen Beispiele aber sind die zwei Gleichungen, in welche die transformirte zerfällt, wie man sich durch eine leichte Rechnung ohne Mühe überzeugt:

$$P = x.z^{IV} - z + 4x^3.u''' + 30x^2.u'' + 44x.u' + 6u = 0,$$

$$Q = x^3.u^{IV} + 12x^2.u''' + 36x.u'' + 24u' - x^2.u = 0.$$

Hieraus gewinnt man durch Differentiation:

$$P' = x.z^{V} + z^{IV} - z' + 4x^3.u^{IV} + 42x^2.u''' + 104x.u'' + 50.u',$$

$$P'' = x.z^{VI} + 2z^{V} - z'' + 4x^3.u^{V} + 54x^2.u^{IV} + 188x.u''' + 154.u'',$$

. . . .

$$Q' = x^3.u^{V} + 15x^2.u^{IV} + 60x.u''' + 60.u'' - x^2.u' - 2xu,$$

$$Q'' = x^3.u^{VI} + 18x^2.u^{V} + 90x.u^{IV} + 120.u''' - x^2.u'' - 4xu' - 2u,$$

. . . .

Nun setzen wir $x = 0$ und erhalten so aus der $P = 0$ alsogleich die $P = -z + 6u = 0$, woraus

$$u = \frac{z}{6}$$

hervorgeht. Hierauf gibt die $Q = 0$ unmittelbar

$$u' = 0.$$

Dann erhalten wir aus der $P' = 0$ die $P' = z^{IV} - z' + 50u' = 0$, welche

$$z^{IV} = z'$$

liefert. Dann kommt die $Q' = 0$ an die Reihe und bestimmt

$$u'' = 0,$$

und so geben der Reihe nach die $P'' = Q'' = P''' = Q''' = \ldots = 0$ beziehlich die nachfolgenden Coëfficientenwerthe:

$$z^{V} = \frac{1}{2}z'', \quad u''' = \frac{2}{6!}z, \quad z^{VI} = \frac{1}{3}z''' - \frac{228}{6!}z, \quad u^{IV} = 0,$$

$$z^{VII} = \frac{1}{4}z', \; u^{V} = 0, \; z^{VIII} = \frac{1}{2.5}z'', \; u^{VI} = \frac{6!}{9!3.6}z, \; z^{IX} = \frac{1}{18}z''' - \frac{394206}{9!3.6}z,$$

. . . .

Aus ihnen bildet sich zunächst z und u in Reihenform, dann aber der folgende, nach den vier willkührlichen Constanten z, z', z'', z''' geordnete Werth von y oder das allgemeine Integral:

$$y = z\{1 - \frac{928}{6!6!}x^6 - \frac{66701}{9!9!3}x^9 - \ldots + x^3\log x\,[\frac{1}{2.3} + \frac{1}{6!}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1}{9!}\,\frac{x^6}{3.6} + \ldots]\}$$

$$+ z'.x\{1 + \frac{1}{4!}\cdot\frac{x^3}{1} + \frac{1}{7!}\cdot\frac{x^6}{1.4} + \frac{1}{10!}\cdot\frac{x^9}{1.4.7} + \frac{1}{13!}\,\frac{x^{12}}{1.4.7.10} + \ldots\}$$

$$+ z''.x^2\{\frac{1}{2} + \frac{1}{5!}\cdot\frac{x^3}{2} + \frac{1}{8!}\cdot\frac{x^6}{2.5} + \frac{1}{11!}\cdot\frac{x^9}{2.5.8} + \frac{1}{14!}\cdot\frac{x^{12}}{2.5.8.11} + \ldots\}$$

$$+ z'''.x^3\{\frac{1}{2.3} + \frac{1}{6!}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1}{9!}\cdot\frac{x^6}{3.6} + \frac{1}{12!}\cdot\frac{x^9}{3.6.9} + \frac{1}{15!}\cdot\frac{x^{12}}{3.6.9.12} + \ldots\}$$

Hier hat nun das erste der vier partikulären Integrale einen logarithmischen Bestandtheil. Dies ist aber nur ein diesem Beispiele angehöriger sehr specieller Fall, und es ist sehr leicht einzusehen, dass im Allgemeinen alle partikulären Integrale bis auf eines — das letzte nämlich — diesen logarithmischen Bestandtheil tragen werden, jedoch wird er bei ihnen bis auf einen constanten Faktor derselbe sein. Die Reihe, mit der $\log x$ überall multiplicirt erscheint, ist aber selbst ein partikuläres Integral, eben dieses letzte nämlich. Alle Reihen aber, aus welchen y zusammengesetzt ist, erfreuen sich einer unbegrenzten Convergenz gerade wie die für die Exponentielle e^x für beliebige Werthe der Variablen x, nach welcher sie geordnet sind. Dieser Convergenz zufolge lässt aber dies gefundene Integral an Brauchbarkeit zur ferneren Diskussion kaum noch etwas zu wünschen übrig, weil es durchaus nicht schwer ist, alle Eigenschaften seiner Bestandtheile: Maximum-, Minimum- und Nullwerthe mit sammt dem zugehörigen x aufzufinden und sich dieselben so mit beliebiger Genauigkeit geometrisch construirt vor Augen zu führen. Einer solchen Convergenz begegnet man im Allgemeinen nur, wenn man nach aufsteigenden Potenzen der Faktoren des ersten Coëfficienten der Differentialgleichung entwickelt, wo man dann zu gleicher Zeit auch die in den Integralen allenfalls vorhandenen logarithmischen Transcendenten entdeckt, während sich wieder aus dem Vorkommen oder Nichtvorkommen eines solchen Logarithmus und der Gestalt, in welcher er erscheint, die ferneren erspriesslichen Schritte dem Rechner kund geben, indem sie ihn in Stand setzen, zu beurtheilen, welche der übrigen Integrationsmethoden man allenfalls noch anwenden könne, um die möglichst vollständige Kenntniss aller Eigenschaften des Integrales zu erringen.

Ist der durch die (2) gegebene Werth von k ganz und positiv, hiemit ein einziges partikuläres Integral mit dem Divisor $(x-\alpha)^k$ andeutend, so ist auch nur in diesem einzigen Integrale nebst dem noch ein unstetig machender Bestandtheil mit $\log(x-\alpha)$ enthalten, und man kann sich die übrigen $n-1$ partikulären Integrale mittelst der Mac-Laurin'schen Formel genau so verschaffen, wie in dem eben erledigten Beispiele. Um jedoch das allgemeine Integral zu finden durch einen einzigen Rechnungsakt, ist es wieder nothwendig, die Einführung zweier neuen Veränderlichen dem Integriren vorangehen zu lassen, aber nicht durch die Substitution (5), sondern vielmehr durch die folgende von ihr verschiedene:

$$y = \frac{z}{(x-\alpha)^k} + u \log(x-\alpha). \qquad (6)$$

Alle diese Vorschriften beziehen sich auf den Fall, dass der erste Coëfficient der Differentialgleichung nur mit einem einzigen Faktor $x-\alpha$ versehen ist. Wären dagegen solcher Faktoren mehrere vorhanden, dann richtet sich die Form des Integrales nach complicirteren Regeln, und man hat in derselben als unstetig machende Bestandtheile bald Exponentialgrössen, bald Faktoren oder Divisoren, bald solche und Logarithmen zugleich anzusehen, welche letzteren dann auch in höheren Potenzen mit ganzen und positiven Exponenten zu erscheinen vermögen. Diese Regeln gehören der Formenlehre an und sind etwas von der Integrationsmethode völlig Geschiedenes, und wenn die letztere sich in ihrer Anlage als äusserst einfach andeutet, so nöthigen dagegen die Vorschriften der Formenlehre im Allgemeinen zu viel complicirteren Betrachtungen, gerade wie in der allgemeinen Theorie der algebraischen Gleichungen auch. Das Integriren selbst ist leicht, das Wissen jedoch, wie man es einzuleiten hat, ist schwieriger.

II.

Das asymptotische Integriren.

Diese zweite Integrationsmethode ist die wichtigste von allen, weil die lichtvollste. Sie gibt das Integral gewöhnlich als Produkt aus zwei Faktoren, denen ganz verschiedene analytische und geometrische Eigenschaften zukommen. Der erste hat eine Exponentialgrösse zur Grenze, und somit geometrisch construirt eine exponentielle Curve zur Asymptote; der zweite convergirt beim fortwährenden Wachsen der unabhängigen Veränderlichen x gegen

eine gewisse Potenz von x, hat also, geometrisch construirt, zur Asymptote eine algebraische Curve. Der erste geht mitunter über in eine periodische Funktion, der zweite nie. Sie heisst darum die asymptotische, weil sie die partikulären Integrale in ihre zwei multiplicativen Bestandtheile zerlegt, denen Asymptoten verschiedener Gattung: exponentielle und algebraische, angehören. Dieser Methode des Integrirens fügen sich wohl alle Differentialgleichungen, einige unmittelbar, andere aber erst nach vorhergegangener ein- oder zweimaliger Transformation. Diejenigen, denen man unmittelbar vermittelst derselben das allgemeine Integral entringt, sind die in folgender Form enthaltenen:

(7)

$$[a_n x^m + b_n x^{m-1} + \dots + k_n] y^{(n)} + [a_{n-1} x^m + b_{n-1} x^{m-1} + \dots + k_{n-1}] y^{(n-1)}$$
$$+ \dots + [a_1 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + k_1] y' + [a_0 x^m + b_0 x^{m-1} + \dots + k_0] y = 0,$$

d. h. mit Coëfficienten, die sämmtlich ein und dieselbe Gradzahl m bieten. Es leidet dies jedoch mannigfache Ausnahmen, welche zum Theile aus der folgenden Exposition sich von selbst ergeben werden, zum Theile jedoch in Auseinandersetzungen verwickeln würden, die nicht hieher gehören. Ich will die Grundzüge dieser Methode, die ebenfalls ausserordentlich einfach ist, so wie die frühere, wenn man sie einmal richtig vorbereitet hat, hier nur in Bezug auf diejenigen Differentialgleichungen darstellen, die der $n$ten Ordnung angehören und Coëfficienten des ersten und zweiten Grades bieten.

Es sei also zuvörderst gegeben als zu integrirende Differentialgleichung:

(8)

$$(a_n x + b_n) y^{(n)} + (a_{n-1} x + b_{n-1}) y^{(n-1)} + \dots + (a_1 x + b_1) y' + (a_0 x + b_0) y = 0.$$

Gemäss den Vorschriften der Formenlehre erschliessen wir in dieser Gleichung n partikuläre Integrale in der Form:

(9) $$e^{\alpha x} . Q,$$

unter Q eine Funktion von x verstanden, die, ähnlich den algebraischen Funktionen beim fortwährenden Wachsen von x, gegen eine gewisse Potenz von x convergirt. Auf diese Kenntniss gestützt, nehmen wir einen ihr Genüge leistenden Werth an in der hiermit übereinstimmenden Gestalt:

(10) $$y = \frac{d^h}{du^h} [e^{ux} . W]_\alpha ,$$

in welchem h einen constanten Differentiationsindex, W eine Funktion von u, die kein x in sich enthält, und α eine gleichfalls von x unabhängige Constante andeutet, die nach geschehener $h$maliger Differentiation anstatt u gesetzt werden muss, und es sich offenbar darum handelt, durch schickliche Wahl dieser Grössen die Differentialgleichung identisch zu machen. Wir substituiren demnach den angenommenen Ausdruck (10) in dieselbe und bemerken, dass, weil man allgemein für jedes r hat:

$$y^{(r)} = \frac{d^h}{du^h}[u^r e^{ux} W]\}_\alpha,$$

das Substitutionsresultat so aussehe:

$$\frac{d^h}{du^h}[(U_1 x + U_0) e^{ux} W]\}_\alpha = 0,$$

mit den Werthen:

$$U_1 = a_n u^n + a_{n-1} u^{n-1} + \ldots + a_1 u + a_0,$$

$$U_0 = b_n u^n + b_{n-1} u^{n-1} + \ldots + b_1 u + b_0.$$

Führen wir hier die $h$malige Differentiation nach u mit Hilfe der Formel durch, die wir für den $h$maligen Differentialquotienten des Produktes PQ besitzen, nämlich:

$$\frac{d^h}{du^h}[PQ] = P^{(n)} + \binom{n}{1} P^{(n-1)} Q' + \binom{n}{2} P^{(n-2)} Q'' + \ldots,$$

indem wir e^{ux} als ersten und $U_1 Wx + U_0 W$ als zweiten Faktor auffassen, denken wir uns sodann α anstatt u substituirt und bezeichnen allgemein dasjenige, was aus irgend einem $r$ten Differentialquotienten des Produktes $U_0 W$ oder $U_1 W$ durch die Substitution α wird, durch $(U_0 W)^{(r)}$ oder $(U_1 W)^{(r)}$, wobei jedoch wohl zu merken ist, dass hier die Substitution nach der $r$maligen Differentiation ausgeführt gedacht wird und nicht umgekehrt; ordnen wir endlich das Resultat nach absteigenden Potenzen von x; so liegt dann folgende, durch schickliche Wahl von h, W und α identisch zu machende Gleichung vor:

$$0 = e^{ax}\{ \quad x^{h+1}.U_1W$$
$$+ x^h.[U_0W + h(U_1W)']$$
$$+ x^{h-1}.h[(U_0W)' + \frac{h-1}{2}(U_1W)'']$$
$$+ x^{h-2}.\frac{h(h-1)}{1.2}[(U_0W)'' + \frac{h-2}{3}(U_1W)''']$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$+ x^{h-r}.\frac{h(h-1)\ldots(h-r+1)}{1.2\ldots r}[(U_0W)^{(r)} + \frac{h-r}{r+1}(U_1W)^{(r+1)}]$$
$$+ x^{h-r-1}.\frac{h(h-1)\ldots(h-r)}{1.2\ldots(r+1)}[(U_0W)^{(r+1)} + \frac{h-r-1}{r+2}(U_1W)^{(r+2)}]$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad ,$$

was für beliebige x nur dann möglich ist, wenn die Coëfficienten der verschiedenen Potenzen dieser Variablen je für sich gleich Null werden. Man erhält also folgende Reihe von Bestimmungsgleichungen:

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} U_1W &= 0, \\ U_0W + h(U_1W)' &= 0, \\ (U_0W)' + \frac{h-1}{2}(U_1W)'' &= 0, \\ (U_0W)'' + \frac{h-2}{3}(U_1W)''' &= 0, \\ &\cdots\cdots \\ (U_0W)^{(r)} + \frac{h-r}{r+1}(U_1W)^{(r+1)} &= 0, \\ (U_0W)^{(r+1)} + \frac{h-r-1}{r+2}(U_1W)^{(r+2)} &= 0, \\ &\cdots\cdots \end{aligned} \right.$$

Der ersten von ihnen kann Genüge geleistet werden durch Nullwerden von U_1 oder von W; da aber Letzteres unstatthaft ist, weil die entwickelt geschriebene zweite, d. h. die

$$(U_0 + hU_1')W + hU_1W' = 0,$$

dann auch $W' = 0$, die darauf folgende $W'' = 0$ u. s. w. ihr In-

begriff aber $W = 0$ liefern würde, was auch $y = 0$ macht, ihm also allerdings einen Genüge leistenden Werth ertheilt, der aber kein partikuläres Integral ist, so bleibt uns nur übrig:

$$(12) \qquad U_1 = a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_1\alpha + a_0 = 0$$

anzunehmen, und die zweite, die jetzt in die einfachere

$$U_0 + hU_1' = 0$$

übergeht, zur Bestimmung von h zu benützen. Sie liefert:

$$(13) \qquad h = -\frac{U_0}{U_1'},$$

und da die $U_1 = 0$ eine algebraische Gleichung des $n$ten Grades ist, die in der Regel n von einander verschiedene Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ besitzen wird, so gewinnt man ihnen entsprechend auch in der Regel, und namentlich so lange, als es keine gleichen Wurzeln α gibt, und der Coëfficient a_n von der Null verschieden bleibt, n verschiedene und zwar endliche Werthe für h, die dann offenbar n verschiedenen partikulären Integralen angehören, so dass eigentlich durch eine und dieselbe Rechnung und nur mittelst der n Substitutionen von $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ alsogleich das allgemeine Integral erhalten wird.

Nachdem wir gesehen haben, dass die ersten beiden der Bestimmungsgleichungen (11) die Werthe von α und h geben, entwickeln wir die dritte. Sie ist:

$$\left(U_0' + \frac{h-1}{2} U_1''\right) W + (U_0 + (h-1) U_1') W' + \frac{h-1}{2} U_1 W'' = 0.$$

Das in ihr enthaltene Glied mit W'' verschwindet wegen des Faktors U_1, der Coëfficient von W' geht in Folge der (13) in U_1' über, ist somit unter der gemachten Voraussetzung verschiedener Wurzeln von der Null verschieden, daher denn diese Gleichung jedesmal W' bestimmt, indem sie dafür einen dem W proportionalen Ausdruck liefert. Zur Bestimmung des W selbst ist gar kein Mittel vorhanden, es spielt daher die Rolle einer willkührlichen Constante, oder vielmehr von n verschiedenen, den Substitutionen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ angehörigen Constanten. Dass nun dasselbe mit den folgenden Bestimmungsgleichungen in derselben Weise der Fall sei, davon belehrt uns die allgemeine unter ihnen, die von dem Verschwinden des Coëfficienten von x^{h-r} spricht, nämlich die

$$(U_0 W)^{(r)} + \frac{h-r}{r+1} (U_1 W)^{(r+1)} = 0.$$

Die höchsten in ihr vorkommenden Differentialquotienten von W sind der $r$te und $(r+1)$ste; die zu ihnen gehörigen Coëfficienten aber offenbar:

$$U_0+(h-r)U_1', \; \frac{h-r}{r+1}U_1.$$

Ersterer geht, vermöge der (13), über in das von Null verschiedene $-rU_1'$, der andere ist gleich Null.

Die Gleichung dient also bei dem Hinausfallen von $W^{(r+1)}$ zur Bestimmung von $W^{(r)}$. Man sieht daher, dass die Gleichungen (11), von der dritten angefangen, der Reihe nach W', W'', ... $W^{(r)}$, $W^{(r+1)}$ geben, und zwar jedesmal vermittelst einer Division durch U_1'. Man wird also für diese Grösse der Reihe nach dem willkührlichen W proportionale, beziehlich durch U_1', $U_1'^2$, ... $U_1'^r$ gebrochene, somit endliche Ausdrücke erhalten, und da der in entwickelter Form hingestellte angenommene Werth von y auch so aussieht:

$$y=e^{\alpha x}[x^hW+hx^{h-1}W'+\frac{h(h-1)}{1.2}x^{h-2}W''+..+\frac{h...(h-r+1)}{1....r}x^{h-r}W^{(r)}+..],$$

so sind in demselben alle Coëfficienten der eingeklammerten, nach absteigenden Potenzen von x geordneten Reihe als dem W proportionale Ausdrücke bekannt. Dieses W erscheint somit als herauszusetzender gemeinschaftlicher Faktor, und statuirt man allgemein für den Werth $\alpha=\alpha_s$ das Symbol: $W=W_s$ und $W^{(r)}=[s,r]W_s$, so ist in der nachfolgenden Formel das allgemeine Integral der vorgelegten Differentialgleichung enthalten:

(14)

$$\begin{aligned}y= \; & W_1e^{\alpha_1x}[x^{h_1}+h_1[1,1]x^{h_1-1}+\binom{h_1}{2}[1,2]x^{h_1-2}+.... \\ & \qquad ....+\binom{h_1}{r}[1,r]x^{h_1-r}+....] \\ & +W_2e^{\alpha_2x}[x^{h_2}+h_2[2,1]x^{h_2-1}+\binom{h_2}{2}[2,2]x^{h_2-2}+.... \\ & \qquad ....+\binom{h_2}{r}[2,r]x^{h_2-r}+....] \\ & \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ & +W_ne^{\alpha_nx}[x^{h_n}+h_n[n,1]x^{h_n-1}+\binom{h_n}{2}[n,2]x^{h_n-2}+.... \\ & \qquad ....+\binom{h_n}{r}[n,r]x^{h_n-r}+....].\end{aligned}$$

Die Werthe aber von $W', W'', \ldots$ sind hier der Reihe nach

$$(15)\quad \left\{ \begin{aligned} W' &= \frac{W}{2.U_1'^2}\left[2U_0'U_1' - (U_1' + U_0)U_1''\right], \\ W'' &= \frac{W}{2.3.U_1'^4}\Big\{ U_1'^3\left[3U_0'' - 2U_1'''\right] \\ &\quad + U_1'^2\left[-U_0U_1''' + 12U_0'^2 - 18U_0'U_1'' + 6U_1''^2\right] \\ &\quad + U_1'\left[-12U_0U_0'U_1'' + 9U_0U_1''^2\right] + 2U_0^2U_1''^2\Big\} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

Die Ausdrücke, welche man für die aufeinanderfolgenden Reihencoëfficienten auf diese Weise gewinnt, werden zwar immer complicirter, demungeachtet aber lässt sich nicht nur eine allgemeine Regel sowohl ihrer rekurrenten, als auch independenten Bildung aufstellen, sondern auch eine jede der Funktionen W in geschlossener Form angeben. Dies kann jedoch am gegenwärtigen Orte nicht geschehen, weil sonst der vorliegende kleine Abriss der Integrationsmethoden das Schicksal des Hauptwerkes hätte, sich allzusehr in's Breite zu dehnen und somit seinen Zweck ganz und gar verfehlen würde.

Ebenso wenig lassen sich die zahlreichen Ausnahmsfälle berühren, in welchen man durch die eben auseinandergesetzte Integrationsmethode kein allgemeines Integral mit der nothwendigen Anzahl willkührlicher Constanten erhält. Es geschieht dies erstens dann, wenn die Gleichung (12) in α gleiche Wurzeln, etwa m an der Zahl, besitzt, und zweitens dann, wenn sie wegen des Verschwindens der in ihr vorkommenden Anfangscoëfficienten A_n, $A_{n-1}, \ldots$, etwa m an der Zahl, einem niedrigeren, als dem $m$ten Grade angehört. Es würde aber wenig frommen, hier auch nur zu bemerken, dass unsere Integrationsmethode in solchen Fällen partikuläre Integrale, m an der Zahl, darum zu geben verweigere, weil sie in einer anderen, als der vorausgesetzten Gestalt erscheinen. Im ersten Falle nämlich in der Form:

$$e^{\alpha_1 x + \beta x^{\frac{m-1}{m}}}.Q,$$

im zweiten Falle aber in der ähnlichen:

$$e^{\alpha x^{\frac{m+1}{m}}}.Q;$$

denn hieraus erhellen die ferneren Schritte noch keineswegs, welche die n partikulären Integrale unter die Herrschaft der in

Rede stehenden Methode zurückführen, und findet sie der scharfsinnige Leser, nun so hat er einen Theil der Formenlehre entdeckt und so von selbst die Ueberzeugung gewonnen, dass es durchaus nicht zureiche, blos Integrationsmethoden zu besitzen, und so weniger zureiche, je mehr man deren hat, weil dann natürlich die Frage entsteht, welche von allen den vorhandenen in jedem speciellen Falle den Vorzug verdiene, und das zwar mit oder ohne vorbereitende Transformation.

Die Reihen, aus welchen das allgemeine Integral (14) besteht, sind versehen mit Binomial-Coëfficienten, haben daher gerade wie die Binomialformel die merkwürdige Eigenschaft, abzubrechen, so oft der mit h bezeichnete Differentiationsindex in eine ganze positive Zahl r übergeht. Um dies klar einzusehen, genügt es nicht, zu bemerken, dass die späteren Glieder dieser Reihen, von dem

$$\binom{h_1}{r+1}[1,r+1]x^{k_1-r-1}.W=\binom{h_1}{r+1}W^{(r+1)}x^{k_1-r-1}$$

angefangen, sämmtlich den verschwindenden Faktor $h-r$ haben; es muss auch noch dargethan werden, dass $W^{(r+1)}$, $W^{(r+2)}$, ... keine unendlichen Werthe bekommen. Dies zeigt aber klar die letzte der Bestimmungsgleichungen (11), die zur Bestimmung von $W^{(r+1)}$ dienen soll, aber hierzu nicht verwendet zu werden braucht, weil sie wegen des allen Gliedern zukommenden Faktors $h-r$ in eine identische übergeht.

Schreiten wir jetzt zur Integration derjenigen Differentialgleichung, die auf die (8), deren Coëfficienten vom ersten Grade sind, zunächst kommt, die nämlich mit quadratischen Coëfficienten:

$$(16)\quad (a_nx^2+b_nx+c_n)y^{(n)}+(a_{n-1}x^2+b_{n-1}x+c_{n-1})y^{(n-1)}+\ldots$$
$$\ldots+(a_1x^2+b_1x+c_1)y'+(a_0x^2+b_0x+c_0)y=0.$$

Wir entnehmen auch hier den Vorschriften der Formenlehre einen Genüge leistenden Werth in der Form:

$$(17)\qquad y=\frac{d^h}{du^h}[e^{ux}W]\}_a,$$

und erhalten durch Substitution desselben in die vorliegende Gleichung:

$$\frac{d^h}{du^h}[e^{ux}W(U_2x^2+U_1x+U_0)]\}_a=0,$$

allwo

$$U_2 = a_n u^n + a_{n-1} u^{n-1} + \dots + a_1 u + a_0,$$
$$U_1 = b_n u^n + b_{n-1} u^{n-1} + \dots + b_1 u + b_0,$$
$$U_0 = c_n u^n + c_{n-1} u^{n-1} + \dots + c_1 u + c_0$$

sind. Durch Entwickelung dieses Substitutionsresultates und mit Hilfe der bereits gebrauchten, die Einführung von α anstatt u andeutenden Bezeichnung gelangen wir zur folgenden identischen Gleichung:

$$(18)\quad 0 = e^{\alpha x} \left\{ \begin{aligned} & x^{h+2}.\mathrm{U_2W} \\ & + x^{h+1}[\mathrm{U_1W} + h(\mathrm{U_2W})'] \\ & + x^h[\mathrm{U_0W} + h(\mathrm{U_1W})' + \frac{h(h-1)}{2}(\mathrm{U_2W})''] \\ & + hx^{h-1}[(\mathrm{U_0W})' + \frac{h-1}{2}(\mathrm{U_1W})'' + \frac{(h-1)(h-2)}{2.3}(\mathrm{U_2W})'''] \\ & + \frac{h(h-1)}{2}x^{h-2}[(\mathrm{U_0W})'' + \frac{h-2}{3}(\mathrm{U_1W})''' \\ & \qquad + \frac{(h-2)(h-3)}{3.4}(\mathrm{U_2W})^{IV}] \\ & \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ & + \binom{h}{r-1} x^{h-r+1}[(\mathrm{U_0W})^{(r-1)} + \frac{h-r+1}{r}(\mathrm{U_1W})^{(r)} \\ & \qquad + \frac{(h-r+1)(h-r)}{r(r+1)}(\mathrm{U_2W})^{(r+1)}] \\ & + \binom{h}{r} x^{h-r}[(\mathrm{U_0W})^{(r)} + \frac{h-r}{r+1}(\mathrm{U_1W})^{(r+1)} \\ & \qquad + \frac{(h-r)(h-r-1)}{(r+1)(r+2)}(\mathrm{U_2W})^{(r+2)}] \\ & + \binom{h}{r+1} x^{h-r-1}[(\mathrm{U_0W})^{(r+1)} + \frac{h-r-1}{r+2}(\mathrm{U_1W})^{(r+2)} \\ & \qquad + \frac{(h-r-1)(h-r-2)}{(r+2)(r+3)}(\mathrm{U_2W})^{(r+3)}] \\ & \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \end{aligned} \right.$$

bei der die Coëfficienten der verschiedenen Potenzen von x je für sich der Null gleich sein müssen, die demnach in folgende Bestimmungsgleichungen zerfällt:

$$U_2 W = 0,$$
$$U_1 W + h(U_2 W)' = 0,$$
$$U_0 W + h(U_1 W)' + \frac{h(h-1)}{1.2}(U_2 W)'' = 0,$$
$$(U_0 W)' + \frac{h-1}{2}(U_1 W)'' + \frac{(h-1)(h-2)}{2.3}(U_2 W)''' = 0,$$
$$(U_0 W)'' + \frac{h-2}{3}(U_1 W)''' + \frac{(h-2)(h-3)}{3.4}(U_2 W)^{IV} = 0,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$(U_0 W)^{(r-1)} + \frac{h-r+1}{r}(U_1 W)^{(r)} + \frac{(h-r+1)(h-r)}{r(r+1)}(U_2 W)^{(r+1)} = 0.$$

Der ersten von ihnen kann nur dadurch Genüge geleistet werden, dass man

$$U_2 = a_n \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_1 \alpha + a_0 = 0$$

nimmt, nachdem in Folge des etwa angenommenen $W = 0$ auch W', W'',.... der Null gleich werden würden, was ein Verschwinden von y zur Folge hätte. Die zweite bestimmt dann in der Regel den Werth von h, da sie übergeht in:

$$(19) \qquad U_1 + hU_2' = 0, \text{ woraus } h = -\frac{U_1}{U_2'}$$

folgt. Da nun aber die $U_2 = 0$, als dem $n$ten Grade angehörend, gewöhnlich n von einander verschiedene Wurzeln α_1, α_2, ... α_n besitzt, so lange wenigstens, als a_n nicht Null ist; so hat man, ihnen entsprechend, auch gewöhnlich n von einander verschiedene Werthe von h, die offenbar n verschiedenen partikulären Integralen angehören. Die dritte liefert jetzt W' als einen dem W proportionalen Ausdruck, und zwar:

$$W' = \frac{W}{hU_2'}\left[U_0 + hU_1' + \frac{h(h-1)}{1.2}U_2''\right],$$

und ebenso wird die darauf folgende vierte W'' geben durch W ausgedrückt, die fünfte zu W''' führen; und fassen wir endlich die

$$(U_0 W)^{(r-1)} + \frac{h-r+1}{r}(U_1 W)^{(r)} + \frac{(h-r+1)(h-r)}{r(r+1)}(U_2 W)^{(r+1)} = 0$$

in's Auge, bemerkend, dass die höchsten in derselben vorkommenden Differentialquotienten von W, nämlich $W^{(r)}$ und $W^{(r+1)}$, beziehlich multiplicirt erscheinen mit:

$$\frac{h-r+1}{r}\left[(h-r)U_2'+U_1\right] \text{ und } \frac{(h-r+1)(h-r)}{r(r-1)}U_2,$$

Faktoren, von welchen der erste der (19) zufolge gleich $-(h-r+1)U_2'$, der zweite aber gleich Null ist; so sehen wir, dass sie, die die $(r+2)$te an der Zahl ist, zu dem Werthe von $W^{(r)}$ führe, und dies zwar vermittelst einer Division durch $(h-r+1)U_2'$. Da dem zufolge die W', W'', W''',.... eine ähnliche Division durch hU_2', $(h-1)U_2'$, $(h-2)U_2'$,.... erheischen, so erscheinen offenbar die Werthe dieser Grössen in Bruchform, und es enthält allgemein der von $W^{(r)}$ den Nenner:

$$h(h-1)(h-2)\dots(h-r+1)U_2'^r,$$

der in der Regel von der Null verschieden ist, woraus dann folgt, dass der Werth von $W^{(r)}$ ein endlicher sei. Die Formeln, die sich früher für eine Differentialgleichung mit Coëfficienten, wie $ax+b$, ergeben haben, bestehen also ungeändert auch hier, nur werden die Werthe von W', W'', ... andere, durch andere Gleichungen gegebene:

$$W'=\frac{W}{2hU_2'^3}\left[2U_0U_2'^2-2U_1U_1'U_2'+U_1U_2'U_2''+U_1^2U_2''\right],$$

$$\begin{aligned}W''=\frac{W}{12.h(h-1)U_2'^6}\Big[\; & U_2'^5(U_0'-3U_1''+2U_2''') \\ & +U_2'^4(12U_0^2-12U_0U_1'+12U_0U_2''-3U_1U_1'' \\ & \qquad +3U_1U_2''') \\ & +U_2'^3(-24U_0U_1U_1'+24U_0U_1U_2''+12U_1U_1'^2 \\ & \qquad -18U_1U_1'U_2''+6U_1U_2''^2+U_1^2U_2''') \\ & +U_2'^2(12U_0U_1^2U_2''+12U_1^2U_1'^2 \\ & \qquad -30U_1^2U_1'U_2''+15U_1^2U_2''^2) \\ & +U_2'(-12U_1^3U_1'U_2''+12U_1^3U_2''^2) \\ & \qquad +3U_1^4U_2''^2\Big],\end{aligned}$$

Auch diese Formeln sehen eben nicht sehr geschmeidig aus, und doch lässt sich das allgemeine Gesetz ihrer independenten Bildung angeben, was wir aber hier aus den bereits erwähnten Gründen unterlassen. Ebenso verzichten wir auf die Erörterung

der Ausnahmsfälle, in denen man kein allgemeines Integral mit n Constanten bekommt, und fügen nur noch die Bemerkung bei, dass auch hier die partikulären Integrale in geschlossene Ausdrücke übergehen können, wenn h gleich einer ganzen Zahl r wird, nur ist hiezu noch das Stattfinden einer ferneren Bedingungsgleichung nebst der ganzen Beschaffenheit des r nothwendig. Diese ist:

$$(U_0 W)^{(r)} = 0,$$

wie man sich durch unmittelbare Ansicht des in asymptotischer Form aufgestellten Gleichungspolynoms (18) ohne Mühe überzeugen kann. Es ist nicht schwer, diese Integrationsmethode auszudehnen auf Differentialgleichungen mit cubischen, biquadratischen und höher gebauten Coëfficienten. Man begegnet überall denselben Erscheinungen und kommt so zu sagen an geschlossenen Formeln vorüber, wenn der Differentiationsindex h eine ganze Zahl ist, und wenn noch nebst den Bedingungsgleichungen beziehlich zwei, drei und mehr an der Zahl erfüllt sind. Das Integriren jedoch ist nur ein Bestandtheil der Diskussion, ein Mittel zur Erörterung der Eigenschaften des Integrales und reicht zu diesem letzteren einzig rationellen Zwecke nicht immer zu. Es darf dies nicht Wunder nehmen, da es mit der Diskussion der algebraischen Gleichungen zwischen zwei Veränderlichen y und x ja genau dieselbe Bewandtniss hat. Man denke nur an eine Gleichung des zweiten Grades zwischen diesen Variabeln. Wie leicht ist da das Auflösen, aber wie wenig lehrt es über den zwischen ihnen bestehenden Zusammenhang. Diskutirt man hingegen eine solche Gleichung, d. h. legt man sich ihre Genüge leistenden Werthe gehörig geometrisch als Linien der zweiten Ordnung construirt vor, so wird man, um diesen Zweck zu erreichen, zu gar mannigfachen analytischen Kunstgriffen zu greifen genöthigt sein, die von einer Gleichungs-Auflösung gänzlich verschieden sind, wird aber auch den klarsten und vollständigsten möglichen Aufschluss über die Beschaffenheit der Genüge leistenden Werthe errungen haben. Es erklärt sich hiermit auch unter Anderm, warum höchst selten die in einer einzigen Form durchgeführte Integration einer Differentialgleichung ganz und gar zum Ziele führt und in den meisten Fällen das Integriren in verschiedenen Formen benöthigt wird. Wir fügen hier noch als Beispiel bei die Integration einer sehr einfachen Differentialgleichung in asymptotischer Form, nämlich der:

$$xy'' - 2ay' - b^2xy = 0,$$

wo man sich allenfalls mit dem asymptotischen Integrale allein begnügen kann. Es sind hier die Coëfficienten vom ersten Grade, und man hat:

$$U_0 = -2au, \quad U_1 = u^2 - b^2,$$

also die zur Bestimmung von α dienende Gleichung:

$$U_1 = \alpha^2 - b^2 = 0.$$

Sie bietet die Wurzeln $\alpha_1 = b$, $\alpha_2 = -b$. Zu beiden gehört ein und derselbe Werth von h, nämlich:

$$h = -\frac{U_0}{U_1'} = a.$$

Wir haben also zwei partikuläre Integrale zu gewärtigen, die beziehlich die zwei Exponentialgrössen e^{bx} und e^{-bx} zu Faktoren besitzen; der andere Faktor fängt in beiden mit dem Gliede x^a an, und ist geschlossen, so oft a in eine ganze positive Zahl übergeht. Da man hier

$$U_1' = 2u, \quad U_1'' = 2, \quad U_0' = -2a,$$

die übrigen Differentialquotienten aber gleich Null hat, so vereinfachen sich die zur Bestimmung von W', W'',.... dienenden Gleichungen und gehen über in:

$$W' = \mp\frac{a(a+1)}{2b}, \quad W'' = \frac{a(a+1)(a-1)(a+2)}{2.2^2.b^2},$$

$$W''' = \mp\frac{a(a+1)(a-1)(a+2)(a-2)(a+3)}{2.3.2^3.b^3}, \ldots.$$

Das gesuchte allgemeine Integral ist also:

$$y = C_1 e^{bx}\left\{x^a - \frac{a(a+1)}{2b}x^{a-1} + \frac{a(a+1)(a-1)(a+2)}{2.2^2.b^2}x^{a-2} - \frac{a(a+1)(a-1)(a+2)(a-2)(a+3)}{2.3.2^3.b^3}x^{a-3} + \ldots\right\}$$

$$+ C_2 e^{-bx}\left\{x^a + \frac{a(a+1)}{2b}x^{a-1} + \frac{a(a+1)(a-1)(a+2)}{2.2^2.b^2}x^{a-2} + \frac{a(a+1)(a-1)(a+2)(a-2)(a+3)}{2.3.2^3.b^3}x^{a-3} + \ldots\right\}$$

und die darin ersichtlichen absteigenden Reihen besitzen, wie der Anblick ihrer Coëfficienten lehrt, die Eigenschaft, jedesmal von selbst abzubrechen, so oft *n* in eine ganze, gleichgültig ob positive oder negative, Zahl übergeht.

Auch diese Integrationsmethode, die wichtigste von allen, ist daher so ungemein einfach, dass es Wunder nehmen könnte, wie sie bisher unentdeckt geblieben ist, wenn man nicht wüsste, dass mit dem Integriren nur in den seltensten Fällen Alles gethan sei und dass noch Manches zu thun übrig bleibe, um zu einer vollständigen Kenntniss des Integrales zu gelangen, so zwar, dass es geometrisch construirt vor die Augen des Geistes tritt. Demungeachtet bleibt aber das Integriren, und vorzüglich das in der asymptotischen Form, ein sehr wesentlicher Bestandtheil der Diskussion, und man sieht kein Hinderniss, die hier vorgetragene Methode desselben in die Lehrbücher der Wissenschaft aufzunehmen, nur darf man dabei nicht zu weit gehen, die höchste mathematische Strenge und Vollständigkeit beanstrebend, weil man dann unfehlbar wieder zu einem ganzen Buche gelangt.

Die übrigen zwei Integrations-Methoden bringe ein späterer Artikel.

XVIII.

Die Macht der Arbeit. Vortrag gehalten bei der feierlichen Sitzung der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften am 30. Mai 1855 von Seiner Excellenz dem Herrn Präsidenten der Akademie

Dr. *Andr.* Freih. *v. Baumgartner* *).

Ich habe mir die Aufgabe gestellt, heute über die Macht der Arbeit zu sprechen.

Als der Philosoph Anaxagoras von einem seiner Landsleute gefragt wurde, warum er sich nicht mehr um sein Vaterland bekümmere, deutete er gegen den Himmel und sagte: Ich sorge für nichts anderes. Sollten Sie mich fragen, warum ich zu meinem heutigen Vortrage nicht ein rein wissenschaftliches Thema gewählt habe, wie dieses die Bestimmung der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, in deren Namen ich spreche, zu erfordern scheint, so könnte ich nicht so kurz antworten, wie der griechische Weltweise; ich würde aber ungefähr Folgendes erwidern: Ich verstehe unter Arbeit nicht blos körperliche Anstrengung, sondern jede auf einen bestimmten Zweck gerichtete, absichtliche Kraft-

---

*) Wenn diese Rede des hochverehrten Präsidenten der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien, Sr. Excellenz des Herrn Ministers v. Baumgartner, auch nicht ausschliesslich mathematischen und physikalischen Inhalts ist, so enthält dieselbe doch, eben so wie die in Thl. XXV. S. 57. mitgetheilte Rede dieses trefflichen Physikers „über den Zufall in den Naturwissenschaften", eine so grosse Menge überaus interessanter naturwissenschaftlicher Notizen, namentlich auch aus dem Gebiete der Mechanik u. s. w., die auch bei'm Unterrichte zu dessen Belebung höchst zweckmässig Anwendung finden können, dass ich es mir nicht versagen kann, auch diese ausgezeichnete Rede aus dem Almanach der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. Jahrgang 1856. den Lesern des Archivs mitzutheilen.

G.

äusserung, sowohl des Körpers, als des Geistes, mithin auch jene, welcher Künste und Wissenschaften ihren Ursprung verdanken. Ich gehe von der Ansicht aus, dass schon der vereinzelte Mensch, um so mehr aber der Bürger eines Staates, sowohl für die physische, als moralische Wohlfahrt seiner selbst und seiner Mitmenschen zu sorgen verpflichtet sei, da er vermöge seiner Natur Bürger zweier Welten ist, die durch ein geheimnissvolles Band zu einem Ganzen, dem Weltall, verbunden sind. Die Wissenschaft hängt mit ihrer Anwendung auf das Leben so innig zusammen, wie die Seele des Menschen mit seinem Leibe. „Die Wissenschaft", sagt Baco von Verulam, „ist den Gewässern gleich. Einige Gewässer fallen vom Himmel herab, andere fliessen aus der Erde." — Was von diesem meinem Vortrage der Wissenschaft angehört, fällt in das Bereich der letzteren Classe. Dabei hege ich aber nicht die verwegene Hoffnung, die Wissenschaft wesentlich zu fördern oder aufzuklären; ich setze mir ein viel bescheideneres Ziel. In den norwegischen Gebirgen, wo Wege und Stege fehlen und weit von einander abstehende Steinhaufen den Wanderer leiten, ist es gewöhnlich, dass jeder Reisende diesen Wegzeigern im Vorbeigehen einen Stein beifügt. Ein solches Steinchen mag mein Vortrag für solche sein, die sich im Gebiete der Volks- und Staatswirthschaft ergehen wollen.

Der Schöpfer hat ein bestimmtes Maass productiver, nach den Gesetzen der Nothwendigkeit wirkender Kräfte in die Natur gelegt, die seine folgsamen Diener und die getreuen Vollstrecker seiner Befehle sind. Das Quantum dieser Kräfte ist gegeben und kann weder vermehrt noch vermindert werden; nichts kann sie bestimmen, von den ewigen Gesetzen ihrer Wirksamkeit abzuweichen. Was sie nun nach dem freien Laufe der Natur hervorbringen, heisst Naturproduct. Während der körperliche Organismus des Menschen diesen Kräften unterthan ist, steht der menschliche Geist ausser deren Bereich, er kann eine dieser Kräfte in eine andere umwandeln, ihre Wirksamkeit, wenn er sie auf ein grösseres oder geringeres Zeitmaass bringt, steigern oder schwächen und auf solche Weise nach seinen Zwecken und Absichten lenken. Dieser Eingriff des Menschen in den Gang der Natur ist Arbeit im ökonomischen Sinne des Wortes, und das hierdurch erzielte Erzeugniss Product der Arbeitskraft. Selbst die willkürlichen Thätigkeiten der Thiere sind in dieser Bedeutung nur in so fern Arbeit, als sie von menschlichem Einflusse gelenkt werden. Ohne Mithilfe der Naturkräfte gibt es daher keine Arbeit. Nicht blos an allen willkürlichen und unwillkürlichen Bewegungen, sondern auch an den geistreichsten Gedanken des Menschen, an

seinen höchsten Ideen und seinen blühendsten Phantasien haben die Naturkräfte, wenn auch nur als untergeordnete Werkzeuge, ihren Antheil, und der Mensch ist ihrer nur dann fähig, wenn seinem Geiste die entsprechenden Organe des Körpers zu Gebote stehen.

Die Naturkräfte allein gewähren dem Menschen nicht die zu seiner würdigen Existenz, noch weniger die zu seiner geistigen Entwickelung nöthigen Bedingungen. Schon bei seinem Eintritte in die Welt bedarf er der Hilfe seiner Mitgeschöpfe und fremder Arbeit. „Wir werden," sagt J. J. Rousseau, „schwach geboren und brauchen Kraft, wir werden von Allem entblösst geboren und brauchen Beistand, wir werden dumm geboren und brauchen Urtheilskraft. Alles, was wir bei unserer Geburt nicht haben und was wir benöthigen, wenn wir erwachsen sind, wird uns durch die Erziehung gegeben." Man mag aber den Menschen mit aller möglichen Sorgfalt erziehen, so verwildert er doch wieder, wenn er den blossen Naturkräften überlassen ist. Will er nämlich nur von den freiwilligen Gaben der Natur leben, so muss er Jäger oder Fischer sein. Aber auch da kann er der Arbeit nicht ganz entbehren. Die Natur hat nämlich nur von jenem Stoffe einen unerschöpflichen, allenthalben verbreiteten Vorrath geschaffen, den wir zur Unterhaltung des Lebensprocesses ohne Unterlass aufnehmen müssen und bei dem es nicht genügt, bestimmte Mahlzeiten zu halten, nämlich von der atmosphärischen Luft, und nur bei dieser ist der Act der Besitznahme, nämlich das Athemholen, zugleich der Anfang der Consumtion. Alle übrige Nothdurft muss er erst aufsuchen und oft nicht ohne Anstrengung sein Eigen machen. Er braucht aber als Fischer oder Jäger zu seinem Unterhalte ein unverhältnissmässig grosses Terrain, muss daher jeden Andern davon ausschliessen, und es ist ihm Selbstsucht gleichsam zur Nothwendigkeit geworden; er sieht in jedem Mitmenschen einen Dürftigen, wie er es selbst ist, den er nur mit Gewalt vertreiben kann. Er kann sich nur für den Augenblick versorgen und lebt daher in steter Furcht vor Mangel. Jeden, der mehr besitzt als er, findet er reich und beneidenswerth und Missgunst schlägt in ihm Wurzel; selbst an Weib und Kind sieht er Wesen, die seine Armuth vermehren. Nur wenn er aufhört, Jagd und Fischfang als die einzigen Quellen seiner Subsistenz anzusehen und zur Viehzucht übergeht, können seine Sitten milder werden; es fällt ihm aber ein grösseres Maass von Arbeit zu. Er hat nun nicht mehr blos Bogen und Pfeile zu verfertigen oder Netze zu stricken, er muss dauernd für die Erhaltung seiner Thiere sorgen, er findet aber an denselben Wesen, deren Erhal-

tung ihm am Herzen liegen muss, und ist bleibender Eigenthümer geworden. Doch hat er keinen bleibenden Wohnsitz und darum auch keine gesicherte Existenz. Um diese zu erlangen, muss er zum Ackerbau übergehen. Da benützt er die Naturkräfte in höherem Grade als im Zustande des Nomadenlebens, seine Arbeit wird regelmässiger vertheilt und lohnender, er findet vielfachere Veranlassung zur geistigen Thätigkeit und hat für solche einen grösseren Spielraum. Diese Vorzüge des Landbaues werden schon vom schlichtesten Verstande erkannt. In dieser Beziehung ist eine Anrede merkwürdig, die ein Häuptling eines amerikanischen Stammes, der Missisaes, an seine Landsleute hielt. „Seht ihr nicht", sagte er, „dass die Weissen von Körnern, wir aber vom Fleisch leben, dass das Fleisch mehr als 30 Monden braucht, um heranzuwachsen, und oft selten ist; dass jedes jener wunderbaren Körner, die sie in die Erde streuen, ihnen mehr als hundertfältig wiedergegeben wird; dass das Fleisch, wovon wir leben, vier Beine hat zum Fortlaufen, wir aber deren nur zwei besitzen, um es zu verfolgen; dass die Körner da, wo die weissen Männer sie hinsäen, bleiben und wachsen, dass der Winter für uns die Zeit der mühsamen Jagden, ihnen die Zeit der Ruhe ist."

Durch Arbeit kann der Mensch die Ungunst der Natur mildern und die Segnungen derselben erhöhen. Deutschland war zu Tacitus Zeiten mit Morästen und Waldungen bedeckt, sein Klima war rauh, unwirthlich, die Einwohner wohnten in Hütten von Holz oder Stroh, im Winter in Erdhöhlen, sie hatten nur Hafergrütze zur gewöhnlichen Nahrung und man kannte keine anderen Getreidearten als Hafer und Gerste. Fleiss hat die Wälder gelichtet, die Moräste ausgetrocknet, den Boden der belebenden Kraft des Lichtes und der Wärme eröffnet und ihn für fremde, an günstigere Verhältnisse gewohnte Gewächse geeignet gemacht. Man hat den Roggen vom Kaukasus, den Weinstock und den Weizen von Italien, die Kartoffel, den Mais und die Tabakspflanze von Amerika, die Hirse von Ostindien, das Heidekorn von der Türkei dahin verpflanzt, und die Natur hat diese Fremdlinge wie ihre eigenen Kinder aufgenommen und genährt. Selbst dem vom Klima so sehr begünstigten Italien musste der Reis aus Ostindien, der Maulbeerbaum aus China, selbst der Weinstock aus Asien zugeführt werden, es hatte nicht von Natur aus die Apfelsine, die Pomeranze, die Citrone und den Cedrat, und es war sonach Italien nicht von Natur aus das Land, wo die Citronen blühn und wo im dunklen Laub die Goldorangen glühn. Der Kaffeebaum, der gegenwärtig jährlich gegen 600 Millionen Pfund Bohnen liefert und Millionen Menschen eine gesunde und feine Nahrung gewährt,

war ursprünglich blos in den südlich von Abyssinien gelegenen Ländern zu Hause, wo er auch noch jetzt wild wachsend angetroffen wird. Menschlicher Fleiss hat ihn aber nach Arabien und später nach Westindien, Brasilien und Java verpflanzt. Es verdient bemerkt zu werden, dass wahrscheinlich alle in Westindien und Brasilien wachsenden Kaffeebäume von einem einzigen Individuum abstammen, das in Frankreich aus Samen gezogen und im Jahre 1717 von Declieux, nicht ohne Opfer, nach Martinique gebracht worden; denn Declieux musste seine ihm bei der langen und mühevollen Ueberfahrt karg zugemessene Wasserportion mit dem Bäumchen theilen, um es bei Leben zu erhalten.

Was hier von den Leistungen der Arbeit in Bezug auf nutzbare Pflanzen gesagt ist, lässt sich auch bezüglich nützlicher Thiere behaupten. Ein recht schlagendes Beispiel gibt uns Neuholland. Dort scheint es sich die Natur zur Aufgabe gemacht zu haben, recht bizarr zu erscheinen. Das Land hat von Natur aus Vögel ohne Flügel mit Haaren statt der Federn, vierfüssige Thiere mit einem Schnabel, schwarze Schwäne, weisse Adler, Kuckuks die bei Nacht, Eulen die bei Tage schreien, es fehlen ihm aber alle zahmen Hausthiere mit Ausnahme des Schweines und des Hundes, und es war den Europäern überlassen, Pferde, Rinder, Ziegen und Schafe dahin zu bringen, die daselbst auch trefflich gedeihen. Als die ersten Pferde daselbst anlangten, nannten sie die Einwohner Schweine, auf denen man reiten kann.

Die Kunst, wie man oft die Arbeit im Gegensatze zur Natur nennt, hat nicht blos Länder mit Pflanzen und Thieren versehen, die ihnen von Hause aus fremd waren, sondern dieselben auch veredelt und fruchtbarer gemacht. Nicht ohne tiefen Sinn nennt man daher auch jede auf Veredlung ausgehende Arbeit Cultur. Hätte man den wilden Apfelbaum der Natur allein überlassen, so würden wir nur herbe, kleine und unansehnliche Aepfel kennen; die Cultur hat uns mit 1400 bis 1500 Arten edler, von jenem Wildling ausgegangenen Arten bereichert. Auf demselben Wege erhielten wir über 1300 edle Birnensorten und über 400 Sorten Kirschen. Noch vor 50 Jahren kannte man nur die einfache Georgine, jetzt besitzen wir 1500 gefüllte Abarten. Wie vielerlei Traubensorten der Weinstock trägt, ist bekannt. Die Cultur hat ihn aber nicht blos veredelt, sondern auch zu einem grösseren Ertrag gebracht. Audibert erwähnt eines Weinstockes, der zu 350 Flaschen Wein die Trauben trug. Ein Weinstock im königlichen Garten zu Hampton-Court füllt ein ganzes grosses Triebhaus aus und trägt so viel Trauben, dass, als Georg III. einst den Schauspielern im Drury-Lane-Theater 1200 Dutzend

davon abzuschneiden erlaubte, falls deren so viele vorhanden wären, der Gärtner erklärte, man könne noch einmal so viele abschneiden, ohne den Stock ganz zu entblössen.

Von Natur aus gibt es keine zahmen Hausthiere, alle diese stammen von gezähmten Wildfängen. Die Kunst hat den mastfähigen Ochsen geschaffen und ihn gezwungen, dem Menschen seine Kraft zu widmen; durch Einwirkung auf den Wolf und Schakal sollen die zahlreichen Racen von Hunden entstanden sein, aus dem wilden Pferde ist der feuerige Araber und der schwerfällige Normane mit allen Zwischenracen, aus dem Bauernschafe ist das feinwollige Merinoschaf hervorgegangen.

Ohne Arbeit erwächst für den Menschen selbst bei dem günstigsten Klima nicht jener Zustand der Civilisation und geistiger Entwickelung, der seiner Bestimmung entspricht. Wenige Gegenden der Welt haben ein so günstiges Klima und so grosse Fruchtbarkeit wie die Südsee-Inseln. Da gibt es ganze Wälder von wildwachsenden Kokospalmen, die dem Menschen Nahrung und Brennstoff gewähren; mit wenig Mühe pflanzt man Pisangs, die 133mal so viel Nahrung liefern, als Weizen auf gleich grosser Area, und von denen ein kleiner Garten hinreicht, um eine Familie zu ernähren; es gedeiht dort der Brodbaum, der alle 8—9 Monate Früchte trägt, die auf einem heissen Steine gebacken wie Weizenbrod schmecken. „Wer“, sagt Cook, „in seinem Leben zehn Brodbäume pflanzt, erfüllt die Pflicht gegen seine Familie eben so gut, wie bei uns ein Bauer, der jedes Jahr pflügt, säet, erntet und drischt.“ Ja man holt sich in diesen Ländern Brodfrucht aus dem Walde eben so, wie man bei uns nach Holz ausgeht. Der dort wachsende Sagobaum enthält nämlich in seinem Marke 300 bis 600 Pfund nahrhaftes Mehl; man braucht ihn nur umzuschlagen, in Stücke zu zerschneiden und das Mark herauszukratzen. Unter diesen glücklichen physischen Verhältnissen leben nun auf den Südsee-Inseln zwei an Civilisation und Bildungsfähigkeit sehr weit von einander abstehende Urstämme, die Malayen und die Papuas. Bei ersteren fanden die Europäer zur Zeit ihres ersten Besuches schon einige Cultur, dieselben trieben Ackerbau, hatten künstliche Bewässerungen und einige Industrie, und es offenbarte sich schon an ihren Zeugen und Geräthschaften und besonders an ihren Booten einiger Geschmack; sie wohnten in Dörfern und hatten schon moralische und religiöse Begriffe. Gegenwärtig haben viele derselben bereits europäische Sitten angenommen, kleiden sich europäisch und wohnen in gut gebauten Häusern. Die dem Stamme der Papuas Angehörigen aber gehen noch jetzt nackt oder höchstens in Thierfelle gekleidet,

nähren sich von Fischen oder Kängurubs und verzehren alles roh, sie rupfen einem Vogel kaum die Federn aus, bevor sie ihn verzehren. Mehrere essen sogar das Fleisch ihrer erschlagenen Feinde, ja sie erschlagen Menschen blos, um sie aufzehren zu können. Noch im Jahre 1845 brachten die Bewohner der Salomonsinseln den Missionären ein Kind zum Verkaufe und empfahlen ihr Anbot durch die Versicherung, es sei gut zu essen. Der König Nicaiki der Fortunainsel soll nicht weniger als 1000 Menschen aufgezehrt haben.

Nachdem ich nun gezeigt habe, wie die Menschen durch Arbeit in der Civilisation und im Wohlstande fortschreiten, will ich auch durch Beispiele darthun, wie man durch Aufgeben der Arbeit vom Zustande einer selbst hoch entwickelten Bildung in Rohheit und Dürftigkeit zurücksinken kann. Aegypten war im Alterthum der Sitz der höchsten Cultur, es nährte zwölf Millionen Einwohner und hatte noch Ueberfluss zur Ausfuhr; Rom nannte es eine seiner Kornkammern. Die Juden, welche sich im eigenen Lande nur langsam vermehrten, nahmen in diesen fruchtbaren Gegenden so rasch zu, dass sich ihre Zahl alle 15 Jahre verdoppelte. Dabei hatte man Gewerbe, eine sehr hoch entwickelte Baukunst, und selbst Wissenschaften wurden mit Sorgfalt gepflegt. Das Land war aber, wie uns Herodot erzählt, nur durch ungeheure Anstrengungen bewohnbar gemacht. Sein Segen beruhte auf den Ueberschwemmungen des Nils. Man musste ein ausgedehntes Canalsystem anlegen, kolossale Dämme bauen, zahlreiche Schleussen unterhalten, um dem Lande das Wasser gehörig zuzuleiten und es wieder zu rechter Zeit trocken zu legen; man musste es gegen den eindringenden Wüstensand schützen und sogar Mauern bauen, um feindliche Horden abzuhalten. Die Natur ist zwar in Aegypten noch immer dieselbe, der Nil tritt noch alljährlich aus, man braucht auch jetzt nur den Samen in den zurückgebliebenen Schlamm zu streuen und ihn der belebenden Kraft der Sonne zu überlassen; es gilt von diesem Lande noch immer, was der Eroberer desselben, Amru (640 n. Chr.), an den Kalifen Omar schrieb: „Aegypten ist erst ein ungeheures Staubfeld, dann ein Süsswassermeer, dann ein Blumenbeet.“ Allein es fehlt an hinreichenden arbeitenden Händen, da die Bevölkerung auf zwei und eine halbe Million herabgesunken ist, ein Theil der Canäle ist verschlämmt, ein Theil der Dämme verfallen, mehrere Schleussen sind verschwunden, der Wüstensand dringt immer weiter vor und ein Theil des sonst fruchtbarsten Landes ist in eine Wüste verwandelt. Zwar hat sich der Zustand dieses Landes in neuerer Zeit etwas gebessert, da man fremde Kräfte dahin gezogen und manche

Arbeit wieder aufgenommen hat; allein noch immer ist es gegen die frühere Zeit der Blüthe in einem Zustande der Armuth und Verwilderung.

Ein noch traurigeres Bild stellen uns die westasiatischen Länder vor Augen. Dort standen einst Babylon, Ninive, Ecbatana mit ihren ungeheuren Bauwerken, ihren Tempeln, Palästen, Bädern und Gärten, dort blühten einst Industrie und Handel; grossartige Canäle, Dämme und Wasserbauten der künstlichsten Art führten dem von Natur trockenen, aber zeitweiligen Ueberschwemmungen ausgesetzten Lande das Wasser des Euphrat und Tigris zu und schützten es wieder vor Ueberschwemmungen. Eine riesenhafte Mauer trennte zwei Reiche von einander und hielt den Einfall feindlicher Horden ab. Jetzt bezeichnen nur mehr Ruinen den Ort, wo die Städte gestanden; die Canäle sind versandet, die Dämme verfallen, von Kunstbauten ist keine Spur übrig; der Euphrat, welcher sonst mitten durch Babylon floss, ist schon unterhalb der Stelle, wo diese Stadt stand, versandet, die Menschen, die Industrie und der Handel sind verschwunden und es finden dort nur mehr schwärmende Kurden mit ihren Herden sparsame Nahrung.

Der Ackerbau steht noch unter dem überwiegenden Einflusse der Naturkräfte, und die Arbeit, so segenvoll auch da ihre Wirkungen sind, spielt dabei doch nur eine untergeordnete Rolle. Bei der gewerblichen Industrie und dem Handel gewinnt aber die Arbeit das Uebergewicht. Ackerbau kann man nur, wenn er diesen Namen verdienen soll, im offenen Felde treiben, Gewerbsindustrie oder Industrie schlechtweg, wie ich erstere im Folgenden stets nennen werde, gestattet zu ihrer Ausübung geschlossene Räume. Der Landwirth hängt von jenem Maasse des Lichtes und der Wärme ab, das ihm Witterung und Klima gewähren, der Industrielle erleuchtet und erwärmt seine Werkstätten künstlich in dem Grade, als er dieses bedarf. Luft und Feuchtigkeit wirken auf Felder und Wiesen, wie es der Lauf der Natur mit sich bringt, aber in industriellen Werkstätten schafft man sich künstlich Trockenheit und Nässe, selbst für einzelne Zwecke künstliche Gas-Atmosphären und luftleere Räume.

Der Landwirth kann wohl Vieles thun, um den Ertrag seiner Gärten, Aecker, Wiesen- und Wälder zu erhöhen, das Schicksal des Industriellen liegt hingegen fast ganz in seiner Einsicht, seinem Fleisse und seinen Capitalkräften. Beide bedürfen zwar der Consumenten als Abnehmer, doch sind diese dem Industriellen unentbehrlicher als dem Landbebauer, daher denn auch nur jene Länder einer dauernden und starken Erschütterungen nicht aus-

gesetzten Wohlfahrt sich erfreuen, in denen Ackerbau und Industrie Hand in Hand gehen und jeder Zweig am anderen einen sicheren Abnehmer findet. Belgien scheint in Europa das Land zu sein, wo diese beiden Kräfte am besten ausgeglichen sind; daher es auch auf jeder Quadratmeile seines Bodens 8200 Menschen nährt und an den Fortschritten in allen Zweigen der Cultur höchst ehrenvollen Antheil nimmt.

Die beiden Hauptbeschäftigungen des cultivirten Menschen, die Industrie und der Ackerbau, gleichen einem durch menschliche Arbeit errichteten kolossalen Gebäude, jedoch die Industrie einem aus künstlich bearbeiteten Bausteinen und künstlichem Mörtel erbauten, der Ackerbau einem solchen, das aus rohem Materiale errichtet ist; den Stoff zu beiden hat die Natur geliefert. Es wäre interessant, Plan und Ausführung in Bezug auf beide Gebäude näher zu besprechen; allein dieses könnte nur in einem bändereichen Werke geschehen. Hier beschränke ich mich auf einiges Wenige bezüglich der industriellen Vorgänge und ihrer Wirkung.

In der Industrie sieht man recht deutlich, wie der Mensch der Natur seine eigenen Zwecke unterschiebt und sie zwingt, durch ihre Kraft seine Absichten zu fördern. Der Stamm der Bäume ist von Natur aus mit eigenen röhrenförmigen Gefässen ausgestattet, mittelst welcher er aus dem Boden die Flüssigkeiten aufsaugt, die ihn nähren und in seine Substanz übergehen. Wird ein Baum umgeschlagen, so ist der im Holze enthaltene Nahrungssaft die Hauptveranlassung zur Fäulniss. Man substituirt nun dem Nahrungssafte eine passende Salzauflösung und die getäuschte Natur des Baumes nimmt sie eben so willig auf, wie den wirklichen Nahrungsstoff. Diese Salzauflösung widersteht aber der Fäulniss, und ein so behandelter Baum gibt ein zu gewissen Zwecken viel dauerhafteres Holz.

Die Sonne sendet der Erde Wärmestrahlen zu, um den Organismen daselbst eine der wichtigsten Lebensbedingungen zu gewähren, dann um das Wasser, das ohne Unterlass dem Meere zuströmt, in Dunst zu verwandeln, damit es wieder als Regen den Ländern zurückgegeben werde, aus denen es gekommen ist. Daraus zieht man aber Nutzen zur Erzeugung von Seesalz. Indem man Seewasser in flache Behälter leitet und die Sonnenwärme darauf wirken lässt, setzt sich nach Verdunstung des Wassers der Salzgehalt ab. In Sicilien gewinnt man auf solche Weise gegen $1\frac{1}{2}$ Million Centner Seesalz.

Es gibt Kräfte in der Natur, die sich feindlich gegenüber stehen und sich in ihren Wirkungen aufheben. Diesen Zwiespalt

der Natur hat der industrielle Mensch nicht unbenützt gelassen. So z. B. bedient man sich der farbenzerstörenden Kraft des Chlors zum Bleichen, Einätzen von Mustern in gefärbte Stoffe u. s. w.

Menschen und Thiere haben ein bestimmtes Maass physischer Kräfte, die aber weder mit der allen vorkommenden Zwecken entsprechenden Geschwindigkeit wirken noch alle erforderlichen Bewegungen hervorbringen können. Es mussten also Vorrichtungen erfunden werden, welche geeignet sind, die nöthigen Modificationen solcher Art hervorzubringen. Dieses ist nun bereits in vielfacher Beziehung geschehen. Ein Mann kann mit freier Hand nur einen Druck von etwa 90 Pfd. ausüben; aber mit der Bramah'schen Presse ist er im Stande, einen Balken von 1 Fuss Dicke und 2 Fuss Länge oder eine 6 Zoll dicke Eisenplatte abzudrücken, wozu eine Kraft von circa 1500 Centner erfordert wird. Ein Mann hebt in einer Secunde 87 Pfd. 1 Fuss hoch, hält aber dabei mit den nöthigen Unterbrechungen nur drei Stunden im Tage aus. Sein mechanisches Moment ist daher $87 \times 3 = 261$. Mittelst eines Hornhaspels hebt er aber 26 Pfd. in einer Secunde $3\frac{1}{2}$ Fuss hoch und kann des Tages 10 Stunden arbeiten. Sein Moment ist daher $26 \times 3\frac{1}{2} \times 10 = 910$, also $3\frac{1}{2}$mal grösser. Ein Pferd trägt in einem Tage von 8 Arbeitsstunden 150 Pfd. 5 Meilen oder 20,000 Klafter weit; mittelst eines Wagens zieht es aber auf gewöhnlicher guter Strasse 12 Centner in einem Tage von 8 Arbeitsstunden 3 Meilen oder 12,000 Klafter weit; letztere Leistung ist daher 4·8mal grösser als erstere.

Maschinen, das Erzeugniss menschlicher Arbeit, machen sogar die physische Kraft des Menschen ganz entbehrlich und es bleibt dem Menschen nur das würdigere Geschäft der Aufsicht und Leitung. Wir sehen Maschinen, die hämmern und walzen, sägen und bohren, hobeln und drechseln, prägen und nieten, spinnen und weben, sticken und klöppeln, Nägel und Ketten machen, Nadeln und Stifte erzeugen, Bücher drucken und Münzen prägen, ohne eine andere Kraft als die des Wassers oder Dampfes zu bedürfen. Ihre Leistungen gehen in's Fabelhafte. Ein Dampfhammer kann mit einer Kraft von 12,000 Pfd., einer Fallhöhe von 6 Fuss in einer Minute bis 200 Schläge machen. Ein Mann kann mit einer Handzugrahme nur eine Last von 48 Pfd. in einer Secunde 1 Fuss hoch heben und täglich 5 Stunden arbeiten. 2000 Menschen richten daher kaum so viel aus, als ein einziges Dampfschlagwerk. Eine von Wasser oder Dampf bewegte Kreissäge schneidet in 9 Zoll dickem Eichenholz stündlich 120 Quadratfuss, eine Leistung, die jener von 24 Männern mit Handsägen gleichkommt. Man hat auf $30\frac{1}{2}$ Millionen Spindeln mit etwa 600,000

Arbeitern über 900 Millionen Pfd. Garn erzeugt, ein Quantum, zu dessen Production mittelst Handspinnen etwa 30 Millionen Spinner nöthig gewesen wären. Mittelst der von Heathcothe erfundenen Tüllmaschine kann ein Arbeiter in einer Stunde wenigstens 6 Quadrat-Ellen Tüll erzeugen, während eine sehr fleissige Klöpplerin in einem Tage kaum 2 Ellen einfache und ganz schmale Spitzen zu Stande bringt. Mittelst Handarbeit und bei der üblichen Theilung der Arbeit kann man bei der Fabrikation von Stecknadeln auf eine Person 4800 Nadeln rechnen. Die Wright'sche Nadelmaschine macht in einem Tage 2—3 Millionen Stecknadeln mit Beihilfe von 1—2 Arbeitern. Bei der Papierfabrikation schöpft ein Mann in einem Tage 3000 Bogen ordinäres Schreibpapier, also nahe 4500 Quadrat-Fuss, dieses Papier bedarf aber zur gänzlichen Vollendung noch mehrerer Manipulationen; eine Papiermaschine erzeugt mit Hilfe von 3—4 Personen eben so viel ganz fertiges Papier in einer Stunde. Mit einer gemeinen Buchdruckerpresse erhält man in einer Stunde nur 200, mit einer Stanhopepresse höchstens 250 Abdrücke; die von König erfundene Schnellpresse liefert in einer Stunde 1200, Cooper's Stereotypenpresse gar 4000 Abdrücke.

Unter solchen Umständen konnte mit Grund erwartet werden, dass die Erzeugnisse der Industrie einer bedeutenden Preisermässigung unterliegen mussten, und dieser Erwartung hat auch der Erfolg entsprochen. Als man Schwefelsäure noch einzig und allein aus Eisenvitriol im Kleinen erzeugte, kostete das Pfund $7\frac{1}{3}$ Gulden, dadurch dass man sie mit Zugabe von Salpeter in grossen Glaskolben bereitete, fiel dieser Preis auf $8\frac{1}{2}$ Kreuzer, und als man die Erzeugung in Bleikammern bewerkstelligt hatte, wurde ein Centner mit 8—9 Gulden abgelassen. Als man das Ultramarin, die jetzt allgemein angewendete schöne blaue Farbe, aus Lasurstein erzeugen musste, kostete das Pfund der Mittelsorte über 600 Gulden, jetzt, wo man es aus sehr gemeinen Stoffen künstlich zusammensetzen gelernt hat, nur $1\frac{1}{2}$ Gulden. Von den chemischen Zündhölzchen kosteten, als sie zuerst nach Oesterreich kamen, hundert Stück $1\frac{1}{2}$ Gulden, jetzt steht dieser Preis auf $\frac{1}{2}$ Kreuzer. Heut zu Tage ist kaum eine Bauernstube ohne Uhr; im 15. Jahrhundert hielt es der Stadtrath von Auxerre für bedenklich, ohne besondere Erlaubniss des Königs aus der Stadtkasse eine Uhr anzuschaffen. Im Jahre 1720 soll die Unterhaltung eines Fortepiano von 185 Saiten, wegen des hohen Preises der Letzteren, jährlich 100 Thaler gekostet haben. Ein Pfund Seide war im Alterthum gleich einem Pfund Gold. Als König Eduard der VI. von England durch einen Kaufmann ein Paar Seidenstrümpfe

erhielt, machte man davon ungemein viel Aufhebens. Gegen solche Preisermässigungen sticht die gegenwärtig hohe Verwerthung sonst als unbrauchbar betrachteter Gegenstände eigenthümlich ab, und doch ist diese eben sowohl ein Ergebniss industrieller höherer Arbeit wie jene. Ein todtes Ross, dem Haut und Haar entnommen sind, galt lange als Bild eines nutzlosen Gegenstandes; in der Abdeckerei zu Montfaucon bei Paris bringt man einen solchen Körper durch kluge Benützung aller Theile auf 20—45 Gulden. Das Blut wird theils zur Fabrikation von Berlinerblau, theils getrocknet als Dünger verkauft, die Hufe und Knochen beziehen die Kammmacher und Messerschmiede, und was diese nicht brauchen können, chemische Fabriken zur Erzeugung von Ammoniak; das Fett wird zum Einschmieren von Leder oder als Brennstoff für Lampen der Emailleurs, das Fleisch theils zum Verspeisen, theils als Futter für Hunde, Katzen, Schweine und Hühner verwendet, aus den Flechsen siedet man Leim, von den dünnen Gedärmen macht man Saiten, die schon in Fäulniss übergegangenen Reste von Fleisch dienen Maden zur Nahrung und letztere werden dann als Vogelfutter oder als Köder zum Fischfang verkauft, nebenbei finden sich zahlreiche Ratten ein, die man eigens hegt, dann in Masse erschlägt und deren Felle an Kürschner verkauft. Wie viele Menschen würden Beschäftigung und Unterhalt finden, wenn diese Industrie von Montfaucon in Bezug auf andere Gegenstände Anwendung fände, die jetzt nutzlos zu Grunde gehen; in der That, wenn über Mangel an Beschäftigung, Verdienstlosigkeit und Armuth von gesunden Leuten geklagt wird, so ist dieses gar oft nur die Folge eines Mangels an industriellen Bestrebungen.

Sollte mein Bild über die Macht der Arbeit vollendet heissen können, so müsste ich auch den Antheil, welchen die Arbeit am Handel und Verkehr, an Künsten und Wissenschaften hat, näher schildern; allein dann würde dieses Bild grösser sein als der Rahmen, in den es passen muss.

Es ist aber schon aus dem Gesagten zu ersehen, dass der Mensch nur durch Arbeit zum Herrn der Welt wird, als welchen er sich so gerne betrachtet und dass er ohne Arbeit nur ihr Sklave ist. Alles gehört ihm, wenn er es durch Arbeit zu gewinnen weiss. Das Licht ist ihm nicht mehr blos das Vehikel des Sehens, sondern sein Bleicher und Färber, die Wärme wird zu seinem Motor, die Elektricität zu seinem Postillon, der Magnet zu seinem Führer; die Ströme fliessen, um seine Schiffe in ferne Lande zu tragen, für ihn hat die Erde ihre Mineralschätze, für ihn quillt die Gesundheitsquelle, für ihn keimt die Saat und laichet der Fisch. Das Lamm trägt für ihn die Wolle, gibt die Kuh die Milch, legt

das Huhn seine Eier. Durch Fleiss hat der Mensch das Reich der Wissenschaften gegründet, d. h. einen Baum gepflanzt, der in der Erde wurzelt und dessen Krone bis zu den Gestirnen reicht. Doch ich erinnere mich vielleicht noch zu rechter Zeit an Montesquieu, der sagt: Manche Redner suchen durch die Länge ihres Vortrages zu ersetzen, was ihnen an Gründlichkeit abgeht, und ich schliesse daher, um nicht diesem Satze zu verfallen.

XVIII.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Von Herrn Professor F. H. Rump am Gymnasium in Cösfeld.

Vorbemerkung. Die folgenden Aufgaben sind nicht für einzelne talentvolle und mehr ausgebildete Schüler, sondern vielmehr für ganze Klassen, z. B. für die Secunda eines Gymnasiums bestimmt, so dass die Auflösung einer solchen Aufgabe, die ausserhalb der Schulzeit anzufertigende und in einer bestimmten Zeit einzuliefernde schriftliche Arbeit eines jeden Schülers der Klasse ausmacht. Dass bei Aufgaben dieser Art nicht so sehr und vorzugsweise die Erfindungsgabe in Anspruch genommen werden darf, in welchem Falle nur die besser begabten Schüler berücksichtiget würden, — dass vielmehr auch der minder begabte, aber fleissige Schüler sich im Stande fühlen muss, mit Benutzung der in der Schule gegebenen Anweisung unter Anwendung von ziemlich leicht zu findenden Combinationen und Analogien die Aufgabe bewältigen zu können, versteht sich bei jedem praktischen Schulmanne wohl von selbst. — Unter Anderem liefern manche Beweise für den Pythagoräischen Lehrsatz, solche nämlich, die sich auf Congruenz von Dreiecken und auf Gleichheit von Parallelogrammen stützen, für Aufgaben der bezeichneten Art ein vortreffliches Material. Nachdem nämlich ein solcher Beweis mehr oder minder ausführlich in der Schule vorgenommen oder auch nur

angedeutet ist, wird die Lage der Quadrate gegen einander geändert und dann den Schülern die Aufgabe gestellt, bei dieser veränderten Lage der Quadrate den Beweis zu liefern. Um hierbei mehr Mannigfaltigkeit hervor zu bringen und dem Schüler ein grösseres Feld für seine freie Thätigkeit zu verschaffen, können in der Schule auch mehrere Beweise oder doch mehrfache Abänderungen desselben Beweises für die einmal angenommene Lage der Quadrate behandelt werden, worauf der Schüler in seiner schriftlichen, eine andere Lage der Quadrate voraussetzenden Aufgabe eine freiere Bewegung bei Aufsuchung des Beweises annehmen kann. In derselben Weise sollen auch die folgenden Lehrsätze benutzt werden.

1. Lehrsatz. Durchschneiden sich in einem Kreise zwei Sehnen, so sind die beiden Parallelogramme, welche aus den zwei Stücken jeder Sehne und dem Winkel, unter welchem sich die Sehnen schneiden, construirt werden, an Flächeninhalt gleich.

Es seien AC und DE (Taf. V. Fig. 7.) die beiden sich in B durchschneidenden Sehnen. Macht man nun $BF=BC$ und $BG=BD$, und construirt hiernach die beiden Parallelogramme $BAJF$ und $BEHG$, so ist zu beweisen, dass $BAJF=BEHG$.

Erster Beweis. Ziehe DC und GF, verlängere alsdann nach beiden Seiten hin die Linien JF und HG, bis sie einerseits sich in M treffen, andererseits aber mit der durch A und E gelegten Geraden in K und L zusammenstossen. Alsdann ist zunächst $\triangle DBC \cong \triangle GBF$, und demnach der Winkel $CDB=FGB$. Es ist aber auch $CDB=CAE$ und folglich auch $FGB=CAE$, und daher FG parallel KL. Also ist auch ferner $FGAK=FGLE$, und da $FGAK=MGAJ$ und $FGLE=FMHE$ ist, so ist $MGAJ=FMHE$, und folglich auch, wenn man das gemeinschaftliche Stück $FMGB$ wegnimmt, $FBAJ=GBEH$.

Zweiter Beweis. Nachdem, wie im ersten Beweise gezeigt ist, dass FG parallel KL, und hierauf die Diagonalen FA und CE gezogen sind, ergiebt sich, dass $\triangle FGA=\triangle FGE$, und folglich auch $\triangle FBA=\triangle GBE$. Da nun $\triangle FBA=\frac{1}{2}FBAJ$ und $\triangle GBE=\frac{1}{2}GBEH$, so ist auch $FBAJ=GBEH$.

Dritter Beweis. Nachdem abermals dargethan ist, dass FG parallel KL, ergiebt sich, dass $\triangle KFE \cong \triangle AGL$, und demnach $a+b+c=c+d+g$, und da nun $a=f=g$, c aber gemeinschaftlich ist, so ist auch $b=d$, d. h. $FBAJ=GBEH$.

Anmerkung. So einfach die vorstehenden Beweise auch sind, so lehrreich wird doch der Satz für den Schüler, sobald

die veränderte Lage der Parallelogramme in Anwendung kommt und er dann den Beweis selbstständig ausführen soll. Die Lage der Parallelogramme kann aber mannigfach verändert werden, wie die folgenden Figuren zeigen. In Taf. V. Fig. 7. waren sie über die grösseren Sehnenstücke, und zwar, vom Dreieck *ABE* aus betrachtet, nach aussen hin gelegt; in Taf. V. Fig. 8. fallen sie über das Dreieck *ABE*; in Taf. V. Fig. 9. stehen die Parallelogramme auf den kleineren Sehnenstücken; dasselbe ist auch in Taf. V. Fig. 10. der Fall, aber hier liegen sie auf der entgegengesetzten Seite. In Taf. V. Fig. 11. liegen abermals beide Parallelogramme auf den grösseren Sehnenstücken, aber das eine fällt über das Dreieck *ABE*, das andere nicht. Wie noch ferner Aenderungen vorgenommen werden können, ist leicht zu sehen.

2. Lehrsatz. Sind aus einem ausserhalb eines Kreises liegenden Punkte zwei Secanten durch den Kreis gezogen, so ist das Parallelogramm, welches aus der einen Secante, dem ausserhalb des Kreises liegenden Stücke derselben und dem von beiden Secanten gebildeten Winkel construirt wird, dem bei der anderen Secante in gleicher Weise construirten Parallelogramme gleich.

Auch hier bietet sich wie beim ersten Lehrsatze dieselbe Mannigfaltigkeit dar. — Statt der einen Secante kann auch die Tangente genommen werden, wo dann das eine Parallelogramm gleichseitig wird.

XIX.

Miscellen.

Von dem Herausgeber.

I.

Zwei geometrische Aufgaben.

Erste Aufgabe.

In Taf. V. Fig. 12. sei AOB ein Dreieck, dessen Seiten $OA=a$, $OB=b$ und der von denselben eingeschlossene Winkel $AOB=i$ gegeben sind; man soll die Seiten OA und OB dieses Dreiecks um zwei solche Stücke AC und BD verlängern, dass diese Stücke in einem gegebenen Verhältnisse $m:n$ zu einander stehen, und die ihre Endpunkte C und D verbindende gerade Linie CD eine gegebene Grösse c hat.

Erste Auflösung.

Man setze $AC=x$, $BD=y$, so ist nach den Bedingungen der Aufgabe

$$x:y=m:n.$$

Ferner ist nach den Bedingungen der Aufgabe

$$c^2=(a+x)^2+(b+y)^2-2(a+x)(b+y)\cos i$$

oder

$$c^2=\{(a+x)^2+(b+y)^2+2(a+x)(b+y)\}\sin\tfrac{1}{2}i^2$$
$$+\{(a+x)^2+(b+y)^2-2(a+x)(b+y)\}\cos\tfrac{1}{2}i^2,$$

also

$$c^2=\{(a+x)+(b+y)\}^2\sin\tfrac{1}{2}i^2+\{(a+x)-(b+y)\}^2\cos\tfrac{1}{2}i^2$$

oder

$$c^2=\{(a+b)+(x+y)\}^2\sin\tfrac{1}{2}i^2+\{(a-b)+(x-y)\}^2\cos\tfrac{1}{2}i^2.$$

Nun ergiebt sich aus der Proportion

$$x:y=m:n$$

die Proportion

$$x+y:x-y=m+n:m-n,$$

und wir haben also zur Bestimmung von x und y die beiden folgenden Gleichungen:

$$(m-n)(x+y)=(m+n)(x-y),$$

$$\{(a+b)+(x+y)\}^2\sin\tfrac{1}{2}i^2+\{(a-b)+(x-y)\}^2\cos\tfrac{1}{2}i^2=c^2.$$

Die zweite Gleichung lässt sich auf folgende Form bringen:

$$\left\{\frac{(a+b)+(x+y)}{c}\sin\tfrac{1}{2}i\right\}^2+\left\{\frac{(a-b)+(x-y)}{c}\cos\tfrac{1}{2}i\right\}^2=1,$$

und setzen wir also:

$$u=\frac{(a+b)+(x+y)}{c}\sin\tfrac{1}{2}i,\quad v=\frac{(a-b)+(x-y)}{c}\cos\tfrac{1}{2}i;$$

so wird diese Gleichung:

$$u^2+v^2=1.$$

Ferner ist

$$x+y=\frac{c}{\sin\frac{1}{2}i}u-(a+b),\quad x-y=\frac{c}{\cos\frac{1}{2}i}v-(a-b);$$

also wird die erste der beiden obigen Hauptgleichungen:

$$(m-n)\left\{\frac{c}{\sin\frac{1}{2}i}u-(a+b)\right\}=(m+n)\left\{\frac{c}{\cos\frac{1}{2}i}v-(a-b)\right\}$$

oder

$$\frac{(m-n)c}{\sin\frac{1}{2}i}u-\frac{(m+n)c}{\cos\frac{1}{2}i}v=2(mb-na),$$

also

$$\frac{(m-n)c}{2(mb-na)\sin\frac{1}{2}i}u-\frac{(m+n)c}{2(mb-na)\cos\frac{1}{2}i}v=1.$$

Setzen wir der Kürze wegen

$$\lambda=\frac{(m-n)c}{2(mb-na)\sin\frac{1}{2}i},\quad \mu=\frac{(m+n)c}{2(mb-na)\cos\frac{1}{2}i};$$

so sind die aufzulösenden Gleichungen:

$$\lambda u-\mu v=1,\quad u^2+v^2=1.$$

Eliminirt man v, so erhält man die Gleichung

$$u^2-\frac{2\lambda}{\lambda^2+\mu^2}u=\frac{\mu^2-1}{\lambda^2+\mu^2},$$

und bestimmt man nun u aus dieser Gleichung, hierauf v mittelst der Formel

$$v=\frac{\lambda u-1}{\mu},$$

so erhält man:

$$u=\frac{\lambda\pm\mu\sqrt{\lambda^2+\mu^2-1}}{\lambda^2+\mu^2},$$

$$v=-\frac{\mu\mp\lambda\sqrt{\lambda^2+\mu^2-1}}{\lambda^2+\mu^2}.$$

Also haben wir zur Auflösung unserer Aufgabe die folgenden Formeln:

$$\lambda=\frac{(m-n)c}{2(mb-na)\sin\frac{1}{2}i},\quad \mu=\frac{(m+n)c}{2(mb-na)\cos\frac{1}{2}i};$$

$$u=\frac{\lambda\pm\mu\sqrt{\lambda^2+\mu^2-1}}{\lambda^2+\mu^2},$$

$$v=-\frac{\mu\mp\lambda\sqrt{\lambda^2+\mu^2-1}}{\lambda^2+\mu^2};$$

$$x=\tfrac{1}{2}c\left(\frac{u}{\sin\frac{1}{2}i}+\frac{v}{\cos\frac{1}{2}i}\right)-a,$$

$$y=\tfrac{1}{2}c\left(\frac{u}{\sin\frac{1}{2}i}-\frac{v}{\cos\frac{1}{2}i}\right)-b.$$

Zweite Auflösung.

Gehen wir wieder von den beiden Gleichungen

$$x:y=m:n,$$

$$\left\{\frac{(a+b)+(x+y)}{c}\sin\tfrac{1}{2}i\right\}^2+\left\{\frac{(a-b)+(x-y)}{c}\cos\tfrac{1}{2}i\right\}^2=1$$

aus, so können wir

$$x=mw,\quad y=nw$$

setzen, und die zweite Gleichung wird dann:

$$\left\{\frac{a+b+(m+n)w}{c}\sin\tfrac{1}{2}i\right\}^2+\left\{\frac{a-b+(m-n)w}{c}\cos\tfrac{1}{2}i\right\}^2=1.$$

Wir können also

$$\frac{a+b+(m+n)w}{c}\sin\tfrac{1}{2}i=\sin P,$$

$$\frac{a-b+(m-n)w}{c}\cos\tfrac{1}{2}i=\cos P$$

setzen, woraus wir

$$w=\frac{c\sin P-(a+b)\sin\tfrac{1}{2}i}{m+n},$$

$$w=\frac{c\cos P-(a-b)\cos\tfrac{1}{2}i}{m-n};$$

also zur Bestimmung von P die Gleichung

$$\frac{c\sin P-(a+b)\sin\tfrac{1}{2}i}{m+n}=\frac{c\cos P-(a-b)\cos\tfrac{1}{2}i}{m-n},$$

oder

$$\frac{\sin P}{m+n}-\frac{\cos P}{m-n}=\frac{a+b}{(m+n)c}\sin\tfrac{1}{2}i-\frac{a-b}{(m-n)c}\cos\tfrac{1}{2}i,$$

oder

$$\sin P-\frac{m+n}{m-n}\cos P=\frac{a+b}{c}\left\{\sin\tfrac{1}{2}i-\frac{m+n}{m-n}\cdot\frac{a-b}{a+b}\cos\tfrac{1}{2}i\right\}$$

erhalten. Berechnen wir nun die Hülfswinkel Θ, ω mittelst der Formeln

$$\tan\Theta=\frac{m+n}{m-n},\quad \tan\omega=\frac{m+n}{m-n}\cdot\frac{a-b}{a+b};$$

so wird vorstehende Gleichung:

$$\frac{\sin(P-\Theta)}{\cos\Theta}=\frac{a+b}{c}\cdot\frac{\sin(\tfrac{1}{2}i-\omega)}{\cos\omega},$$

also

$$\sin(P-\Theta)=\frac{a+b}{c}\cdot\frac{\cos\Theta}{\cos\omega}\sin(\tfrac{1}{2}i-\omega),$$

mittelst welcher Formel P berechnet werden kann. Hierauf findet

man w, x, y mittelst der im Obigen für diese Grössen gegebenen Ausdrücke.

Dritte Auflösung.

Bezeichnet man die Winkel ODC und OCD respective durch φ und ψ, so ist

$$a+x:b+y=\sin\varphi:\sin\psi;$$

aber $y=\frac{n}{m}x$, also

$$ma+mx:mb+nx=\sin\varphi:\sin\psi,$$

woraus sich

$$x=m\frac{a\sin\psi-b\sin\varphi}{n\sin\varphi-m\sin\psi}$$

ergiebt. Nun ist

$$a+x:c=\sin\varphi:\sin i,\quad a+x=c\frac{\sin\varphi}{\sin i};$$

also

$$a+m\frac{a\sin\psi-b\sin\varphi}{n\sin\varphi-m\sin\psi}=c\frac{\sin\varphi}{\sin i},$$

oder, wie man nach leichter Rechnung findet:

$$\frac{(na-mb)\sin\varphi}{n\sin\varphi-m\sin\psi}=\frac{c\sin\varphi}{\sin i},$$

d. i.

$$(na-mb)\sin i=c(n\sin\varphi-m\sin\psi).$$

Es ist aber $\psi=180^0-(i+\varphi)$, folglich hat man zur Bestimmung von φ die Gleichung

$$(na-mb)\sin i=c\{n\sin\varphi-m\sin(i+\varphi)\},$$

oder

$$(na-mb)\sin i=c\{(n-m\cos i)\sin\varphi-m\sin i\cos\varphi\},$$

oder

$$\frac{na-mb}{c}\sin i=(n-m\cos i)\sin\varphi-m\sin i\cos\varphi.$$

Bestimmt man also die Hülfsgrössen R, Ω mittelst der Gleichungen

$$R\sin\Omega = m\sin i,\quad R\cos\Omega = n - m\cos i,$$

was bekanntlich keine Schwierigkeit hat, so wird vorstehende Gleichung:

$$\frac{na-mb}{c}\sin i = R\sin(\varphi-\Omega),$$

woraus sich zur Bestimmung von φ die Formel

$$\sin(\varphi-\Omega) = \frac{na-mb}{c}\cdot\frac{\sin i}{R}$$

ergiebt.

Ueberhaupt aber haben wir nun zur Auflösung unserer Aufgabe die folgenden Formeln:

$$R\sin\Omega = m\sin i,$$

$$R\cos\Omega = n - m\cos i;$$

$$\sin(\varphi-\Omega) = \frac{na-mb}{c}\cdot\frac{\sin i}{R},$$

$$\psi = 180^{0} - (i+\varphi);$$

$$x = m\frac{a\sin\psi - b\sin\varphi}{n\sin\varphi - m\sin\psi},$$

$$y = n\frac{a\sin\psi - b\sin\varphi}{n\sin\varphi - m\sin\psi}.$$

Zweite Aufgabe.

In Taf. V. Fig. 13. sei AOB ein Dreieck, dessen Seiten $OA=a$, $OB=b$ und der von denselben eingeschlossene Winkel $AOB=i$ gegeben sind; man soll die Seiten OA und OB dieses Dreiecks um zwei solche Stücke AC und BD verlängern, dass diese Stücke in einem gegebenen Verhältnisse $m:n$ zu einander stehen, und die ihre Endpunkte C und D verbindende gerade Linie CD ein Minimum werde.

Auflösung.

Man setze $AC=mx$, $BD=nx$ und bezeichne die Linie CD, welche ein Minimum werden soll, durch y. Dann ist

$$y^2=(a+mx)^2+(b+nx)^2-2(a+mx)(b+nx)\cos i,$$

folglich, wenn man differentiirt:

$$y\frac{\partial y}{\partial x}= m(a+mx)+n(b+nx)$$
$$-m(b+nx)\cos i-n(a+mx)\cos i$$
$$= ma+nb-(mb+na)\cos i$$
$$+(m^2+n^2-2mn\cos i)x.$$

Die gemeinschaftliche Bedingung des Maximums und Minimums ist

$$\frac{\partial y}{\partial x}=0,$$

folglich wegen vorstehender Gleichung:

$$ma+nb-(mb+na)\cos i+(m^2+n^2-2mn\cos i)x=0,$$

woraus sich

$$x=-\frac{ma+nb-(mb+na)\cos i}{m^2+n^2-2mn\cos i}$$

oder

$$x=-\frac{a(m-n\cos i)+b(n-m\cos i)}{(m+n)^2\sin\tfrac{1}{2}i^2+(m-n)^2\cos\tfrac{1}{2}i^2}$$

ergiebt.

Leicht findet man:

$$a+mx=\frac{(na-mb)(n-m\cos i)}{m^2+n^2-2mn\cos i},$$

$$b+nx=-\frac{(na-mb)(m-n\cos i)}{m^2+n^2-2mn\cos i};$$

und folglich nach dem Obigen:

$$y^2=\frac{(na-mb)^2\{(m-n\cos i)^2+(n-m\cos i)^2+2(m-n\cos i)(n-m\cos i)\cos i\}}{(m^2+n^2-2mn\cos i)^2},$$

woraus man nach einigen einfachen Transformationen:

$$y^2=\frac{(na-mb)^2\sin i^2}{m^2+n^2-2mn\cos i},$$

also

$$y=\pm\frac{(na-mb)\sin i}{\sqrt{m^2+n^2-2mn\cos i}}$$

oder

$$y = \pm \frac{(na - mb)\sin i}{\sqrt{(m+n)^2 \sin \frac{1}{2}i^2 + (m-n)^2 \cos \frac{1}{2}i^2}}$$

erhält, indem man das Vorzeichen immer so nimmt, dass y positiv wird.

Um nun zwischen dem Maximum und Minimum zu unterscheiden, müssen wir noch den zweiten Differentialquotienten entwickeln. Nach dem Obigen war

$$y\frac{\partial y}{\partial x} = ma + nb - (mb + na)\cos i + (m^2 + n^2 - 2mn\cos i)\,x\,,$$

woraus man durch fernere Differentiation:

$$y\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = m^2 + n^2 - 2mn\cos i$$

erhält. Da es uns aber hier bloss auf die Kenntniss des Werthes des zweiten Differentialquotienten ankommt, welchen derselbe für den Werth von x erhält, für welchen der erste Differentialquotient verschwindet, so können wir in der vorstehenden Gleichung

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

setzen, und erhalten demzufolge

$$y\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = m^2 + n^2 - 2mn\cos i\,,$$

also

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{m^2 + n^2 - 2mn\cos i}{y}$$

oder

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{(m+n)^2 \sin \frac{1}{2}i^2 + (m-n)^2 \cos \frac{1}{2}i^2}{y}\,,$$

wo für y sein oben gefundener stets positiver Werth zu setzen ist. Hiernach ist also der zweite Differentialquotient positiv, folglich die Bedingung des Minimums wirklich erfüllt, wie verlangt wurde.

Anmerkung.

Man kann die beiden vorhergehenden Aufgaben auf verschiedene Weise abändern, indem man die Stücke *AC* und *BD*, statt

sie auf den Verlängerungen der Seiten OA und OB des Dreiecks AOB zu nehmen, auch auf diesen Seiten selbst von A und B an abschneiden, auch das eine Stück auf der Verlängerung der entsprechenden Seite nehmen, das andere auf der entsprechenden Seite selbst abschneiden kann. Die Auflösungen der hieraus hervorgehenden Aufgaben, die in zweckmässiger Weise als Uebungsaufgaben benutzt werden können, ergeben sich aus den Auflösungen der beiden vorhergehenden Aufgaben ganz von selbst, wenn man nur die Zeichen gehörig verändert, und bedürfen einer weiteren Erläuterung nicht.

Eine praktische Anwendung können die vorhergehenden Aufgaben bei der Berechnung einer Mondfinsterniss finden: die erste bei der Berechnung der Zeit des Eintritts des Mondes in den Erdschatten, die zweite bei der Berechnung der Zeit der grössten Verfinsterung. Der Kundige übersieht den Zusammenhang unserer Aufgaben mit diesem Gegenstande von selbst, und ich halte weitere Erläuterungen für ganz unnöthig, will indess noch in grösstentheils bekannter Weise zeigen, wie zur Zeit einer Mondfinsterniss die Breite des Erdschattens an der Stelle, wo der Mond durch denselben hindurch geht, gefunden werden kann, was hinreichen wird, um die bei der Berechnung einer solchen Erscheinung mit Hülfe der obigen Aufgaben nöthigen Formeln beisammen zu haben, wobei man sich nur immer erinnern muss, dass man es bei einer solchen Rechnung stets nur mit sehr kleinen Linien oder Bogen zu thun hat, für welche immer die in einerlei Maasse ausgedrückten, ihnen entsprechenden Winkel am Mittelpunkte der Erde gesetzt werden können, und dass man, wie bei allen solchen Rechnungen in der Astronomie, auch hier die Zeit des Eintritts des Mondes in den Erdschatten schon näherungsweise kennen muss, völlige Genauigkeit auch nur auf dem Wege successiver Annäherung erreichen kann. Zur Erläuterung dient Taf. V. Fig. 14., in Bezug auf welche ich nur bemerke, dass A der Mittelpunkt der Sonne, B der Mittelpunkt der Erde, e die Entfernung des Mondes von der Erde ist; alle übrigen Bezeichnungen sind aus der Figur selbst ersichtlich; die oberen Zeichen beziehen sich auf den Kernschatten, die unteren auf den Halbschatten. Es ist

$$\varrho = e \tang \varphi;$$

$$R : r = E \pm BS : BS,$$

$$R \mp r : r = E : BS,$$

$$BS = \frac{rE}{R \mp r}.$$

Nun ist

$$\varrho = (BS \mp e)\,\text{tang}\,\psi = \left(\frac{rE}{R \mp r} \mp e\right)\text{tang}\,\psi,$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$\left(\frac{rE}{R \mp r} \mp e\right)\text{tang}\,\psi = e\,\text{tang}\,\varphi.$$

Ferner ist

$$r = BS.\sin\psi = \frac{rE}{R \mp r}\sin\psi,\quad \sin\psi = \frac{R \mp r}{E}.$$

Aus den beiden Gleichungen

$$\sin\psi = \frac{R \mp r}{E},\quad \text{tang}\,\psi = \frac{e\,\text{tang}\,\varphi}{\frac{rE}{R \mp r} \mp e}$$

müssen wir, um φ, welches hier eigentlich die gesuchte unbekannte Grösse ist, zu finden, ψ eliminiren. Es ist aber bekanntlich

$$\text{tang}\,\psi^2 = \frac{\sin\psi^2}{1 - \sin\psi^2},$$

also

$$\frac{e^2\,\text{tang}\,\varphi^2}{\left(\frac{rE}{R \mp r} \mp e\right)^2} = \frac{\left(\frac{R \mp r}{E}\right)^2}{1 - \left(\frac{R \mp r}{E}\right)^2},$$

woraus sich

$$\text{tang}\,\varphi^2 = \frac{1}{e^2}\cdot\frac{\left(\frac{R \mp r}{E}\right)^2\left(\frac{rE}{R \mp r} \mp e\right)^2}{1 - \left(\frac{R \mp r}{E}\right)^2} = \frac{1}{e^2}\cdot\frac{\left(\frac{rE}{R \mp r} \mp e\right)^2}{\left(\frac{E}{R \mp r}\right)^2 - 1}$$

$$= \frac{r^2}{e^2}\cdot\frac{\left(\frac{E}{R \mp r} \mp \frac{e}{r}\right)^2}{\left(\frac{E}{R \mp r}\right)^2 - 1} = \frac{r^2}{e^2}\cdot\frac{\left(\frac{1}{\frac{R}{E} \mp \frac{r}{E}} \mp \frac{e}{r}\right)^2}{\left(\frac{1}{\frac{R}{E} \mp \frac{r}{E}}\right)^2 - 1}$$

ergiebt. Setzen wir also

$$\frac{r}{e} = \sin\varpi,\quad \frac{r}{E} = \sin\Pi,\quad \frac{R}{E} = \sin\varDelta;$$

wo $\bar{\omega}$ die Mondsparallaxe, Π die Sonnenparallaxe, Δ der scheinbare Sonnenhalbmesser ist, so wird

$$\operatorname{tang}\varphi^2 = \sin\bar{\omega}^2 \frac{\left(\frac{1}{\sin\Delta \mp \sin\Pi} \mp \frac{1}{\sin\bar{\omega}}\right)^2}{\left(\frac{1}{\sin\Delta \mp \sin\Pi}\right)^2 - 1},$$

also

$$\operatorname{tang}\varphi^2 = \frac{\{\sin\bar{\omega} \mp (\sin\Delta \mp \sin\Pi)\}^2}{1-(\sin\Delta \mp \sin\Pi)^2},$$

woraus

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\sin\bar{\omega} + \sin\Pi \mp \sin\Delta}{\sqrt{1-(\sin\Delta \mp \sin\Pi)^2}}$$

folgt. Näherungsweise kann man

$$\varphi = \bar{\omega} + \Pi \mp \Delta$$

setzen.

II.

Die polnische Gräfin Skorzewska und die beiden Mathematiker Joh. Heinr. Lambert und von Holland über die Aufgabe von der Beschreibung eines drei andere gegebene Kreise berührenden Kreises.

Der erste Theil von Joh. Heinr. Lambert's deutschem gelehrten Briefwechsel. Herausgegeben von Joh. Bernoulli, Mitgl. der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. 1781. enthält vorzüglich die Briefe zwischen Lambert und v. Holland, welcher letztere ein grosser Liebhaber und sehr gründlicher Kenner der Mathematik war und sich damals in Treptow an der Rega in Hinterpommern aufhielt, als Hofmeister in der Familie des Herzogs Friedrich Eugen von Würtemberg, der, zu jener Zeit in preussischen Diensten, mit seinem Regimente in Treptow in Garnison stand. In diesen Briefen kommt zwischen den beiden Mathematikern auch das Problem von der Beschreibung eines Kreises, der drei andere gegebene Kreise berühren soll, zur Sprache, in einer Weise, die manches Interessante enthält und daher hier wohl eine Mittheilung verdient.

Holland schreibt an Lambert aus Treptow den 29. November 1769:

„Die Gräfin Skorzewska *) hat mir letzthin das Problem aufgegeben, zu drei gegebenen Zirkeln einen vierten zu finden, der jene drei berührt. Ich habe zwar bereits die Auflösung davon gemacht. Die Rechnung ist aber entsetzlich mühsam gewesen und hat mich endlich auf eine bis zum Eckel zusammengesetzte biquadratische Gleichung geführt, wo die unbekannte Grösse der Radius des gesuchten Cirkels ist. Nun ist es mir eine ganz dunkle Erinnerung, dass Vieta schon eben die Aufgabe aufgelöst hat; und ich bin gewiss, dass er sich aller der algebraischen Hülfsmittel, die mir zur Auflösung verholfen, damals noch nicht hat bedienen können. Ich glaube aber, dass seine Solution, die ohne Zweifel geometrisch gewesen, kürzer und netter sein wird als die meinige. Sollten Sie etwa in einem Buche irgendwo Vieta's oder eines andern Auflösung dieses Problems haben, so würde ich Ihnen für die Mittheilung derselben verbunden sein, die Begierde ist natürlich, nach einem zurückgelegten Weg, den man selbst gesucht hat, zu wissen, ob man den kürzesten getroffen habe **).“

Hierauf antwortet Lambert aus Berlin den 11. Decbr. 1768: „Die Gräfin Skorzewska, Herr Beitler ***) und Herr Obrist Ricaut haben mir ebenfalls von der Aufgabe des Circuls gesprochen, der drei andere von gegebener Lage berühren solle. Dieses Berühren kann auf acht Arten geschehen, weil entweder alle drei, oder nur zween oder nur einer oder gar keiner inwendig oder auswendig berührt wird. Auf diese Art aber schiene das Problem auf eine Gleichung vom achten Grade zu führen, und würde sich schwerlich mit Circul und Lineal construiren lassen. Indessen lässt es sich dennoch auf eine Gleichung vom zweiten Grade bringen. Die Auflösung, so ich durch trigonometrische Formeln erhielt, hatte ich der Gräfin mitgetheilt, indessen mei-

*) Hierzu bemerkt Bernoulli: „Eine gelehrte polnische Dame und grosse Liebhaberin der mathematischen Wissenschaften. Sie hat sich lange in Berlin aufgehalten, lebt aber nicht mehr.“

**) Holland hat also den Apollonius Gallus des Vieta nicht gekannt, sondern erinnert sich nur dunkel, einmal etwas davon gehört zu haben. Noch weniger wird er also die berühmte Schrift des Apollonius: περι ἐπαφῶν gekannt haben, die zwar verloren gegangen ist, zu der aber Pappus im siebenten Buche seiner mathematischen Sammlungen Lemmata aufgesetzt hat. G.

***) Später Professor am Gymnasium illustre zu Mitau.

dete sie mir, eine geometrische würde dem Obrist Ricaut besser anstehen. Ich suchte darauf eine bloss algebraische, weil die trigonometrischen Formeln noch nicht sehr bekannt sind *). Die Auflösung war ebenfalls vom zweiten Grade, und both eine wiewohl etwas weitläufige Construction an. Dieses meldete ich der Gräfin, habe aber noch weiter keine Antwort darauf erhalten."

Nun theilt Lambert seine beiden Auflösungen mit. Nur über die erste dieser beiden Auflösungen, welche trigonometrische Formeln in Anspruch nimmt, wollen wir im Folgenden einige Worte sagen, da die zweite uns weniger bemerkenswerth scheint

In Taf. VI. Fig. 1. seien die Halbmesser der um C, D, E beschriebenen drei gegebenen Kreise respective c, d, e; die Entfernungen CD, DE werden respective durch a, b bezeichnet; und den Winkel CDE nenne man δ. Ist dann x der Halbmesser des gesuchten Kreises, so ist, wo die Bedeutung von ω und $\overline{\omega}$ aus der Figur erhellt:

$$\cos\omega = \frac{a^2 + (d+x)^2 - (c+x)^2}{2a(d+x)} = \frac{a^2 + d^2 - c^2 + 2(d-c)x}{2a(d+x)},$$

$$\cos\overline{\omega} = \frac{b^2 + (d+x)^2 - (e+x)^2}{2b(d+x)} = \frac{b^2 + d^2 - e^2 + 2(d-e)x}{2b(d+x)}.$$

Weil nun

$$\cos\omega + \cos\overline{\omega} = 2\cos\tfrac{1}{2}(\omega+\overline{\omega})\cos\tfrac{1}{2}(\overline{\omega}-\omega) = 2\cos\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}(\overline{\omega}-\omega),$$

$$\cos\omega - \cos\overline{\omega} = 2\sin\tfrac{1}{2}(\omega+\overline{\omega})\sin\tfrac{1}{2}(\overline{\omega}-\omega) = 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}(\overline{\omega}-\omega)$$

ist, so ist nach dem Obigen:

$$\cos\tfrac{1}{2}(\overline{\omega}-\omega) = \frac{a^2 + d^2 - c^2 + 2(d-c)x}{4a(d+x)\cos\tfrac{1}{2}\alpha} + \frac{b^2 + d^2 - e^2 + 2(d-e)x}{4b(d+x)\cos\tfrac{1}{2}\alpha},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(\overline{\omega}-\omega) = \frac{a^2 + d^2 - c^2 + 2(d-c)x}{4a(d+x)\sin\tfrac{1}{2}\alpha} - \frac{b^2 + d^2 - e^2 + 2(d-e)x}{4b(d+x)\sin\tfrac{1}{2}\alpha};$$

also:

$$\left.\begin{array}{l} \left\{\dfrac{a^2+d^2-c^2+2(d-c)x}{4a(d+x)\cos\frac{1}{2}\alpha} + \dfrac{b^2+d^2-e^2+2(d-e)x}{4b(d+x)\cos\frac{1}{2}\alpha}\right\}^2 \\ + \left\{\dfrac{a^2+d^2-c^2+2(d-c)x}{4a(d+x)\sin\frac{1}{2}\alpha} - \dfrac{b^2+d^2-e^2+2(d-e)x}{4b(d+x)\sin\frac{1}{2}\alpha}\right\}^2 \end{array}\right\} = 1,$$

*) Nämlich in Berlin im Jahre 1768!! Jetzt frage man in den Schulen nach. G.

welche Gleichung, weiter entwickelt, offenbar auf eine quadratische Gleichung zur Bestimmung von x führt, deren Auflösung wir dem Leser überlassen.

Seinen beiden Auflösungen fügt Lambert noch folgende Worte hinzu:

„Ich habe aber die Sache nicht weiter verfolgt, sondern der Gräfin gemeldet, dass, wenn es nur um die wirkliche Ausübung, selbst auf dem Felde zu thun ist, das Problem sich vermittelst dreier Schnüre so hurtig und leicht auflösen lasse, als man es verlangen kann. Sonst ist mir von der Aufgabe nichts zu Gesichte gekommen *), als dass ich mich erinnere, in einer academischen Disputation das Problem für den Fall, wo die drei Circul sich berühren, eine algebraische Auflösung, die ebenfalls nicht kurz war, gesehen zu haben. Ich habe sie aber nicht hier bei mir."

Späterhin fährt er aber so fort:

„So eben schlage ich des Saverien Geschichte der Messkunst u. s. w. auf, und finde, dass Vieta dem Adriano Romano das Problem von den Circuln aufzulösen vorgegeben, und da dieser es nicht auflösen konnte, seine Auflösung bekannt gemacht habe. Den Vieta müsste ich etwan auf der Bibliothek aufschlagen. Ich vermuthe aber sehr, dass Vieta, welcher die geometrische Construction der Wurzeln aufgebracht hat, vorbemeldete Aufgaben wohl dürfte vermittelst einer oder zwoer Hyperbeln construirt haben. Doch sagt Saverien weiter nichts, als dass seine Auflösung schön sei."

Die letztere Vermuthung ist jedenfalls ganz unrichtig, und auch die ersteren Bemerkungen sind wenigstens nicht genau. Vielmehr sagt Klügel im mathematischen Wörterbuche. Thl. III. S. 135.: „Die Auflösungen des Vieta gefielen dem Adrianus Romanus, der die gedachte Aufgabe aufzulösen einen unzulässigen Weg gewählt hatte, so sehr, dass er von Würzburg, wo er sich damals aufhielt, nach Frankreich reisete, um sich mit Vieta über mathematische Gegenstände zu besprechen."

Holland antwortet Lambert aus Treptow den 19. März 1769 Folgendes:

„Die Art wie ich anfänglich die Aufgabe der Gräfin Skorzewska aufgelöst hatte, ist ganz vollständig einerlei mit der trigonometrischen Solution, die Sie, mein Herr, davon gemacht

*) Also niemals die Schriften des Vieta und die mathematischen Sammlungen des Pappus? G.

hatten. Hätte mir ein Mathematikverständiger die Frage vorgelegt, so würde ich mich damit begnügt haben, ihm diese Auflösung zuzuschicken. Nun wusste ich zwar wohl, dass jede andere Auflösung (denn eine Euclidische, dergleichen man von mir verlangt hatte, sehe ich für unmöglich an*)) für die Gräfin immer zu transcendent sein würde**). Weil aber jene algebraisch-trigonometrische nicht wohl eine Construction zulässt und also den Augen gar nichts darbietet, so dachte ich auf eine andere, die doch wenigstens den angeführten Fehler nicht haben sollte. Ich fand endlich, dass sich die gesuchten Mittelpunkte der berührenden Cirkel durch Intersection von Hyperbeln und Ellipsen bestimmen lassen. Die grösste Schwierigkeit bestund aber nun in der Zeichnung, und ich kann wohl sagen, dass mir die ganze Sache mehr Mühe gemacht hat, als sie zu verdienen scheint."

„Ich überschickte hierauf meine Arbeit an die Gräfin, mit der Bitte, Ihnen, mein Herr, dieselbe mitzutheilen, welches, wie ich hoffe, geschehen sein wird. Sie werden daraus ersehen haben, dass ich mich bemüht, die Beweise, die sich ganz kurz und allgemein hätten abfassen lassen, so viel als möglich vorzubuchstabiren. Viele Corollaria, unter andern auch die Fälle, da die Hyperbeln und Ellipsen in Parabeln übergehen, habe ich weggelassen, weil die Arbeit überhaupt meine Geduld schon erschöpft hatte."

Um das, was Holland hier von Ellipsen und Hyperbeln sagt, etwas näher zu erläutern, füge ich, am Schluss dieser Auszüge aus dem Briefwechsel eines der grössten und scharfsinnigsten Mathematiker des vorigen Jahrhunderts, eine kleine analytische Betrachtung bei, deren Resultate sich übrigens auch sehr einfach auf rein geometrischem Wege gewinnen lassen.

Endlich antwortet Lambert aus Berlin den 25. September 1769:

„Die Gräfin Skorzewska ist noch im Winter von hier verreiset. Ich hatte sie wegen des Nutzens einer euclidischen Auflösung ihres Problems befragt. Sie sagte, dass es Uhrmachern zu Stellung der Räder dienen könne. Das wäre dann nun für den Fall, wo ein Rad drei andere von gegebener Lage und Grösse

---

*) Wer kennt nicht die verschiedenen rein geometrischen (Euclidischen) Auflösungen, welche wir jetzt für die hier besprochene Aufgabe besitzen?

**) Nicht sehr galant einer sich eifrig mit Mathematik beschäftigenden Gräfin gegenüber.

zu treiben hätte. So gar analytische Fälle kommen aber doch bei Uhrmachern schwerlich vor.“

Hiermit schliesst der Briefwechsel. Es ist doch immer sehr interessant, zu sehen, wie eifrig sich im vorigen Jahrhunderte eine polnische Gräfin und zwei sehr gelehrte Mathematiker, von denen der eine zu den grössten Sternen des ganzen Jahrhunderts gehört, mit dem Problem von dem drei andere gegebene berühren sollenden Kreise beschäftigen konnten.

Geometrischer Ort des Mittelpunkts eines Kreises, welcher zwei gegebene Kreise berührt.

Die Linie, welche die Mittelpunkte der beiden gegebenen Kreise mit einander verbindet, nehme man als Axe der x an, und den Mittelpunkt dieser Linie als Anfang der rechtwinkligen x, y. Dann können die ersten Coordinaten der Mittelpunkte der beiden gegebenen Kreise, deren zweite Coordinaten verschwinden, durch a und $-a$ bezeichnet werden. Die Halbmesser der beiden gegebenen Kreise seien respective r und r_1. Die Coordinaten des Mittelpunkts des gesuchten Kreises wollen wir durch x, y bezeichnen. Der Halbmesser des gesuchten Kreises soll durch ϱ bezeichnet werden. Sollen nun zwischen dem gesuchten Kreise und den beiden gegebenen gleichartige Berührungen Statt finden, so haben wir die beiden folgenden Gleichungen, in denen die oberen Zeichen für äussere, die unteren für innere Berührungen gelten:

$$(r \pm \varrho)^2 = (x-a)^2 + y^2,$$

$$(r_1 \pm \varrho)^2 = (x+a)^2 + y^2;$$

also

$$r^2 \pm 2r\varrho + \varrho^2 = x^2 + y^2 + a^2 - 2ax,$$

$$r_1^2 \pm 2r_1\varrho + \varrho^2 = x^2 + y^2 + a^2 + 2ax;$$

also

$$r^2 - r_1^2 \pm 2(r-r_1)\varrho = -4ax,$$

$$\pm 2(r-r_1)\varrho = r_1^2 - r^2 - 4ax,$$

$$\varrho = \pm \frac{r_1^2 - r^2 - 4ax}{2(r-r_1)},$$

$$r \pm \varrho = r + \frac{r_1^2 - r^2 - 4ax}{2(r-r_1)} = \frac{r^2 - 2rr_1 + r_1^2 - 4ax}{2(r-r_1)} = \frac{(r-r_1)^2 - 4ax}{2(r-r_1)},$$

$$r_1 \pm \varrho = r_1 + \frac{r_1^2 - r^2 - 4ax}{2(r-r_1)} = \frac{-r^2 + 2rr_1 - r_1^2 - 4ax}{2(r-r_1)} = \frac{-(r-r_1)^2 - 4ax}{2(r-r_1)}$$

$$= -\frac{(r-r_1)^2 + 4ax}{2(r-r_1)}.$$

Folglich ist die Gleichung des Orts des Mittelpunkts des die beiden Kreise gleichartig berührenden Kreises:

$$\frac{\{(r-r_1)^2 - 4ax\}^2}{4(r-r_1)^2} = (x-a)^2 + y^2,$$

$$\tfrac{1}{4}(r-r_1)^2 - 2ax + \frac{4a^2x^2}{(r-r_1)^2} = x^2 - 2ax + a^2 + y^2,$$

$$\frac{(r-r_1)^2 - 4a^2}{(r-r_1)^2}x^2 + y^2 = \frac{(r-r_1)^2 - 4a^2}{4},$$

$$\frac{4x^2}{(r-r_1)^2} + \frac{4y^2}{(r-r_1)^2 - 4a^2} = 1,$$

$$\frac{x}{\left(\frac{r-r_1}{2}\right)^2} + \frac{y}{\left\{\frac{\sqrt{(r-r_1)^2 - 4a^2}}{2}\right\}^2} = 1 \text{ für } (r-r_1)^2 > 4a^2,$$

$$\frac{x}{\left(\frac{r-r_1}{2}\right)^2} - \frac{y}{\left\{\frac{\sqrt{4a^2 - (r-r_1)^2}}{2}\right\}^2} = 1 \text{ für } (r-r_1)^2 < 4a^2.$$

Im ersten Falle ist

$$\left(\frac{r-r_1}{2}\right)^2 - \left\{\frac{\sqrt{(r-r_1)^2 - 4a^2}}{2}\right\}^2 = \left(\frac{r-r_1}{2}\right)^2 - \left(\frac{r-r_1}{2}\right)^2 + a^2 = a^2;$$

im zweiten Falle ist

$$\left(\frac{r-r_1}{2}\right)^2 + \left\{\frac{\sqrt{4a^2 - (r-r_1)^2}}{2}\right\}^2 = \left(\frac{r-r_1}{2}\right)^2 + a^2 - \left(\frac{r-r_1}{2}\right)^2 = a^2.$$

Im ersten Falle ist der Ort eine Ellipse; die Brennpunkte sind die Mittelpunkte der beiden gegebenen Kreise; die Hauptaxe ist der absolute Werth von $r - r_1$. Im zweiten Falle ist der Ort eine Hyperbel; die Brennpunkte sind auch hier die Mittelpunkte der beiden gegebenen Kreise; die Hauptaxe ist der absolute Werth von $r - r_1$. Der Mittelpunkt des Orts ist in beiden

Fällen der Mittelpunkt der Centrallinie der beiden gegebenen Kreise.

Für ungleichartige Berührungen haben wir die beiden Gleichungen:

$$(r \pm \varrho)^2 = (x-a)^2 + y^2,$$
$$(r_1 \mp \varrho)^2 = (x+a)^2 + y^2;$$

$$r^2 \pm 2r\varrho + \varrho^2 = x^2 + y^2 + a^2 - 2ax,$$
$$r_1^2 \mp 2r_1\varrho + \varrho^2 = x^2 + y^2 + a^2 + 2ax;$$

also

$$r^2 - r_1^2 \pm 2(r+r_1)\varrho = -4ax,$$
$$\pm 2(r+r_1)\varrho = r_1^2 - r^2 - 4ax,$$
$$\varrho = \pm \frac{r_1^2 - r^2 - 4ax}{2(r+r_1)},$$

$$r \pm \varrho = r + \frac{r_1^2 - r^2 - 4ax}{2(r+r_1)} = \frac{r^2 + 2rr_1 + r_1^2 - 4ax}{2(r+r_1)} = \frac{(r+r_1)^2 - 4ax}{2(r+r_1)},$$

$$r_1 \mp \varrho = r_1 - \frac{r_1^2 - r^2 - 4ax}{2(r+r_1)} = \frac{r^2 + 2rr_1 + r_1^2 + 4ax}{2(r+r_1)} = \frac{(r+r_1)^2 + 4ax}{2(r+r_1)}.$$

Also ist die Gleichung des Orts des Mittelpunktes des die beiden Kreise ungleichartig berührenden Kreises:

$$\frac{\{(r+r_1)^2 - 4ax\}^2}{4(r+r_1)^2} = (x-a)^2 + y^2,$$

$$\tfrac{1}{4}(r+r_1)^2 - 2ax + \frac{4a^2x^2}{(r+r_1)^2} = x^2 - 2ax + a^2 + y^2,$$

$$\frac{(r+r_1)^2 - 4a^2}{(r+r_1)^2}\, x^2 + y^2 = \frac{(r+r_1)^2 - 4a^2}{4},$$

$$\frac{4x^2}{(r+r_1)^2} + \frac{4y^2}{(r+r_1)^2 - 4a^2} = 1,$$

$$\frac{x}{\left(\frac{r+r_1}{2}\right)^2} + \frac{y}{\left\{\frac{\sqrt{(r+r_1)^2 - 4a^2}}{2}\right\}^2} = 1 \quad \text{für } (r+r_1)^2 > 4a^2,$$

$$\frac{x}{\left(\frac{r+r_1}{2}\right)^2} - \frac{y}{\left\{\frac{\sqrt{4a^2 - (r+r_1)^2}}{2}\right\}^2} = 1 \quad \text{für } (r+r_1)^2 < 4a^2.$$

Im ersten Falle ist

$$\left(\frac{r+r_1}{2}\right)^2-\left\{\frac{\sqrt{(r+r_1)^2-4a^2}}{2}\right\}^2=\left(\frac{r+r_1}{2}\right)^2-\left(\frac{r+r_1}{2}\right)^2+a^2=a^2;$$

im zweiten Falle ist

$$\left(\frac{r+r_1}{2}\right)^2+\left\{\frac{\sqrt{4a^2-(r+r_1)^2}}{2}\right\}^2=\left(\frac{r+r_1}{2}\right)^2+a^2-\left(\frac{r+r_1}{2}\right)^2=a^2.$$

Im ersten Falle ist der Ort eine Ellipse, die Brennpunkte sind die Mittelpunkte der beiden gegebenen Kreise, die Hauptaxe ist $r+r_1$; im zweiten Falle ist der Ort eine Hyperbel, die Brennpunkte sind die Mittelpunkte der beiden gegebenen Kreise, die Hauptaxe ist $r+r_1$. Der Mittelpunkt des Orts ist in beiden Fällen der Mittelpunkt der Centrallinie der beiden gegebenen Kreise.

Man sieht hieraus, dass der Mittelpunkt des Kreises, welcher drei gegebene Kreise berühren soll, sich im Allgemeinen immer leicht durch den Durchschnittspunkt zweier Ellipsen, oder zweier Hyperbeln, oder einer Ellipse und einer Hyperbel construiren lässt. Wie diese Kegelschnitte selbst zu beschreiben sind und durch welche Elemente sie bestimmt werden, ergiebt sich aus dem Vorhergehenden von selbst, und bedarf natürlich hier einer weiteren Erläuterung nicht.

III.

In der Vorrede zu den von ihm herausgegebenen Logischen und philosophischen Abhandlungen. Berlin 1782. des grossen Mathematikers Johann Heinrich Lambert erzählt der frühere Berliner Astronom Johann Bernoulli von diesem in so vielen Beziehungen merkwürdigen Manne Folgendes:

„Was mir alle logischen Arbeiten Lambert's vorzüglich schätzbar machet, ist seine erstaunliche Fertigkeit, die zu einer Gewohnheit geworden, über alles logisch zu denken. Er untersuchte den geringsten häuslichen Vorfall nach eben den Regeln, nach welchen er scientifische Demonstrationen untersuchte. Leuten, die ihn nicht kannten, war es äusserst lächerlich, ihn logische Kunstwörter und Kraut und Rüben in eigentlichem Verstande untereinanderwerfen, bey einem Loch im Strumpf eine Figur in Barbara, oder bey einem Stuhlbein eine Hypothese anbringen hören. Dieser Fertigkeit alles logisch zu behandeln, hatte er die erstaunliche Leichtigkeit zu dissertiren zu danken, die jedem der mit ihm zu thun hatte auffallend war. Man kann keinen Gegenstand

sich ausdenken, den er nicht stehenden Fusses mehr oder weniger zu entwickeln im Stande war, und auf eine Weise, bey welcher seine ganze Person die grösste Ungezwungenheit ausdrückte. Immer fieng er damit an, dass er die logischen Eigenschaften des Gegenstandes aufsuchte; ihn durch seine logische Topik durchführte; dann als Prädicat oder Subject betrachtete; den Satz umkehrte u. s. w. Ich habe das Glück verschiedene philosophische und wirklich habituel scharfdenkende Männer genau zu kennen; allein Lambert liess sie hierinnen so weit hinter sich zurück, dass ich die Fertigkeit logisch zu denken für einen hervorstechenden Zug halte, der sein Genie charakterisiret.

Hierzu kommt noch, dass er mit einer so erstaunlichen Fertigkeit eine lebhafte Begierde verband, die Regeln nach welchen sie wirkte, zu entdecken, und unablässlich sich bemühete diese Regeln prakticabler und vollständiger zu machen. Es lassen sich so gar alle Gegenstände, womit er sich beschäftigte, auf zwey einzige bringen, mathematisch-physische und logische. In eine von diesen beyden Klassen gehören seine gedruckten Werke so wohl als seine hinterlassenen Handschriften. Was er ausser diesem bearbeitet, ist, die Architectonik ausgenommen, in Vergleichung mit dem andern für nichts zu achten. Ich hörte ihn auch vielmal mit Nachdruck sagen: „die Vervollkommnung der Methaphysik hänge von der Vervollkommnung der Logik ab; noch seyn wir nicht so weit, dass wir nur einmal beweisen können; noch seye fast alles dunkel u. s. w.“ Ich hatte Mühe ihn zur Herausgabe der Architectonik zu bereden: nicht so vast der Gleichgültigkeit des Publikums wegen für metaphysische Arbeiten, als weil dieses wichtige Buch in seinen eigenen Augen nicht den Werth hatte, den es wirklich hat.

Das tiefe Gefühl von der Unvollkommenheit unsrer logischen Mittel, das beständige Bedürfniss einer scientifischen Bezeichnung der Qualitäten, einer allgemeinen Analytik, einer anwendbaren Erfindungskunst, deren Möglichkeit er einsahe, trieb ihn an, die Logik nie aus dem Gesicht zu verliehren. Er hatte mir Hofnung gemacht, er werde nach Beendigung der Pyrometrie seine Schede von der Erfindungskunst vornehmen und diesen logischen Theil ausarbeiten, allein das Schicksal fand es nicht für gut, unsere Augen zu öfnen — Lambert starb als er kaum seine Pyrometrie zu Ende hatte, und noch kenne ich den Mann nicht, der uns diesen logischen Verlust ersetzen werde.“

Schreiben des Herrn J. B. Sturm zu Regensburg an den Herausgeber.

Ich bin hiemit so frei, Ihnen eine Erwiderung auf eine Bemerkung des Herrn Dr. W. Stammer im 1. Hefte XXVII. Thls. Seite 112. dieses Archives, dahin lautend, dass mein Beweis für den Satz von den Kantenwinkeln einer körperlichen Ecke zwar für die meisten Fälle ausreiche, in manchen aber nicht richtig sei, zur gütigen Aufnahme in das Archiv zu übersenden.

Das Mittelglied in meinem Beweise bildet der Satz: Wenn eine gerade Linie OO' in dem Punkte O' auf einer Ebene senkrecht steht, und es sind A und B zwei andere Punkte in dieser Ebene, so ist, wenn die Linien OA, OB und $O'A$, $O'B$ gezogen werden, nicht blos in den meisten Fällen, sondern immer

$$\angle AOB < \angle AO'B.$$

Um diesen Satz einzusehen, denke man sich in den Dreiecken AOB und $AO'B$ aus den Spitzen O und O' die Höhen gezogen; diese werden sich sodann nach einem bekannten Satze der Stereometrie in der Linie AB oder deren Verlängerung schneiden, und wird dieser Durchschnittspunkt mit C bezeichnet, so können, wenn die Ebene AOB in die Ebene $AO'B$ umgelegt wird, nur die beiden in Taf. VI. Fig. 2. und Fig. 3. verzeichneten Fälle stattfinden.

Was nun den Fall I. (Taf. VI. Fig. 2.) anbelangt, so ist auf der Stelle klar, dass

$$\angle AOB < \angle AO'B$$

ist, und um diese Ungleichheit auch im Falle II. (Taf. VI. Fig. 3.) zu begreifen, darf man nur durch die Punkte O', A und B einen Kreis gelegt denken und hierbei den im Fall I. angewendeten Schluss noch mit dem bekannten Satze von den Peripheriewinkeln in Verbindung bringen.

Wie man sieht, kömmt es also nicht darauf an, vorerst noch zu beweisen, dass man in jeder Ecke die Linie OO' so ziehen kann, dass für eine auf ihr senkrechte Ebene sämmtliche Winkel $O'AB$, $O'BA$ spitze sind, und ich schliesse mit der Bemerkung, dass es mich sehr gefreut hat, dass mein Beweis von den Kantenwinkeln einer körperlichen Ecke einer Aufmerksamkeit gewürdigt wurde, da er sich nicht blos durch Einfachheit, wie ich glaube, empfiehlt, sondern auch noch dadurch, dass das Prinzip, auf welchem er ruht, auch Anwendung findet bei dem Beweise für den Satz von den Neigungswinkeln einer körperlichen Ecke; denn denkt man sich den Neigungswinkel der beiden Seitenwände

AOB und *BOC* wirklich durch Linien dargestellt, so übersieht man augenblicklich, dass dieser Neigungswinkel grösser sei, als der Winkel *ABC*, dass somit also die Summe der Neigungswinkel der Seitenwände einer körperlichen Ecke grösser als $(n-2).2R$ sich darstelle, wenn n die Anzahl der Seitenwände ausdrückt.

Ueber den zwei und dreissigsten Satz im ersten Buche der Elemente des Euklides.

Von Herrn Professor W. Fischer am Gymnasium zu Nürnberg.

In neuerer Zeit wird vielfach die Richtigkeit der Behauptung, dass die Innenwinkel eines Dreiecks zusammengenommen $= 2R$ sind, dadurch anschaulich gemacht, dass man drei in gleichem Sinne liegende Aussenwinkel durch drehende und gleitende Bewegung eines Strahls beschreiben lässt. Diese Veranschaulichung kann meiner Meinung nach zum strengen Beweis erhoben werden, wenn man einerseits ein Paar Axiome, welche genau genommen jeder Winkelmessung zu Grunde liegen, wirklich ausspricht, andererseits nicht blos drei Aussenwinkel, sondern auch die Innenwinkel resp. einen derselben unmittelbar und statt der anderen ihre Scheitelwinkel von einem Strahl durchlaufen lässt. Der ausführlichen Darlegung des Beweises aber will ich ausser den nöthigen Axiomen einige Sätze über Winkel überhaupt vorausschicken, theils wegen der Abweichungen, welche in der Definition des Begriffs „Winkel" vorkommen, theils wegen des engen Zusammenhangs der aufgestellten Grundsätze mit der Winkellehre selbst.

§. 1. *Grundsatz.* Auf einen in einer Ebene gegebenen Strahl lässt sich ein zweiter so legen, dass beide denselben Anfangspunkt und dieselbe Richtung haben, also nach ihrer unbegrenzten Ausdehnung völlig einerlei sind. Man kann ferner den einen von den beiden Strahlen ruhen lassen, den andern aber in der Ebene um den festen, beiden Linien gemeinschaftlichen Anfangspunkt von dem ruhenden aus stetig in einerlei Sinn, d. h. fortwährend nach rechts oder fortwährend nach links drehen und in der Richtung eines jeden von jenem Punkte aus in der Ebene denkbaren Strahles feststellen.

Daher lässt sich auch die gegenseitige Lage (Verschiedenheit der Richtung) von zwei gegebenen Strahlen, die einen gemeinschaftlichen Anfangspunkt haben, immer als Resultat einer derartigen Drehung betrachten.

§. 2. *Erklärung.* a) Die fertige, in einer Ebene nach einerlei Sinn vor sich gegangene Drehung zwischen zwei Strahlen, die von einem Punkt auslaufen, um diesen Punkt, heisst Winkel — Scheitel, Schenkel (Anfangs- und Endschenkel).

b) Wenn sich nach der in §. 1. bezeichneten Weise der bewegliche Strahl aus dem ruhenden heraus um den gemeinschaftlichen Anfangspunkt stetig in einerlei Sinn so lange dreht, bis er in seine ursprüngliche Lage, d. h. in den ruhenden Strahl zurückkommt, so macht er eine volle Umdrehung.

Die fertige volle Umdrehung oder der volle Winkel stellt sich dar als ein einziger Strahl auf unbegrenzter Ebene.

c) Hat ein Strahl aus einem anderen ruhenden um den gemeinschaftlichen Anfangspunkt als Scheitel sich so lange gedreht, bis er in die rückläufige Verlängerung des ruhenden fiel, oder, was dasselbe ist, bis er die entgegengesetzte Richtung erreicht hat, so heisst der dadurch erzeugte Winkel ein gestreckter. — Ein gestreckter Winkel stellt sich dar als eine Halbebene, welche von einer durch einen Punkt getheilten Geraden einseitig begrenzt, sonst aber unendlich ist. Jener Theilungspunkt ist der Scheitel und die Strahlen der Geraden sind die Schenkel des gestreckten Winkels.

§. 3. *Grundsatz.* I. Ein Strahl kann durch keine einfachere und kürzere Bewegung aus einer gegebenen Richtung in die entgegengesetzte gelangen, als dadurch, dass er um seinen Anfangspunkt einen gestreckten Winkel beschreibt.

II. Auf einer Ebene kann ein Strahl, der eine gegebene Richtung verlässt, ohne rückläufig zu werden, durch keine einfachere und kürzere Bewegung in seine ursprüngliche Lage zurückkommen, als durch eine volle Umdrehung um seinen Anfangspunkt als festen Scheitel.

§. 4. *Lehrsatz.* Alle gestreckten Winkel sind einander gleich.

Beweis. Mögen zwei gestreckte Winkel, in einer Ebene neben einander liegend, den Scheitel und beide Schenkel gemein haben, oder mögen sie völlig getrennt sein, immer kann man den einen auf den andern so gelegt denken, dass beide den Scheitel und einen Schenkel als Anfangsschenkel gemein haben. Dann muss, weil zwei Gerade nach ihrer unendlichen Ausdehnung eine einzige bilden, so bald sie zwei Punkte mit einander gemein haben, der Endschenkel des einen Winkels von selbst mit dem des anderen Winkels zusammenfallen, woraus hervorgeht (§. 3.), dass die Drehung des erzeugenden Strahls aus dem Anfangsschenkel um den Scheitel bis in den Endschenkel bei beiden Winkeln gleich gross gewesen sein muss.

Zusatz 1. Macht ein Strahl von AB aus nach oben um den Scheitel A eine volle Umdrehung, so durchläuft er unmittelbar nach einander erst den oberen gestreckten Winkel BAC und schliesslich den unteren CAB. Da diese einander gleich sind, folgt: Jeder gestreckte Winkel ist die Hälfte einer vollen Umdrehung.

Zusatz 2. Alle vollen Winkel, die durch eine einmalige Umdrehung beschrieben wurden, sind einander gleich.

Erklärung von hohlen, erhabenen, rechten Winkeln u. s. f. wie gewöhnlich.

§. 5. *Grundsatz.* Bei zwei Strahlen, die in verschiedenen Richtungen von einem Punkte auslaufen, ist keine einfachere und kürzere Bewegung aus dem einen in den anderen denkbar als die Drehung, wodurch der hohle Winkel zwischen ihnen erzeugt wird.

Anmerkung. Dieser Satz und der in §. 3. I. ist analog dem, den bereits Archimed als Axiom hinstellte: Der kürzeste Weg von einem Punkte zu einem anderen ist die durch beide Punkte begrenzte Gerade. Und wie der oben erwähnten Eigenschaft halber begrenzte Gerade als Grundmaasse für alle Längen gebraucht werden, so spricht meiner Meinung nach der obige Satz den Grund aus, warum von jeher alle Lagenunterschiede durch Messung geradliniger Winkel bestimmt wurden.

§. 6. *Lehrsatz.* Bei jedem Dreieck ist die Summe der drei Innenwinkel gleich einem gestreckten Winkel oder $=2R$.

Beweis. Bei einem ΔABC (Taf. VI. Fig. 4.), dessen Innenwinkel durch α, β, γ bezeichnet sein sollen, seien die Verlängerungen BD, CE, AF der Seiten AB, BC, CA gezogen, so dass die zusammengehörigen Aussenwinkel x, y, z entstehen.

Man denke sich einen Strahl, der seinen Anfangpunkt M in A und die nämliche Richtung wie AB hat. Derselbe liegt dann auch in der Richtung von BD, weil BD die Verlängerung von AB ist; er wird daher, wenn er in AD fortrückt, bis M auf B fällt, nach dieser Bewegung völlig einerlei sein mit BD, und zwar ohne eine Drehung gemacht zu haben.

Durchläuft hierauf der Strahl den Winkel x, so erreicht er die Richtung der Seite BC, mithin auch ihrer Verlängerung CE, muss also, wenn er in BE sich fortbewegt, bis M in C ist, ohne neue Drehung völlig einerlei werden mit CE. Dreht sich der Strahl aus seiner jetzigen Lage um den Punkt M in C im vorigen Sinne weiter, so muss er einmal in der Richtung der Seite CA anlangen und kann in dieser festgehalten werden. Er hat dann von CE aus den Winkel y durchlaufen und zugleich die Richtung von AF als der Verlängerung von CA erreicht, wird demnach ohne neue Drehung völlig einerlei werden mit AF, so bald er in CF fortrückt, bis M auf A kommt.

Setzt er dann seine Drehung um den Punkt M in A im vorigen Sinne fort, so kommt er endlich in seine anfängliche Richtung AB zurück. In dieser festgehalten hat er von AF aus den Winkel z durchlaufen.

An sich betrachtet ist die gesammte Drehung des Strahls $=x+y+z$.

Dieselbe kann aber, da sie zwar um drei verschiedene Punkte, jedoch fortwährend in einerlei Sinn vor sich ging, und da der bewegliche Strahl schliesslich in seine ursprüngliche Lage zurück-

kam, unmöglich (§. 3. II.) kleiner sein, als eine volle Umdrehung um einen einzigen Punkt. Folglich ist jedenfalls

1) $x+y+z$ nicht kleiner als $4R$,

obwohl man wegen Ermangelung eines gemeinschaftlichen Scheitels vorläufig $x+y+z$ noch nicht $=4R$ setzen kann.

Nun ist $x+y+z+\alpha+\beta+\gamma=6R$. Wäre $\alpha+\beta+\gamma>2R$, so müsste $x+y+z<4R$ sein. Da dies nach 1) unmöglich ist, so folgt für die Summe der Innenwinkel

2) $\alpha+\beta+\gamma$ nicht grösser als $2R$.

Demnach bleibt zu beweisen übrig, dass $\alpha+\beta+\gamma$ auch nicht kleiner als $2R$ sein kann. — Man ziehe die Verlängerungen AG und BH der Seiten BA und CB und denke sich einen Strahl, der seinen Anfangspunkt N in A und die nämliche Richtung wie AG hat. Diesen Strahl lasse man zunächst den $\angle GAF$ durchlaufen. Sobald er in AF angelangt ist, schiebe man ihn rückwärts so, dass sein Anfangspunkt N nach C kommt, aber der Punkt A in ihm bleibt. Er hat dann die Richtung CA, mithin, weil AF die Verlängerung von CA ist, noch die nämliche wie AF, weshalb zur Drehung GAF keine neue hinzugekommen sein kann. Wird der Strahl aus seiner jetzigen Lage CAF um N in C im vorigen Sinne weiter gedreht, so fängt er sogleich an den $\angle\gamma$ zu beschreiben, gelangt, wenn er γ durchlief, in die Richtung der Seite CB, so wie ihrer Verlängerung BH, und wird, in CH fortgleitend, bis N auf B kommt, einerlei mit BH, ohne dass zu den Drehungen GAF und γ eine neue hinzugekommen wäre. Sobald er aber aus BH um N in B die Drehung im vorigen Sinn fortsetzt, beginnt er den $\angle HBD$ zu beschreiben, und langt, wenn er diesen durchlaufen hat, in BD an. Offenbar ist die gesammte Drehung des Strahls $=\angle GAF+\gamma+\angle HBD$.

Da aber der Strahl aus der Richtung AG in die entgegengesetzte BD kam, so ist es unmöglich (§. 3. I.), dass seine gesammte Drehung kleiner sei als eine halbe Umdrehung um einen einzigen Punkt; folglich ist $\angle GAF+\gamma+\angle HBD$, oder wegen $GAF=\alpha$ und $HBD=\beta$:

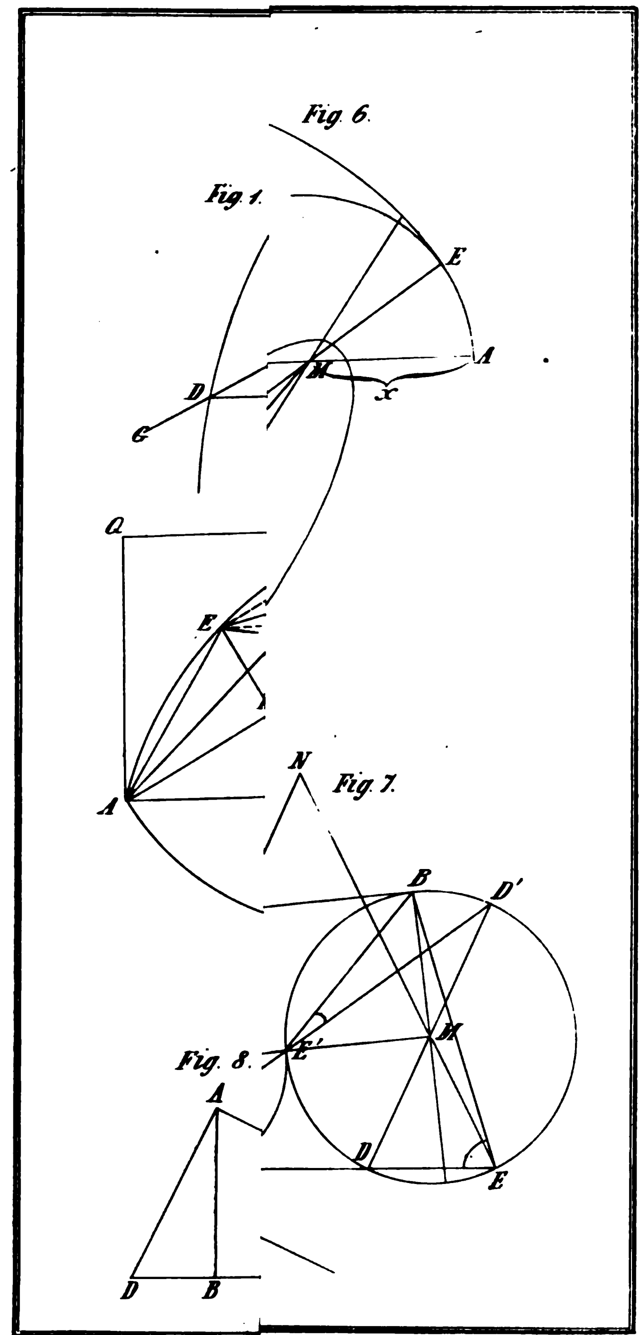
3) $\alpha+\beta+\gamma$ nicht kleiner als $2R$.

Aus 2) und 3) geht schliesslich hervor:

$$\alpha+\beta+\gamma=2R.$$

So wie der erste Theil des vorliegenden Beweises an sich nicht neu ist, so wurde ich auf den zweiten durch eine Anmerkung geführt, die Crelle in seiner Uebersetzung von Legendre's Geometrie dem dortigen Beweise desselben Lehrsatzes beifügt.

Die Verknüpfung beider Theile aber in der obigen Weise und die Begründung des Beweises durch die Axiome in §. 3. dürften neu sein. Nun glaube ich gerade durch diese Hilfsmittel dem Beweise eine solche Schärfe gegeben zu haben, dass der treffende Lehrsatz als sicheres Fundament der Parallelentheorie gebraucht werden kann.


Fig. 6.
Fig. 1.
E
A
M
x
D
G
Q
E
A
N
Fig. 7.
B
D'
M
E'
Fig. 8.
A
D
E
D
B

XX.

Ein Beitrag zur Analysis der complexen Zahlen.

Von

Herrn *W. Denzler*

zu Küsnach bei Zürich.

Schon seit längerer Zeit beschäftigt mich die Aufgabe, die Gesetze, welche die Analysis für reelle Zahlen begründet hat, in Beziehung auf complexe Zahlen zu untersuchen, und hiebei geometrische Evidenz in Euklideischer Weise anzustreben. So sehr ich es nun auch bedaure, dass meine Arbeiten in dieser Richtung mich erst bis zur Untersuchung des Restes der Taylor'schen Reihe mit complexen Variabeln führten, ebenso sehr freue ich mich der erlangten geometrischen Einsicht in die Analysis der complexen Zahlen, deren Behandlung in den Lehrbüchern noch immer so Vieles zu wünschen übrig lässt. Der Gang dieser Arbeiten war folgender: Vorerst betrachtete ich die Gesetze der Verbindung complexer Zahlen durch Addition, Multiplikation und die zugehörigen inversen Operationen. In Beziehung auf diesen Abschnitt will ich, da die Resultate bekannt sind, die Entwicklung dieser Resultate aber allein schon den Raum einer Abhandlung fordert, nur Folgendes mittheilen:

1. Ich suchte die Erklärung der Addition und Multiplikation so zu geben, dass diese die bekannten Erklärungen für reelle Zahlen als besondere Fälle enthielten.

2. Ich hielt es für unerlässlich, die Richtigkeit der Ansicht von Gauss nachzuweisen, dass nämlich, wenn die Bilder der

reellen Zahlen in einer und derselben Geraden gedacht werden, die Bilder der Seitenzahlen nothwendig in Perpendikeln auf diese Gerade liegen müssen.

3. Es gelang mir, die Begründung der Gesetze in diesem Abschnitt nur sehr einfachen geometrischen Betrachtungen zu entnehmen.

Nach Beendigung dieses Abschnittes zog ich dann die Gesetze der Verbindung complexer Zahlen durch Potenzirung und die zugehörigen inversen Operationen in Betracht und gelangte hiebei zu folgenden Sätzen:

§. 1. Erklärungen.

1. Bedeutet p irgend eine reelle Zahl, so bezeichne ich mit $\underline{p}$ den Quotienten aus p durch den absoluten Werth von p. Ist $p=0$, so verstehe ich in diesem Falle unter $\underline{p}$ durchaus nichts anderes als die absolute Einheit, so dass durch diese Annahme das $\underline{p}$ immer eine bestimmte Bedeutung hat und nur eindeutig ist.

2. Durch ${}_0\sqrt[m]{a}$, wo a eine absolute Zahl und m eine positive oder negative ganze Zahl, deute ich die absolute Zahl an, die mit m potenzirt a gibt. Diese Bezeichnung ist, wie die Folge zeigen wird, nur ein besonderer Fall einer allgemeinern von mir angenommenen Bezeichnungsweise.

3. Arg$(p+qi)$, wo p und q reell, bezeichnet jeden Bogen, dessen Sinus $=\frac{q}{{}_0\sqrt{p^2+q^2}}$ und dessen Cosinus $=\frac{p}{{}_0\sqrt{p^2+q^2}}$; arg$(p+qi)$ aber stellt denjenigen besondern Werth von Arg$(p+qi)$ dar, der entweder $=\pi$ ist oder zwischen π und $-\pi$ liegt. Das Bild von arg$(p+qi)$ in der Zahlebene ist der Kreisbogen, dessen Mittelpunkt der Nullpunkt, der einerseits von der positiven Zahllinie und anderseits von dem Gauss'schen Zahlort der Complexen $p+qi$ begrenzt ist, und der, wenn $q=0$ und p negativ ist, auf derjenigen Seite von der reellen Zahllinie liegt, wo sich die Bilder der positiven Seitenzahlen befinden. Mod.$(p+qi)$ bezeichnet die absolute Zahl, die quadrirt p^2+q^2 gibt; das Bild dieses Modulus in der Zahlebene ist die Gerade aus dem Nullpunkt nach dem Zahlort von $p+qi$.

4. arc. sin$p$, wo p reell und $p^2\leqq 1$, bedeutet den einzigen Bogen, dessen Sinus $=p$ und dessen absoluter Werth $\frac{\pi}{2}$ nicht

übersteigt; arc. cos p bezeichnet den einzigen π nicht übersteigenden positiven Bogen, dessen Cosinus $=p$; arc.tang$p$ und arc.cot$p$, wo p reell, bedeutet den Bogen, dessen Tangente oder Cotangente $=p$ und dessen absoluter Werth $\frac{\pi}{2}$ nicht übersteigt. Soll jeder Bogen, dessen sin., cos., tang., cot. $=p$, vorgestellt werden, so schreibe ich Arc. anstatt arc.

§. 2. Lehrsätze.

Bezeichnen a und b reelle Zahlen, so ist

1) $$\text{Arg}(a+bi) = 2\gamma\pi + \arg(a+bi),$$

wo γ sowohl 0, als auch jede positive und jede negative ganze Zahl darstellt.

2) $$\arg(a+bi) = \underset{\smile}{b}(1-\underset{\smile}{a})\frac{\pi}{2} + \text{arc. tang}\,\frac{b}{a}$$

3) $$= \underset{\smile}{b}(1-\underset{\smile}{a})\frac{\pi}{2} + \underset{\smile}{a}\,\text{arc. sin}\,\frac{b}{{}_0\sqrt{a^2+b^2}}$$

4) $$= \underset{\smile}{b}\,\text{arc. cos}\,\frac{a}{{}_0\sqrt{a^2+b^2}}.$$

§. 3. Erklärungen und Lehrsätze.

1. Mit E^x, wo x irgend eine complexe Zahl, bezeichne ich die Exponentialreihe

$$1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots,$$

mithin nicht die Potenz e^x, die im Allgemeinen vieldeutig ist. Da die Reihe E^x für jeden angebbaren complexen Werth von x convergirt, so wird E^x immer eine bestimmte angebbare Complexe sein.

2. la, wo a eine reelle Zahl, bezeichne die einzige reelle Zahl, mit der e oder die irrationale Zahl 2,71828.... potenzirt, a gibt.

log$(p+qi)$ aber, wo p und q reell, bezeichnet jede Zahl, die in E^x für x gesetzt, diesem E^x den Werth $p+qi$ gibt.

3. Bezeichnet γ die Null, so wie auch jede positive und jede negative Zahl, p und q reelle Zahlen, so hat man die Gleichung

$$\log(p+qi) = \tfrac{1}{2}l(p^2+q^2) + [2\gamma\pi + \arg(p+qi)]i.$$

4. Mit ${}_\tau\log(p+qi)$ bezeichne ich den speciellen Werth

$$\tfrac{1}{2}l(p^2+q^2) + [2\tau\pi + \arg(p+qi)]i.$$

Diese eindeutige Grösse ${}_\tau\log(p+qi)$ vermag übrigens, insofern man noch für τ die Null und jede positive oder negative ganze Zahl annehmen kann, jeden Werth von $\log(p+qi)$ auszudrücken.

§. 4. Lehrsätze und Erklärungen.

1. Unter $(p+qi)^{\frac{n}{m}}$, wo n und m absolute ganze Zahlen, verstehe ich die $n$te Potenz jeder Zahl, deren $m$te Potenz $p+qi$ ist. Diese Potenz ist daher im Allgemeinen von dem keineswegs gleichbedeutenden Ausdruck $\sqrt[m]{(p+qi)^n}$ wohl zu unterscheiden. Die Gleichung

$$(p+qi)^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{(p+qi)^{\frac{n}{m}}}$$

stellt die Erklärung der Potenzirung irgend einer Zahl mit einem negativen Bruche dar.

Den Quotienten aus einer eindeutigen Potenz, und, wenn die Potenz vieldeutig ist, aus irgend einem bestimmten besondern Werthe einer Potenz durch sich selbst werde ich auch durch die 0te Potenz desselben Dignanden ausdrücken, so dass $(p+qi)^0$ stets eindeutig genommen ist, und wenn $p+qi$ nicht 0, die Einheit bedeutet. Der Fall, da auch $p+qi=0$, muss in der Rechnung stets besonders untersucht werden.

2. Bezeichnen wieder p, q und σ positive oder negative reelle Zahlen, γ eine unendlich vieldeutige Zahl, welche 0, sowie auch jede positive und jede negative ganze Zahl zu ihren Werthen hat, endlich n und m positive oder negative ganze Zahlen, deren absolute Werthe zu einander relative Primzahlen sind, so ist die Gleichung

$$(p+qi)^{\frac{n}{m}} = E^{\frac{n}{m}\log(p+qi)}$$

$$= E^{\frac{n}{2m}l(p^2+q^2)} \cdot \{\cos[\tfrac{n}{m}[2\gamma\pi + \arg(p+qi)]] + \sin[\tfrac{n}{m}(2\gamma\pi + \arg(p+qi))]i\}$$

$$= (p+qi)^{\frac{n\sigma}{m\sigma}}$$

eine vollkommene, d. h. eine solche, in welcher die Werthe von irgend einem der vier Theile auch zugleich die Werthe von jedem der übrigen Theile sind; und jeder dieser vier Theile hat nicht mehr und nicht weniger als m verschiedene Werthe.

In Beziehung auf den Beweis dieses Lehrsatzes nur folgende Andeutungen: Wer sich den Zahlort von $p+qi$, ferner die Bedeutung von $(p+qi)^{\frac{1}{m}}$, wo m vorerst positiv sein soll und die Erklärung von der Multiplikation klar denkt, der wird gewiss sogleich finden, dass die Zahlorte von m verschiedenen Werthen der Potenz $(p+qi)^{\frac{1}{m}}$ in einem und demselben Kreisumfang liegen, der in der Zahlebene um den Nullpunkt als Mittelpunkt beschrieben ist und dessen Radius

$$=\varepsilon._0\sqrt[m]{\mathrm{Mod}(p+qi)}=\varepsilon.E^{\frac{1}{2m}l(p^2+q^2)},$$

wo ε die, die absolute Einheit in der Zahlebene vorstellende Gerade ist; und dass die Argumente dieser Zahlorte folgende sind:

$$\frac{\arg(p+qi)}{m},\ \frac{2\pi+\arg(p+qi)}{m},\ \frac{2.2\pi+\arg(p+qi)}{m},\ \ldots.$$
$$\ldots,\ \frac{2(m-1)\pi+\arg(p+qi)}{m}.$$

Ferner käme man bei der Annahme, die Zahl der verschiedenen Werthe von $(p+qi)^{\frac{1}{m}}$ sei grösser als m, sehr leicht auf den Schluss, dass es entweder verschiedene Bogen gäbe, die $m$mal genommen $\arg(p+qi)$ ausmachten, oder dann ein Bogen existirte, der mit m multiplizirt eine solche ganze Anzahl von ganzen Peripherieen gäbe, die zwischen zwei nur um eine Einheit verschiedenen ganzen Zahlen läge. Von jetzt an könnte der Beweis mit Zuziehung eines bekannten Satzes aus der Theorie der Primzahlen leicht vervollständigt werden.

Für den Fall, da $m=1$, hat der Beweis gar keine Schwierigkeiten.

§. 5. Erklärungen und Lehrsätze.

1. Bezeichnen α, β, p und q reelle Zahlen, so nehmen wir nach dem Vorgange Ohm's für den Fall, dass β nicht 0, die Gleichung

$$(p+qi)^{\alpha+\beta i}=E^{(\alpha+\beta i)\log(p+qi)},$$

die dann, wenn $\beta=0$, entweder die bereits gegebene Erklärung von $(p+qi)^0$, oder dann den Lehrsatz in §. 4. ausdrückt, als Darstellung der Erklärung von der Potenzirung irgend einer Zahl mit einer Complexen zu.

II. Den speciellen Werth $E^{(\alpha+\beta i)_\tau \log(p+qi)}$ von $(p+qi)^{\alpha+\beta i}$ bezeichne ich mit ${}_\tau(p+qi)^{\alpha+\beta i}$, welcher Ausdruck offenbar noch jeden der speziellen Werthe von $(p+qi)^{\alpha+\beta i}$ vorstellen kann.

III. Wenn $\arg(p+qi)=\varphi$, $\text{Mod.}(p+qi)=m$, und γ eine unendlich vieldeutige Zahl bezeichnet, die 0 und jede positive, sowie auch jede negative ganze Zahl zu ihren Werthen hat, so ist die Gleichung

1) $$(p+qi)^{\alpha+\beta i}=E^{\alpha lm-\beta(2\gamma\pi+\varphi)+[\beta lm+\alpha(2\gamma\pi+\varphi)]i}$$

$$=E^{\alpha lm-\beta(2\gamma\pi+\varphi)}[\cos[\beta lm+\alpha(2\gamma\pi+\varphi)]+i\sin[\beta lm+\alpha(2\gamma\pi+\varphi)]]$$

eine vollkommene, und ebenso die Gleichung

2) $$(p+qi)^{-\alpha-\beta i}=\frac{1}{(p+qi)^{\alpha+\beta i}},$$

woraus aber nicht geschlossen werden darf, dass

$$(p+qi)^{\alpha+\beta i}.(p+qi)^{-\alpha-\beta i}=1$$

sei, da diese Gleichung offenbar eine unvollkommene wäre. Uebrigens erkennt man schon bei dem einfachen Produkt

$$4^{\frac{1}{2}}.4^{-\frac{1}{2}} \text{ oder } \frac{4^{\frac{1}{2}}}{4^{\frac{1}{2}}},$$

dass dieses nicht bloss den Werth 1, sondern auch den Werth -1 hat.

IV. Sämmtliche Werthe der Potenz $(p+qi)^{\alpha+\beta i}$ werden auch erhalten, wenn man irgend einen speziellen Werth von $(p+qi)^{\alpha+\beta i}$, z. B. ${}_\tau(p+qi)^{\alpha+\beta i}$, mit allen Werthen von

$$1^{\alpha+\beta i}=E^{(\alpha+\beta i)\log 1}=E^{2\gamma\pi i(\alpha+\beta i)}$$

multiplizirt, und es ist daher

1) $$(p+qi)^{\alpha+\beta i}={}_\tau(p+qi)^{\alpha+\beta i}.1^{\alpha+\beta i}$$

eine vollkommene Gleichung, da offenbar

$$2\gamma\pi i + {}_{\tau}\log(p+qi) = \log(p+qi).$$

Diese letztere Gleichung findet aber auch nach Weglassung des τ statt, und es ist daher auch

2) $$(p+qi)^{\alpha+\beta i} = (p+qi)^{\alpha+\beta i} \,.\, 1^{\alpha+\beta i}.$$

§. 6. Lehrsatz.

Entwickelt man nach dem binomischen Lehrsatz die Potenz $[1+(p+qi)]^{\alpha+\beta i}$, so drückt die dadurch erhaltene Reihe in allen Fällen ihrer Convergenz den speziellen Werth

$$_0(1+p+qi)^{\alpha+\beta i} \text{ von } (1+p+qi)^{\alpha+\beta i}$$

aus.

Ich habe den Beweis dieses Lehrsatzes wiederholt und so genau mit Rücksicht auf jede Einzelnheit geprüft, dass ich in der That nicht einsehen kann, was Ohm in seinem „Geist der mathem. Analysis. 1842. p. 143.“ in folgendem Satze behauptet: „die binomische Reihe drückt natürlich nur einen der Werthe von $(1+p+qi)^{\alpha+\beta i}$ aus, aber man müsste erst in jedem Falle noch untersuchen, welcher der Werthe es ist, und man darf daher nicht so geradezu behaupten, dass man den einfachsten Werth dieser Potenz habe. Wenn aber $q = \beta = 0$, dann ist es keinem Zweifel unterworfen, dass der Werth dieser Binomialreihe der einfachste (nämlich der reelle) Werth von $(1+p)^{\alpha}$ ist.“ Es scheint hieraus die Ansicht von Ohm hervorzugehen, dass, wenn q und β nicht Nullen sind, die binomische Reihe nicht immer den Werth $_0(1+p+qi)^{\alpha+\beta i}$, oder nach seiner Terminologie den einfachsten Werth gebe, was nach meinen Untersuchungen, deren Mittheilung jetzt zu viel Raum fordern würde, unrichtig wäre.

§. 7. Erklärungen und Lehrsätze.

I. Irgend eine Zahl $p+qi$, sei sie reell oder complex, mit einer zweiten Zahl $\alpha+\beta i$ derselben Art depotenziren, heisst alle die Zahlen bestimmen, die, mit der zweiten potenzirt, Werthe geben, von welchen einer mit der ersten jener zwei Zahlen coincidirt. Das im Allgemeinen unendlich vieldeutige Ergebniss dieser Depotenzirung bezeichne ich mit $\sqrt[\alpha+\beta i]{p+qi}$.

II. Lehrsatz. Bezeichnen p und q, α und β reelle Zahlen, γ die unendlich vieldeutige Zahl, die 0 und jede positive oder

negative ganze Zahl zu ihren Werthen hat, ist endlich $\varphi = \arg(p+qi)$ und $m = \text{Mod.}(p+qi)$, so hat man folgende vollkommene Gleichung:

$$1)\quad \sqrt[\alpha+\beta i]{p+qi} = (p+qi)^{\frac{1}{\alpha+\beta i}} = E^{\frac{\alpha lm+\beta(2\gamma\pi+\varphi)}{\alpha^2+\beta^2} + \frac{-\beta lm+\alpha(2\gamma\pi+\varphi)}{\alpha^2+\beta^2}i},$$

d. h. mit Rücksicht auf die zwei ersten Theile dieser Gleichung: Jede complexe Zahl, deren $(\alpha+\beta i)$te Potenz $p+qi$ zu einem Werthe hat, ist unter den Werthen von $(p+qi)^{\frac{1}{\alpha+\beta i}}$ enthalten, und jeder Werth von $(p+qi)^{\frac{1}{\alpha+\beta i}}$ ist eine Zahl, deren $(\alpha+\beta i)$te Potenz $p+qi$ zu einem Werthe hat.

Aus 1) darf man aber nicht schliessen, dass

$$[(p+qi)^{\frac{1}{\alpha+\beta i}}]^{\alpha+\beta i} = p+qi,$$

welche Gleichung möglichst unvollkommen wäre.

Ferner ist auch folgende Gleichung eine vollkommene:

$$2)\quad \sqrt[\alpha+\beta i]{(p+qi).1^{\alpha+\beta i}} = (p+qi)^{\frac{1}{\alpha+\beta i}},$$

und aus dieser kann man jetzt auf die vollkommene Gleichung schliessen:

$$3)\quad (p+qi).1^{\alpha+\beta i} = [(p+qi)^{\frac{1}{\alpha+\beta i}}]^{\alpha+\beta i}.$$

III. Den speziellen Werth ${}_{r}(p+qi)^{\frac{1}{\alpha+\beta i}}$ von $\sqrt[\alpha+\beta i]{p+qi}$ stellen wir durch ${}_{r}\sqrt[\alpha+\beta i]{p+qi}$ dar, welcher Ausdruck offenbar noch jeden Werth jenes Radikals vorzustellen geeignet ist.

Nach dieser Bezeichnung ist

$${}_{0}\sqrt{4} = {}_{2\gamma}\sqrt{4} = -{}_{2\gamma+1}\sqrt{4} = 2.$$

§. 8. Erklärungen und Lehrsätze.

1) Irgend eine Zahl p_1+q_1i durch eine zweite $p+qi$ logarithmiren heisst, jede Zahl bestimmen, mit welcher $p+qi$ potenzirt eine Potenz gibt, die p_1+q_1i zu einem Werthe hat. Das Ergebniss der Logarithmation wird durch $\overset{p+qi}{\log}(p_1+q_1i)$ bezeichnet.

2) Die Gleichung

$$\overset{p+qi}{\log}(p_1+q_1i)=\frac{\log(p_1+q_1i)}{\log(p+qi)}.$$

ist eine vollkommene. Hieraus aber folgt keineswegs, dass auch

$$(p+qi)^{\frac{\log(p_1+q_1i)}{\log(p+qi)}}=p_1+q_1i$$

eine vollkommene Gleichung ist, obschon $p+qi$, mit jedem Werthe von $\frac{\log(p_1+q_1i)}{\log(p+qi)}$ potenzirt, eine Potenz erzeugt, unter deren Werthen sich auch p_1+q_1i befindet. Hingegen ist die Gleichung

$${}_{\tau}(p+qi)^{\frac{\log(p_1+q_1i)}{{}_{\tau}\log(p+qi)}}=p_1+q_1i$$

eine vollkommene.

3) Den Quotienten $\frac{\log(p_1+q_1i)}{{}_{\tau}\log(p+qi)}$ bezeichne ich mit

$$\overset{{}_{\tau}p+qi}{\log}(p_1+q_1i),$$

so dass dieser Ausdruck jede Zahl darstellt, mit welcher $p+qi$ potenzirt immer p_1+q_1i gibt, insofern bei dieser Potenzirung stets nur derjenige spezielle Werth heraus gehoben wird, der dem Index τ der Potenz angehört.

4) Die Gleichung

$${}_{\tau_1}\overset{{}_{\tau}p+qi}{\log}(p_1+q_1i)=\frac{{}_{\tau_1}\log(p_1+q_1i)}{{}_{\tau}\log(p+qi)}$$

stellt die Erklärung des ersten Theils derselben dar. Diese eindeutige Grösse ${}_{\tau_1}\overset{{}_{\tau}p+qi}{\log}(p_1+q_1i)$, welche übrigens, so lange für τ und τ_1 nicht bestimmte Zahlen gesetzt sind, noch jeden Werth von $\overset{p+qi}{\log}(p_1+q_1i)$ auszudrücken vermag, ist offenbar das, womit $p+qi$ potenzirt, p_1+q_1i gibt, wenn nämlich τ der Index des Ergebnisses jener Potenzirung ist, d. h. man hat:

$${}_{\tau}(p+qi)^{{}_{\tau_1}\overset{{}_{\tau}p+qi}{\log}(p_1+q_1i)}=p_1+q_1i.$$

5) Wenden wir diese Erklärungen und Lehrsätze auf die Logarithmen mit der Basis e oder 2,71828.... an, so gelangen wir

zu folgenden Gleichungen, in welchen $m_1 = \text{Mod.}(p_1 + q_1 i)$ und $\varphi_1 = \arg(p_1 + q_1 i)$:

$$\overset{e}{\log}(p_1 + q_1 i) = \frac{\log(p_1 + q_1 i)}{\log e}.$$

Dabei ist:

$$\tau e^{\frac{\log(p_1 + q_1 i)}{\tau \log e}} = p_1 + q_1 i,$$

$$\overset{\tau e}{\log}(p_1 + q_1 i) = \frac{\log(p_1 + q_1 i)}{\tau \log e},$$

$$_{\tau_1}\overset{\tau e}{\log}(p_1 + q_1 i) = \frac{_{\tau_1}\log(p_1 + q_1 i)}{\tau \log e}$$

$$= \frac{l m_1 + 2\tau\pi(2\tau\pi + \varphi_1)}{1 + (2\tau\pi)^2} + i\frac{2\tau_1\pi + \varphi_1 - 2\tau\pi l m_1}{1 + (2\tau\pi)^2}.$$

6) Wir sehen hieraus, dass jeder Logarithmus eine Funktion des Logarithmanden, der Basis und zweier von einander unabhängigen Unbestimmten ist, und der früher betrachtete nur von einer Unbestimmten abhängende $\log(p + qi)$ nicht jeden Werth vorstellt, mit dem e potenzirt eine Potenz erzeugt, unter deren Werthen sich $p + qi$ befindet; wie diess übrigens auch leicht schon aus dem Umstande erhellet, dass E^x eben nicht $= e^x$, sondern, wenn x eindeutig, lediglich nur den einzigen Werth von e^x ausdrückt, den die Exponentialreihe $1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \ldots$ gibt. So ist z. B. $-_0\sqrt{e}$ oder $-_0 e^{\frac{1}{2}}$ ein Werth von $e^{\frac{1}{2}}$, mithin $\frac{1}{2}$ ein besonderer Werth des Logarithmus von $-_0\sqrt{e}$ in Beziehung auf die Basis e. Aber $\frac{1}{2}$ ist nicht ein Werth von $\log -_0\sqrt{e}$ oder von $\frac{1}{2} + (2\gamma + 1)\pi i$, wohl aber ein Werth von $\overset{e}{\log} -_0\sqrt{e}$. Es ist nämlich

$$_{\tau_1}\overset{1+2\tau_1 e}{\log} -_0\sqrt{e} = \tfrac{1}{2}.$$

§. 9. Lehrsätze.

Die Begründung der in den folgenden Paragraphen enthaltenen Resultate meiner Arbeiten liess mich zwei Sätze finden, die ich hier eben um des Folgenden willen mittheile:

1) Bezeichnen $a, b, c, d \ldots$ eindeutige positive oder negative ganze Zahlen;

ε eine ganze Zahl über 1, die zum grössten gemeinschaftlichen Faktor n der absoluten Werthe von $a, b, c, d \ldots$ eine relative Primzahl ist;

$\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \ldots$ jede derselben eine unendlich vieldeutige Zahl, die ausser der Null jede positive und jede negative ganze Zahl zu ihren Werthen hat:

so ist der Quotient

$$\frac{a\gamma + b\gamma_1 + c\gamma_2 + d\gamma_3 \ldots}{\varepsilon}$$

eine Summe aus zwei Summanden, von welchen der eine unendlich vieldeutig, aber immer eine positive oder negative ganze Zahl oder 0 ist, der zweite Summand aber nur εdeutig ist, und folgende ε Werthe enthält:

$$\frac{0}{\varepsilon},\ \frac{1}{\varepsilon},\ \frac{2}{\varepsilon},\ \frac{3}{\varepsilon} \ldots \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}.$$

2) Bezeichnet a eine positive ganze Zahl;

b eine $n$deutige Zahl reelle Zahl mit den Werthen b_1, b_2, $b_3 \ldots b_n$;

γ eine unendlich vieldeutige Zahl, die 0 und jede positive oder negative ganze Zahl zu ihren Werthen hat:

so ist die Exponentialreihe

$$E^{(\frac{\gamma}{a}+b)2\pi i}\ ^{*)}$$

(ag)deutig, wo g eine positive n nicht übersteigende ganze Zahl bezeichnet.

§. 10.

Wenn man bei der Rechnung mit unendlich vieldeutigen Grössen stets vollkommene Gleichungen anstrebt, wie sich dieses zur Erzielung richtiger Resultate oft durchaus nicht vermeiden

---

*) $E^{(\frac{\gamma}{a}+b)2\pi i}$ ist immer wohl zu unterscheiden von der Potenz

$$e^{(\frac{\gamma}{a}+b)2\pi i},$$

die in diesem Falle unendlich vieldeutig wäre.

lässt; so wird man bald finden, welche grosse Vorsicht die Rechnung verlangt, und wie unendlich verschieden diese von der Rechnung mit eindeutigen Grössen ist. Bezeichnen z. B. γ und γ_1 vieldeutige, hingegen ε und ε_1 eindeutige Grössen, so darf man offenbar für $\gamma-\gamma$ nicht 0, für $2\gamma-\gamma$ nicht γ, für $\frac{\gamma}{\gamma}$ nicht 1, für $\frac{2\gamma}{3\gamma}$ nicht $\frac{2}{3}$ u. s. f. setzen; man darf ferner aus der vollkommenen Gleichung

$$\gamma+\varepsilon=\gamma_1 \text{ nicht auf } \varepsilon=\gamma_1-\gamma,$$

$$\frac{\varepsilon}{\gamma}=\gamma_1 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \varepsilon=\gamma\gamma_1 \text{ u. s. f.}$$

schliessen.

Dieser Umstand brachte mich auf den Gedanken, die Rechnung mit vieldeutigen Grössen auf eine solche mit eindeutigen zu reduziren. Die Realisirung dieses Gedankens führte mich dann zur Beantwortung der Frage: Wenn man irgend eine vollkommene Gleichung zwischen vieldeutigen Grössen hat, z. B.

$$\text{Arc.}\cos(p+qi)+\text{Arc.}\cos(p_1+q_1 i)$$
$$=\text{Arc.}\cos[(p+qi)(p_1+q_1 i)-\sqrt{[1-(p+qi)^2][1-(p_1+q_1 i)^2]}],$$

wie lässt sich dann jeder spezielle Werth des einen Theils der Gleichung mit der nöthigen Bestimmtheit herausheben, und wie kann der herausgehobene Werth dem andern Theile der Gleichung entnommen werden? Solche Gleichungen, welche die vollständige Antwort auf diese Frage geben, will ich gesonderte Gleichungen heissen.

§. 11. Lehrsätze.

I. Bezeichnen p, q, α und β reelle Zahlen überhaupt, hingegen τ und τ_1 nur positive oder negative ganze Zahlen, 0 nicht ausgeschlossen, so hat man die gesonderte Gleichung:

1) $\quad {}_{\tau}(p+qi)^{\alpha+\beta i}\,.\,{}_{\tau_1}(p+qi)^{\alpha_1+\beta_1 i}={}_{\tau}(p+qi)^{\alpha+\beta i+\alpha_1+\beta_1 i}\,.\,{}_{\tau-\tau_1}1^{\alpha+\beta i},$

2) $\quad {}_{\tau}(p+qi)^{\alpha+\beta i+\alpha_1+\beta_1 i}.={}_{\tau}(p+qi)^{\alpha+\beta i}\,.\,{}_{\tau}(p+qi)^{\alpha_1+\beta_1 i}.$

Die Gleichung 1) zeigt, dass jeder Werth von

$$(p+qi)^{\alpha+\beta i}\,.\,(p+qi)^{\alpha_1+\beta_1 i}$$

zugleich ein Werth von

$$(p+qi)^{\alpha+\beta i+\alpha_1+\beta_1 i}\,.\,1^{\alpha+\beta i};$$

und umgekehrt, jeder Werth des letztern Ausdruckes zugleich ein Werth vom erstern ist, woraus natürlich folgt, dass

$$3) \qquad (p+qi)^{\alpha+\beta i}\,.\,(p+qi)^{\alpha_1+\beta_1 i} = (p+qi)^{\alpha+\beta i+\alpha_1+\beta_1 i}\,.\,1^{\alpha+\beta i}$$

eine vollkommene Gleichung ist. Obschon nun 1) eine Gleichung zwischen eindeutigen Grössen ist, so lehrt sie doch dasselbe, was die Gleichung 3) zwischen unendlich vieldeutigen Grössen; aber ausserdem zeigt sie, wie die Werthe des ersten Theils von 3) mit Bestimmtheit gesondert werden können, und wie jeder Werth des ersten Theils von 3) dem zweiten Theil derselben entnommen werden kann. Ferner kann man auf 1) alle Umformungsgesetze für eindeutige Grössen anwenden, während diess bei 3) nicht möglich ist. Leichte Folgerungen von 1) sind die Gleichungen:

$$4) \qquad {}_{\tau}1^{\alpha+\beta i}\,.\,{}_{\tau_1}1^{\alpha+\beta i} = {}_{\tau+\tau_1}1^{\alpha+\beta i},$$

$$5) \qquad {}_{\tau}(p+qi)^{\alpha+\beta i} = {}_{\tau_1}(p+qi)^{\alpha+\beta i}\,.\,{}_{\tau-\tau_1}1^{\alpha+\beta i},$$

$$6) \qquad \frac{{}_{\tau}(p+qi)^{\alpha+\beta i}}{{}_{\tau_1}(p+qi)^{\alpha_1+\beta_1 i}} = {}_{\tau}(p+qi)^{\alpha+\beta i-(\alpha_1+\beta_1 i)}\,.\,{}_{\tau-\tau_1}1^{\alpha_1+\beta_1 i}$$

$$= {}_{\tau_1}(p+qi)^{\alpha+\beta i-(\alpha_1+\beta_1 i)}{}_{\tau-\tau_1}1^{\alpha+\beta i},$$

$$7) \qquad {}_{\tau}(p+qi)^{\alpha+\beta i-(\alpha_1+\beta_1 i)} = \frac{{}_{\tau}(p+qi)^{\alpha+\beta i}}{{}_{\tau}(p+qi)^{\alpha_1+\beta_1 i}};$$

und hieraus wieder die vollkommene Gleichung:

$$8) \qquad \frac{(p+qi)^{\alpha+\beta i}}{(p+qi)^{\alpha_1+\beta_1 i}}$$

$$= (p+qi)^{\alpha+\beta i-(\alpha_1+\beta_1 i)}\,.\,1^{\alpha_1+\beta_1 i} = (p+qi)^{\alpha+\beta i-(\alpha_1+\beta_1 i)}\,.\,1^{\alpha+\beta i}.$$

Anstatt der Gleichungen 3) und 8) gibt Ohm in seinem System der Math. VIII. p. 8. folgende:

$$(p+qi)^{\alpha+\beta i}\,.\,(p+qi)^{\alpha_1+\beta_1 i} = (p+qi)^{\alpha+\beta i+\alpha_1+\beta_1 i}e^{2\pi i[\mu(\alpha+\beta i)+\gamma(\alpha_1+\beta_1 i)]},$$

$$(p+qi)^{\alpha+\beta i} : (p+qi)^{\alpha_1+\beta_1 i} = (p+qi)^{\alpha+\beta i-(\alpha_1+\beta_1 i)}e^{2\pi i[\mu(\alpha+\beta i)+\gamma(\alpha_1+\beta_1 i)]};$$

deren Richtigkeit aber nicht aufgehoben wird, wenn man von den zwei unendlich vieldeutigen Zahlen μ und γ, deren Werthe 0 und

jede positive oder negative ganze Zahl sind, irgend eine derselben $=0$ setzt, wodurch die Formeln in die von mir berechneten übergehen.

II. Bezeichnet a eine complexe Zahl;

p und q positive oder negative ganze Zahlen, deren absolute Werthe p_1 und q_1 relative Primzahlen sind;

r und s positive oder negative ganze Zahlen, deren absolute Werthe r_1 und s_1 relative Primzahlen sind;

τ den grössten gemeinschaftlichen Faktor für q_1 und s_1;

$\tau\tau_1$ den grössten gemeinschaftlichen Faktor für die absoluten Werthe von $ps \pm qr$ und qs:

so hat man folgende Relationen:

1) Die Zahl der verschiedenen Werthe von

$$a^{\frac{p}{q}} \underset{:}{\times} a^{\frac{r}{s}}$$

ist

$$=\frac{q_1 s_1}{\tau}.$$

2) Die Zahl der verschiedenen Werthe von

$$a^{\frac{p}{q} \pm \frac{r}{s}}$$

ist

$$=\frac{q_1 s_1}{\tau\tau_1}.$$

3) Die Zahl der den Ausdrücken

$$a^{\frac{p}{q}} \underset{:}{\times} a^{\frac{r}{s}} \quad \text{und} \quad a^{\frac{p}{q} \pm \frac{r}{s}}$$

gemeinsamen Werthe ist

$$=\frac{q_1 s_1}{\tau\tau_1}.$$

4) Es ist nur dann

$$a^{\frac{p}{q}} \underset{:}{\times} a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q} \pm \frac{r}{s}},$$

wenn $\tau_1 = 1$; wenn demnach der grösste gemeinschaftliche Faktor

von q_1 und s_1 gleich demjenigen der absoluten Werthe von $ps \pm qr$ und qs ist.

Es ist wohl kaum nothwendig zu bemerken, dass hier entweder durchgehends nur die oberen Operationszeichen, oder nur die unteren zu nehmen sind.

Anmerkung. Ohm behauptet in seinem „Geist der math. Analysis 1842. p. 133.“, die Gleichung in 4) bedürfe dann schon einer Correction, wenn τ nicht 1 ist. Diess ist nach den obigen Behauptungen unrichtig, wie übrigens schon die Gleichung

$$a^{1} . {}^{1} = a^{1}$$

zeigt, die ohne Correction eine vollkommene ist.

§. 12. Lehrsätze.

I. Wenn μ die Bedeutung der 0, oder einer positiven oder negativen ganzen Zahl hat und zugleich so bestimmt wird, dass

$$2\mu\pi + \arg(p + qi) + \arg(p_1 + q_1 i)$$

zu einem Bogen wird, der entweder $= \pi$ ist oder zwischen π und $-\pi$ liegt, wenn also

1) $\quad 2\mu\pi + \arg(p + qi) + \arg(p_1 + q_1 i) = (\pi \text{ od. zw. } \pi \text{ u. } -\pi),$

so ist

2) $\quad {}_{\tau}(p + qi)^{\alpha+\beta i} \cdot {}_{\tau_1}(p_1 + q_1 i)^{\alpha+\beta i} = {}_{\tau+\tau_1-\mu}[(p + qi)(p_1 + q_1 i)]^{\alpha+\beta i}.$

Spätere Untersuchungen zwangen mich, Gleichungen von der Beschaffenheit der 1) aufzulösen. Man findet bloss aus der Vorstellung von $\arg(p + qi)$ und $\arg(p_1 + q_1 i)$ in der Zahlebene, dass in jedem Falle:

3)

$$\mu = -\tfrac{1}{16}(\underset{\smile}{q} + \underset{\smile}{q_1})(1 - \underset{\smile}{p}\underset{\smile}{p_1}) . \{[1 - \underbrace{(p_1{}^2 q^2 - p^2 q_1{}^2)^2}][1 - \underset{\smile}{p}\underbrace{p^2 q_1{}^2 - p_1{}^2 q^2}]$$

$$+ [1 + \underbrace{(p_1{}^2 q^2 - p^2 q_1{}^2)^2}](1 - \underset{\smile}{q})\} - \tfrac{1}{4}(\underset{\smile}{q} + \underset{\smile}{q_1})(1 - \underset{\smile}{p})(1 - \underset{\smile}{p_1}).$$

II. Wenn γ eine positive oder negative Zahl oder 0, und

1) $\quad 2\gamma\pi + \arg(p + qi) - \arg(p_1 + q_1 i) = (\pi \text{ od. zw. } \pi \text{ u. } -\pi),$

so ist

2) $$_{\tau}(p+qi)^{\alpha+\beta i} : {}_{\tau_1}(p_1+q_1 i)^{\alpha+\beta i} = {}_{\tau-\tau_1-\gamma}\left(\frac{p+qi}{p_1+q_1 i}\right)^{\alpha+\beta i},$$

3) $$\gamma = -\tfrac{1}{16}(\underline{q}-\underline{q}_1)(1-\underline{p}\underline{p}_1)$$
$$\times\{[1 - \underbrace{(p_1^2q^2-p^2q_1^2)^2}][1-\underline{p}\underbrace{p^2q_1^2-p_1^2q^2}]$$
$$+(1+\underbrace{(p_1^2q^2-p^2q_1^2)^2}](1-\underline{q})\}$$
$$-\tfrac{1}{8}(1-\underline{p}_1)[(\underline{q}-\underline{q}_1)(1-\underline{p})-(1+\underbrace{q^2-q_1^2})(1+\underline{p})].$$

III. Aus den Gleichungen I. 2) und II. 2) ergeben sich unmittelbar die vollkommenen Gleichungen:

1) $$(p+qi)^{\alpha+\beta i}.(p_1+q_1 i)^{\alpha+\beta i} = [(p+qi)(p_1+q_1 i)]^{\alpha+\beta i},$$

2) $$\frac{(p+qi)^{\alpha+\beta i}}{(p_1+q_1 i)^{\alpha+\beta i}} + \left(\frac{p+qi}{p_1+q_1 i}\right)^{\alpha+\beta i}.$$

Anmerkung. Ohm hat in seinem „Geist der mathem. Analysis 1842. pag. 122." für die Rechnung mit den einfachsten Werthen der Potenzen (d. h. nach meiner eingeführten Bezeichnung solchen Potenzen, deren Index $=0$ ist) die Gleichungen aufgestellt:

$$a^x.b^x = (a.b)^x \quad \text{und} \quad \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x.$$

Diese beiden Gleichungen sind nach den Lehrsätzen I. und II. im Allgemeinen unrichtig, was übrigens schon aus folgendem Beispiel erhellet: Es ist

$${}_0(-1)^{\frac{1}{2}} = +i \quad \text{und} \quad {}_0(+1)^{\frac{1}{2}} = +1.$$

Es müsste also nach der ersten jener zwei Gleichungen

$${}_0(-1)^{\frac{1}{2}}.{}_0(-1)^{\frac{1}{2}},$$

oder

$$i^2 = {}_0[(-1)(-1)]^{\frac{1}{2}} = +1$$

und nach der zweiten

$$\frac{{}_0 1^{\frac{1}{2}}}{{}_0(-1)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{i} = \left(\frac{1}{-1}\right)^{\frac{1}{2}} = i$$

sein. Die Lehrsätze I. und II. geben für diesen Fall:

$$ {}_0(-1)^{\frac{1}{2}} \cdot {}_0(-1)^{\frac{1}{2}} = {}_{-1}1^{\frac{1}{2}} = -1 $$

und

$$ \frac{{}_0 1^{\frac{1}{2}}}{{}_0(-1)^{\frac{1}{2}}} = {}_{-1}(-1)^{\frac{1}{2}} = -i, $$

wie es sein soll.

Die beiden Ohm'schen Gleichungen sind in dem Falle, da x eine positive oder negative ganze Zahl oder 0 ist, stets richtig, in jedem andern Falle aber durchaus nur dann zulässig, wenn für die erste $\arg.a + \arg.b$ entweder $= \pi$ oder dann zwischen π und $-\pi$ liegt, und in Beziehung auf die zweite Gleichung $\arg a - \arg b$ ebenfalls ein solcher Bogen ist, wie aus I. und II. sogleich klar wird.

§. 13. Lehrsätze.

I. Wenn

$$ m = \mathrm{Mod.}(p + qi) \quad \text{und} \quad \varphi = \arg.(p + qi), $$

wenn ferner γ reell, aber nicht gebrochen, und zugleich

1) $$ 2\gamma\pi + \beta l m + \alpha(2\tau\pi + \varphi) = (\pi \text{ od. zw. } \pi \text{ u. } -\pi); $$

so hat man die gesonderte Gleichung:

2) $$ {}_{\tau_1}[{}_{\tau}(p+qi)^{\alpha+\beta i}]^{\alpha_1+\beta_1 i} = {}_{\tau}(p+qi)^{(\alpha+\beta i)(\alpha_1+\beta_1 i)} \cdot {}_{\gamma+\tau_1}1^{\alpha_1+\beta_1 i}, $$

woraus sich sogleich die vollkommene Gleichung

3) $$ [(p+qi)^{\alpha+\beta i}]^{\alpha_1+\beta_1 i} = (p+qi)^{(\alpha+\beta i)(\alpha_1+\beta_1 i)} \cdot 1^{\alpha_1+\beta_1 i} $$

ergibt.

II. Bezeichnet a irgend eine complexe Zahl;

p und q positive oder negative ganze Zahlen, deren absolute Werthe p_1 und q_1 relative Primzahlen sind;

r und s positive oder negative ganze Zahlen, deren absolute Werthe r_1 und s_1 relative Primzahlen sind;

m den grössten gemeinschaftlichen Faktor für r_1 und q_1;

mm_1 den grössten gemeinschaftlichen Faktor für $p_1 r_1$ und $q_1 s_1$, mithin m_1 denjenigen für p_1 und s_1;

so hat man folgende Beziehungen:

1) Die Zahl der verschiedenen Werthe von

$$(a^{\frac{p}{q}})^{\frac{r}{s}} \text{ ist } = \frac{q_1 s_1}{m}.$$

2) Die Zahl der verschiedenen Werthe von

$$a^{\frac{pr}{qs}} \text{ ist } = \frac{q_1 s_1}{m m_1}.$$

3) Die Zahl der den beiden Potenzen

$$(a^{\frac{p}{q}})^{\frac{r}{s}} \quad \text{und} \quad a^{\frac{pr}{qs}} \text{ gemeinsamen Werthe ist } = \frac{q_1 s_1}{m m_1}.$$

4) Es ist nur dann

$$(a^{\frac{p}{q}})^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{pr}{qs}}$$

wenn $m_1 = 1$; wenn mithin die absoluten Werthe von p und s relative Primzahlen sind.

Anmerkung. Ohm behauptet in seinem „Geist der math. Anal. pag. 122", wenn wir unsere Zeichen gebrauchen, dass

$${}_0[{}_0(p+qi)^{\alpha+\beta i}]^{\alpha_1+\beta_1 i} = {}_0(p+qi)^{(\alpha+\beta i)(\alpha_1+\beta_1 i)}.$$

Diess ist im Allgemeinen nach dem Lehrsatze I. unrichtig, was übrigens auch schon folgendes Beispiel zeigt:

Es ist

$$(-1)^2 = 1, \quad {}_0 1^{\frac{1}{2}} = 1, \quad (-1)^1 = -1;$$

mithin wäre nach der Ohm'schen Gleichung

$${}_0[(-1)^2]^{\frac{1}{2}} \quad \text{oder} \quad 1 = {}_0(-1)^{2 \cdot \frac{1}{2}} = -1.$$

Der Lehrsatz I. giebt in diesem Falle $\gamma = -1$, und mithin die Gleichung

$${}_0[(-1)^2]^{\frac{1}{2}} = (-1)^{2 \cdot \frac{1}{2}} \cdot {}_{-1} 1^{\frac{1}{2}} = 1.$$

Die Ohm'sche Gleichung ist durchaus nur dann richtig, wenn für γ aus der Gleichung

$$2\gamma\pi + \beta l m + \alpha\varphi = (\pi \text{ oder zwischen } \pi \text{ und } -\pi)$$

der Werth 0, oder, wenn $\beta_1 = 0$, ein solcher Werth für γ gezogen wird, der, mit α_1 multiplicirt, eine positive oder negative ganze Zahl oder 0 als Product erzeugt, welch' letzterer Fall z. B. immer eintritt, wenn α_1 nicht gebrochen, und eben $\beta_1 = 0$ ist.

Ohm sagt in derselben Schrift pag. 134: „Die Gleichung

$$(a^{\frac{m}{n}})^{\frac{\mu}{\gamma}} = a^{\frac{m\mu}{n\gamma}}$$

ist eine vollkommen richtige und bedarf keiner Correction in allen den besondern Fällen, in denen die Brüche $\frac{m}{n}$ und $\frac{\mu}{\gamma}$ in den kleinsten Zahlen ausgedrückt sind, und zu gleicher Zeit m und γ, desgleichen n und μ keinen gemeinschaftlichen Theiler mehr haben.“ Hierüber möchten wir nur bemerken, dass es in dieser Frage nach II. 4) nicht auf die Beschaffenheit von n und μ ankömmt. So sind z. B.

$$(a^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{1}} = a \quad \text{und} \quad (a^{\frac{1}{2}})^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{3}}$$

vollkommene Gleichungen, obschon hier n und μ den gemeinschaftlichen Theiler 3 oder 2 haben.

§. 14. Lehrsätze.

I. Wenn

$$m = \text{Mod}(p+qi) \text{ und } \varphi = \arg(p+qi),$$

wenn ferner γ_1 und γ reell, aber nicht gebrochen, und

$$2\gamma_1\pi + \beta_1 lm + \alpha_1(2\tau\pi+\varphi) = (\pi \text{ oder zwischen } \pi \text{ und } -\pi),$$

$$2\gamma\pi + \beta lm + \alpha(2\tau\pi+\varphi) = (\pi \text{ oder zwischen } \pi \text{ und } -\pi);$$

so hat man die gesonderte Gleichung:

$$_{\tau_1}[_{\tau}(p+qi)^{\alpha+\beta i}]^{\alpha_1+\beta_1 i} \,.\, _{\tau_0}1^{\alpha+\beta i}$$

$$= _{-\gamma_1+\tau_0}[_{\tau}(p+qi)^{\alpha_1+\beta_1 i}]^{\alpha+\beta i} \,.\, _{\gamma+\tau_1}1^{\alpha_1+\beta_1 i},$$

$$_{\tau_1}[_{\tau}(p+qi)^{\alpha+\beta i}]^{\alpha_1+\beta_1 i}$$

$$= _{-\gamma_1}[_{\tau}(p+qi)^{\alpha_1+\beta_1 i}]^{\alpha+\beta i} \,.\, _{\gamma+\tau_1}1^{\alpha_1+\beta_1 i};$$

und hieraus die vollkommene Gleichung:

$$[(p+qi)^{\alpha+\beta i}]^{\alpha_1+\beta_1 i} \,.\, 1^{\alpha+\beta i} = [(p+qi)^{\alpha_1+\beta_1 i}]^{\alpha+\beta i} \,.\, 1^{\alpha_1+\beta_1 i}.$$

II) Bezeichnet a eine complexe Zahl;

p und q positive oder negative ganze Zahlen, deren absolute Werthe p_1 und q_1 relative Primzahlen sind;

r und s positive oder negative ganze Zahlen, deren absolute Werthe r_1 und s_1 relative Primzahlen sind;

m den grössten gemeinschaftlichen Factor für q_1 und r_1;

m_1 den grössten gemeinschaftlichen Factor für p_1 und s_1;

wo mithin m und m_1 relative Primzahlen sind, und mm_1 der grösste gemeinschaftliche Factor für $p_1 r_1$ und $q_1 s_1$ ist; so findet Folgendes Statt:

1) Die Zahl der verschiedenen Werthe von

$$(a^{\frac{p}{q}})^{\frac{r}{s}} \text{ ist } = \frac{q_1 s_1}{m}$$

und die von

$$(a^{\frac{r}{s}})^{\frac{p}{q}} \text{ ist } = \frac{q_1 s_1}{m_1}.$$

2) Die Zahl der den beiden Potenzen

$$(a^{\frac{p}{q}})^{\frac{r}{s}} \text{ und } (a^{\frac{r}{s}})^{\frac{p}{q}}$$

gemeinsamen Werthe ist

$$= \frac{q_1 s_1}{mm_1}.$$

3) Die Zahl der verschiedenen Werthe sowohl von

$$(a^{\frac{p}{q}})^{\frac{r}{s}} . 1^{\frac{p}{q}},$$

als auch von

$$(a^{\frac{r}{s}})^{\frac{p}{q}} . 1^{\frac{r}{s}} \text{ ist} = q_1 s_1.$$

4) Es ist nur dann

$$(a^{\frac{p}{q}})^{\frac{r}{s}} = (a^{\frac{r}{s}})^{\frac{p}{q}},$$

wenn $m = m_1$, mithin $m = m_1 = 1$, wenn also nicht bloss q_1 und r_1, sondern auch p_1 und s_1 relative Primzahlen sind.

5) Es ist nur dann

$$(a^{\frac{p}{q}})^{\frac{r}{s}} = (a^{\frac{r}{s}})^{\frac{p}{q}} . 1^{\frac{r}{s}},$$

wenn $m = 1$.

6) Wenn $m > 1$, so gibt es keine Potenz, mit der $(a^{\frac{r}{s}})^{\frac{p}{q}}$ multiplicirt ein mit $(a^{\frac{p}{q}})^{\frac{r}{s}}$ gleichbedeutendes Product gäbe.

7) Es ist in jedem Falle:

$$(a^{\frac{p}{q}})^{\frac{r}{s}} . 1^{\frac{p}{q}} = (a^{\frac{r}{s}})^{\frac{p}{q}} . 1^{\frac{r}{s}}.$$

§. 15. Aufgabe.

Die Gleichung

1) $$_{\gamma_1}[{}_{\gamma}(p+qi)^{\alpha+\beta i}]^{\alpha_1+\beta_1 i}\,._{\gamma_0}]^{\alpha+\beta i}$$
$$= {}_{\gamma_1+\varepsilon_1}[{}_{\gamma+\varepsilon}(p+qi)^{\alpha+\beta i}]^{\alpha_1+\beta_1 i}\,._{\gamma_0+\varepsilon_0}]^{\alpha+\beta i}$$

nach ε, ε_1 und ε_0 in ganzen Zahlen aufzulösen.

Auflösung.

Man löse die Gleichungen

2) $$2\mu\pi + 2\alpha\varepsilon\pi = (\pi \text{ oder zwischen } \pi \text{ und } -\pi),$$

3) $$2\mu_1\pi + \beta lr + \alpha(2\gamma\pi + \varphi) = (\pi \text{ oder zwischen } \pi \text{ u. } -\pi),$$

4) $$2(\mu_0 + \mu_1 + \mu + \alpha\varepsilon)\pi + \beta lr + \alpha(2\gamma\pi + \varphi) = (\pi \text{ od. zw. } \pi \text{ u. } -\pi),$$

5) $$\beta\varepsilon_0 + \beta_1(\varepsilon_1 + \mu_0) + (\alpha_1\beta + \alpha\beta_1)\varepsilon = -\beta_1\mu,$$

6) $$\alpha\varepsilon_0 + \alpha_1(\varepsilon_1 + \mu_0) + (\alpha\alpha_1 - \beta\beta_1)\varepsilon = -\alpha_1\mu - \sigma$$

wo $r = \text{Mod.}(p+qi)$ und $\varphi = \arg.(p+qi)$, nach μ, μ_1, μ_0, ε, ε_1, ε_0 und σ in ganzen Zahlen auf. Die Auflösungen dieser Gleichungen sind dann die Auflösungen der gegebenen Gleichung und umgekehrt.

Setzt man z. B. in die gegebene Gleichung

$$p=3,\ q=4,\ \alpha=\tfrac{5}{2},\ \beta=\tfrac{1}{3},\ \alpha_1=1,\ \beta_1=\tfrac{2}{3},\ \gamma=2,$$

dann 5 für ε_1, 30 für ε und $-\varepsilon_0$, so hat man eine identische Gleichung.

Die Aufgabe kann im Allgemeinen nur dann gelöst werden, wenn p, q, α, β, α_1, β_1 und γ in bestimmten Zahlen gegeben sind, dagegen können γ_1 und γ_0 beliebig gegeben sein, und es sind von γ_1 und γ_0 die Zahlen ε, ε_1 und ε_0 ganz unabhängig.

Die Auflösung dieser Aufgabe involvirt mehrere interessante Lehrsätze als Spezialitäten.

§. 16. Aufgaben.

I. Die Gleichung

1) $$(p+qi)^{\alpha+\beta i} = (p_1 + q_1 i)^{\alpha+\beta i}$$

nach $p+qi$, und die Gleichung

2) $$_{\tau}(p+qi)^{\alpha+\beta i} = {}_{\tau_1}(p_1+q_1 i)^{\alpha+\beta i}$$

nach $p+qi$ und τ aufzulösen.

Auflösung.

Die Gleichung I. wird nur dann identisch, wenn man

3) $$p+qi = (p_1+q_1 i) . E^{\frac{\log 1}{\alpha+\beta i}} = (p_1+q_1 i) . 1^{\frac{1}{\alpha+\beta i}}$$

setzt.

Bezeichnet σ irgend eine positive oder negative ganze Zahl oder 0, so wird die Gleichung 2) nur dann identisch, wenn man

4) $$p+qi = (p_1+q_1 i) . E^{\frac{{}_{\sigma}\log 1}{\alpha+\beta i}}$$

und

5) $$\tau = \tau_1 - \gamma$$

setzt, wo γ aus folgender Gleichung zu ziehen ist:

6) $$2\gamma\pi + \arg.(p_1+q_1 i) + \frac{2\alpha\pi\sigma}{\alpha^2+\beta^2} = (\pi \text{ od. zw. } \pi. \text{ u. } -\pi),$$

woraus ohne Schwierigkeit folgt, dass:

7) $$\text{Mod.}(p+qi) = E^{\frac{2\beta\sigma\pi}{\alpha^2+\beta^2}} . \text{Mod.}(p_1+q_1 i),$$

8) $$\arg.(p+qi) = \arg.(p_1+q_1 i) + \frac{2\alpha\sigma\pi}{\alpha^2+\beta^2} + 2(\tau_1-\tau)\pi,$$

wenn nämlich τ, oder, wenn man $\tau=\tau_1$ annähme, die σ so bestimmt wird, dass der zweite Theil der Gleichung 8) zu einem Bogen wird, der entweder $=\pi$ ist, oder dann zwischen π und $-\pi$ liegt.

Man hat z. B. folgende identische Gleichungen:

$$_{11}[13,172(\cos\frac{11}{30}\pi + i\sin\frac{11}{30}\pi)]^{1+3i} = {}_{11}[2(\cos\frac{1}{6}\pi + i\sin\frac{1}{6}\pi)]^{1+3i},$$

$$_{6}[7(\cos\frac{1}{3}\pi + i\sin\frac{1}{3}\pi)]^{\frac{3}{2}} = {}_{4}(-7)^{\frac{3}{2}}.$$

II. Bezeichnen α und β, wie oben, eindeutige Grössen, und hat man die vollkommene Gleichung

$$(x+yi)^{\alpha+\beta i} = P+Qi,$$

so muss nothwendig

$$P+Qi=(P+Qi).1^{\alpha+\beta i}$$

und

$$x+yi=(P+Qi)^{\frac{1}{\alpha+\beta i}}$$

sein.

III. Die Gleichung

$$_{\tau}(x+yi)^{\alpha+\beta i}=P+Qi,$$

wo α, β, P und Q eindeutige Zahlen bezeichnen, nach $x+yi$ und τ aufzulösen.

Auflösung.

Es ist immer

$$x+yi=E^{\frac{{}^{\mu}\log(P+Qi)}{\alpha+\beta i}}={}_{\mu}(P+Qi)^{\frac{1}{\alpha+\beta i}}.$$

Zur Ermittlung des τ nehme man nun μ beliebig reell, nur nicht gebrochen an, bestimme hierauf μ_1 in ganzen Zahlen so, dass

$$2\mu_1\pi+\frac{\alpha[2\mu\pi+\arg.(P+Qi)]-\beta l\,\mathrm{Mod.}(P+Qi)}{\alpha^2+\beta^2}=(\pi\,\text{od. zw.}\,\pi\,\text{u.}-\pi)$$

und löse endlich die Gleichungen

$$\beta(\mu_1+\tau)=0,$$

$$\alpha(\mu_1+\tau)=\sigma$$

nach τ und σ in ganzen Zahlen auf. Jeder der auf diese Weise für τ erhaltenen Werthe gehört den für τ verlangten Werthen an, und umgekehrt.

§. 17. Lehrsatz.

Die Gleichung

$$_{\tau}(p+qi)^{\alpha+\beta i}={}_{\tau_1}(p+qi)^{\alpha_1+\beta_1 i}$$

wird nur dann identisch, wenn

$$\alpha+\beta i=(\alpha_1+\beta_1)_{\tau_1}\log(p+qi)^{{}_{\tau}p+qi}+{}_{\sigma}\log 1^{{}_{\tau}p+qi}$$

gesetzt wird, wo σ beliebig reell, jedoch nicht gebrochen, angenommen werden darf.

§. 18. Aufgaben.

I. Welche besondere Werthe der $(\alpha+\beta i)$ten Potenz von

$$_{\tau}\sqrt[\alpha+\beta i]{(p+qi)\cdot{}_{\tau_1}1^{\alpha+\beta i}}$$

coindiciren mit $(p+qi)\cdot{}_{\mu}1^{\alpha+\beta i}$?

Auflösung.

Es sei

$$1)\qquad {}_{\tau_2}[{}_{\tau}\sqrt[\alpha+\beta i]{(p+qi)\cdot{}_{\tau_1}1^{\alpha+\beta i}}]^{\alpha+\beta i}=(p+qi)\cdot{}_{\mu}1^{\alpha+\beta i}.$$

Zur Berechnung der Werthe von τ_2 löse man nun von den zwei Gleichungen

$$2)\qquad 2\tau_0\pi+2\tau_1\pi\alpha+\arg.(p+qi)=(\pi \text{ od. zw. } \pi \text{ u. } -\pi),$$

$$3)\qquad 2\tau_3\pi+\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}[2\pi(\tau+\tau_0)+\arg.(p+qi)+2\alpha\tau_1\pi]$$

$$-\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}[1\,\mathrm{Mod.}(p+qi)-2\beta\tau_1\pi]=(\pi \text{ od. zw. } \pi \text{ u. } -\pi),$$

die 2) nach τ_0, dann die 3) nach τ_3 in ganzen Zahlen auf, setze dann den für τ_3 gefundenen Werth in die Gleichungen

$$4)\qquad \beta(\tau_1+\tau_2+\tau_3)=\beta\mu,$$

$$5)\qquad \alpha(\tau_1+\tau_2+\tau_3)=\alpha\mu+\sigma$$

und löse endlich diese zwei letztern Gleichungen nach τ_2 und σ in ganzen Zahlen auf. Die für τ_2 auf diese Weise erhaltenen Werthe sind die Auflösungen der Gleichung 1) nach τ_2, und umgekehrt.

Setzt man z. B.

$$\beta=\tau_1=\mu=0,\quad \alpha=\tfrac{1}{4},\quad p=16;$$

so wird nach den obigen Gleichungen $\tau_3=4$ und $\tau_2=4(1+\sigma)$, woraus natürlich folgt, dass nur dann

$$_{\tau_2}[{}_{1}\sqrt[\frac{1}{4}]{16}]^{\frac{1}{4}}=16,$$

wenn τ_2 entweder 0 oder eine reelle ganze Zahl ist, die 4 als Factor enthält. Diess Beispiel zeigt zugleich, wie nothwendig die Beibehaltung des β in der Gleichung 4) ist.

II. Die Gleichung

1) $$ {}_{\tau}\sqrt[\alpha+\beta i]{(p+qi).{}_{\tau_1}1^{\alpha+\beta i}} = {}_{\mu}(p+qi)^{\frac{1}{\alpha+\beta i}} $$

nach μ aufzulösen.

Auflösung.

Man bestimme zuerst τ_0, das nicht gebrochen sein darf, so, dass

$$2\tau_0\pi + \arg.(p+qi) + 2\alpha\tau_1\pi = (\pi \text{ oder zwischen } \pi \text{ u. } -\pi)$$

wird, und löse hierauf die Gleichungen

$$\beta(\tau+\tau_0) = \beta\mu,$$

$$\frac{\alpha\mu}{\alpha^2+\beta^2} = \frac{\alpha(\tau+\tau_0)}{\alpha^2+\beta^2} + g$$

nach μ und g in ganzen Zahlen auf. Dadurch gelangt man nur zu den sämmtlichen verlangten Werthen von μ.

§. 19. Lehrsätze.

I. Wenn μ reell, aber nicht gebrochen, und so bestimmt ist, dass

1) $$2\mu\pi + \arg.(p+qi) + \arg.(p_1+q_1 i) = (\pi \text{ od. zw. } \pi \text{ u. } -\pi),$$

so hat man folgende gesonderte Gleichungen:

2) $$ {}_{\tau}\log[(p+qi)(p_1+q_1 i)] = {}_{\tau}\log(p+qi) + {}_{\mu}\log(p_1+q_1 i),$$

3) $$ {}_{\tau_1+\tau_0-\mu}\log[(p+qi)(p_1+q_1 i)] = {}_{\tau_1}\log(p+qi) + {}_{\tau_0}\log(p_1+q_1 i);$$

und hieraus die vollkommene Gleichung:

4) $$\log[(p+qi)(p_1+q_1 i)] = \log(p+qi) + \log(p_1+q_1 i).$$

II. Wenn γ reell, aber nicht gebrochen, und so bestimmt ist, dass

5) $$2\gamma\pi + \arg.(p+qi) - \arg.(p_1+q_1 i) = (\pi \text{ od. zw. } \pi \text{ u. } -\pi),$$

so hat man die gesonderten Gleichungen:

6) $$ {}_{\tau}\log\frac{p+qi}{p_1+q_1 i} = {}_{\tau}\log(p+qi) - {}_{-\gamma}\log(p_1+q_1 i),$$

7) $$_{r_1-r_0-\gamma}\log\frac{p+qi}{p_1+q_1i}={}_{r_1}\log(p+qi)-{}_{r_0}\log(p_1+q_1i),$$

und hieraus die vollkommene Gleichung

$$\log\frac{p+qi}{p_1+q_1i}=\log(p+qi)-\log(p_1+q_1i).$$

Anmerkung 1. Ohm hat in seinem „Geist der math. Anal. 1842. pag. 117", wenn wir unsere Bezeichnung beibehalten, das Stattfinden folgender Gleichungen behauptet:

$$_0\log[(p+q)(p_1+q_1i)]={}_0\log(p+qi)+{}_0\log(p_1+q_1i),$$

$$_0\log\frac{p+qi}{p_1+q_1i}={}_0\log(p+qi)-{}_0\log(p_1+q_1i).$$

Diese beiden Gleichungen sind aber nach I. und II. unrichtig, wie diess auch schon folgendes einfache Beispiel zeigt. Es ist

$$_0\log(-1)=\pi i \quad \text{und} \quad {}_0\log(+1)=0.$$

Setzt man nun in den Ohm'schen Gleichungen

$$q=q_1=0 \quad \text{und} \quad p=p_1=-1,$$

so findet sich:

$$_0\log[(-1)(-1)] \text{ oder } 0={}_0\log(-1)+{}_0\log(-1) \text{ oder } 2\pi i,$$

$$_0\log\frac{+1}{-1} \text{ oder } \pi i={}_0\log 1-{}_0\log(-1) \text{ oder } -\pi i,$$

Die obigen Lehrsätze I. und II. aber geben in diesem Falle $\mu=-1$ und $\gamma=+1$, mithin:

$$_0\log[(-1)(-1)]={}_0\log(-1)+{}_0\log(-1)+{}_{-1}\log 1=2\pi i-2\pi i,$$

$$_0\log\frac{+1}{-1}={}_0\log 1-{}_0\log(-1)+{}_1\log 1=-\pi i+2\pi i.$$

Von den Ohm'schen Gleichungen ist die erste durchaus nur dann richtig, wenn $\arg(p+qi)+\arg(p_1+q_1i)$ ein Bogen ist, der entweder $=\pi$ oder dann zwischen π und $-\pi$ liegt, und die zweite, wenn $\arg(p+qi)-\arg(p_1+q_1i)$ ebenfalls ein solcher Bogen ist.

Anmerkung 2. So wenig man aus der Gleichung 8) schliessen darf, dass im Falle $p+qi=p_1+q_1i$ die Gleichung Statt finde: $\log 1=0$; ebenso wenig geht aus 4) die Gleichung $\log(p+qi)^2=2\log(p+qi)$ hervor. Die sämmtlichen Werthe des zweiten Theils dieser Gleichung sind zwar auch Werthe des ersten Theils,

aber nicht umgekehrt. So ist z. B., wenn γ eine unendlich vieldeutige Zahl darstellt, die 0 und jede positive oder negative ganze Zahl zu ihren Werthen hat, jeder der unendlich vielen Werthe des Ausdrucks $4\gamma\pi i$ ein Werth von $\log(-1)^2$; aber auch nicht einen einzigen von allen diesen Werthen vermag $2\log(-1)$ zu geben.

§. 20. Lehrsätze.

I. Wenn μ reell, aber nicht gebrochen, und so bestimmt wird, dass

1) $2\mu\pi+\beta l\mathrm{Mod.}(p+qi)+\alpha[2\tau_1\pi+\arg(p+qi)]=(\pi$ od. zw. π u. $-\pi)$,

so hat man die gesonderten Gleichungen:

2) $${}_{\tau}\log_{\tau_1}(p+qi)^{\alpha+\beta i}=(\alpha+\beta i)_{\tau_1}\log(p+qi)+{}_{\tau+\mu}\log 1,$$

3) $$(\alpha+\beta i)_{\tau_1}\log(p+qi)={}_{-\mu}\log_{\tau_1}(p+qi)^{\alpha+\beta i}.$$

Aus der 2) folgt dann die vollkommene Gleichung:

4) $$\log(p+qi)^{\alpha+\beta i}=(\alpha+\beta i)\log(p+qi)+\log 1.$$

II. Aus I. ergeben sich folgende bemerkenswerthe Spezialitäten. Wenn

1) $$2\mu_1\pi+\frac{1}{m}[2\tau_1\pi+\arg.(p+qi)]=(\pi \text{ od. zw. } \pi \text{ u. } -\pi),$$

wo m aber nur eine positive oder negative ganze Zahl bedeuten darf; so ist:

2) $${}_{\tau}\log_{\tau_1}\sqrt[m]{(p+qi)}=\frac{{}_{\tau_1+(\mu_1+\tau)m}\log(p+qi)}{m}$$

und hieraus bei derselben Bedeutung von m:

3) $$\log\sqrt[m]{(p+qi)}=\frac{1}{m}\log(p+qi).$$

Wenn ferner

4) $$2\mu_0\pi+\frac{1}{m}[2\tau_1\pi+\arg.(p+qi)^m]=(\pi \text{ od. zw. } \pi \text{ u. } -\pi),$$

wo wieder m nur eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet; so ist:

5) $${}_{\tau_1+m(\mu_0+\tau)}\log(p+qi)^m=m_{\tau}\log_{\tau_1}\sqrt[m]{(p+qi)^m}$$

und hieraus

6) $$\log(p+qi)^m = m\log\sqrt[m]{(p+qi)^m}.$$

So ist z. B. $\log 3^2 = 2\log\sqrt{3^2} = 2\log(\pm 3)$ und nicht $=2\log 3$, da sämmtliche in dem Ausdruck $l9+2(2\gamma+1)\pi i$ enthaltenen Werthe nur Werthe von $\log 3^2$, nicht auch zugleich von $2\log 3$ sind.

In dem besondern Falle, da α ein positiver oder negativer ächter Bruch, findet immer auch die Gleichung Statt:

7) $${}_0\log_0(p+qi)^\alpha = \alpha_0\log(p+qi).$$

Anmerkung. In „Ohms Geist der math. Anal. 1842. p. 122“ findet sich, wenn wir unsere Bezeichnungsweise gebrauchen, die Gleichung behauptet:

$${}_0\log_0(p+qi)^{\alpha+\beta i} = (\alpha+\beta i)_0\log(p+qi).$$

Diess ist unrichtig. Setzen wir z. B.

$$p=-e=-2{,}718\ldots,\quad q=\beta=0,\quad \alpha=2;$$

so findet man aus dieser Gleichung:

$${}_0\log(-e)^2 \quad\text{oder}\quad 2 = 2_0\log(-e) = 2(1+\pi i).$$

Die obige Gleichung I. 1) aber gibt in diesem Falle $\mu=-1$, und hernach die Gleichung I. 2):

$${}_0\log(-e)^2 = 2_0\log(-e) + {}_{-1}\log 1 = 2(1+\pi i) - 2\pi i.$$

Die Ohm'sche Gleichung ist durchaus nur dann richtig, wenn $\beta l\mathrm{Mod}(p+qi)+\alpha\arg(p+qi)$ entweder $=\pi$, oder dann zwischen π und $-\pi$ liegt.

§. 21. Lehrsätze.

I. Wenn

$${}^{\tau^{p+qi}}_{\tau_1}\log(p_1+q_1 i) = {}^{\gamma^{p+qi}}_{\gamma_1}\log(p_1+q_1 i),$$

so muss nothwendig

$$\frac{\tau_1-\gamma_1}{\tau-\gamma} = \frac{l\mathrm{Mod.}(p_1+q_1 i)}{l\mathrm{Mod.}(p+qi)} = \frac{2\tau_1\pi+\arg.(p_1+q_1 i)}{2\tau\pi+\arg.(p+qi)}$$

sein. In dem besondern Falle, da

$$\tau_1=\tau=\arg(p_1+q_1 i)=0,$$

muss

$$\frac{l\,\text{Mod.}(p_1+q_1 i)}{l\,\text{Mod.}(p+qi)}=\frac{\gamma_1}{\gamma}$$

sein. Die Gleichung 2) drückt hier die Bedingungen aus, unter welchen die beiden Indices eines Logarithmus bei constantem Werthe desselben eine Aenderung verstatten.

II) Wenn P eine reelle Zahl bezeichnet, so ist von den zwei Gleichungen

1) $$\overset{\gamma^{p+qi}}{{}_{\gamma_1}\log}(p_1+q_1 i)=P,$$

2) $$P=\frac{l\,\text{Mod.}(p_1+q_1 i)}{l\,\text{Mod.}(p+qi)}=\frac{2\gamma_1\pi+\arg.(p_1+q_1 i)}{2\gamma\pi+\arg.(p+qi)},$$

jede eine Folge der andern.

III. Von den drei Gleichungen:

$$\overset{\gamma^{p+qi}}{{}_{\gamma_1}\log}(p_1+q_1 i)=P+Qi,$$

2) $$\gamma=\frac{P\,l\,\text{Mod.}(p+qi)-l\,\text{Mod.}(p_1+q_1 i)-Q\arg.(p+qi)}{2\pi Q},$$

3) $$\gamma_1=\frac{(P^2+Q^2)\,l\,\text{Mod.}(p+qi)-l\,\text{Mod.}(p_1+q_1)-Q\arg.(p_1+q_1 i)}{2\pi Q}$$

ist die erste eine Folge der zwei übrigen, und umgekehrt.

Anmerkung. Mit Hülfe der zwei letztern Lehrsätze kann leicht untersucht werden, ob eine gegebene Zahl ein Werth von einem durch den Logarithmanden und die Basis gegebenen Logarithmus ist. So findet man z. B., dass $0{,}0247\ldots\ldots-0{,}155\ldots\ldots i$ zwar nicht ein Werth von $\log e$, wohl aber von $\overset{e}{\log} e$, und zwar der spezielle Werth ${}_0\overset{1^e}{\log} e$ ist.

§. 22. Lehrsätze.

I. Wenn μ reell, aber nicht gebrochen, und so bestimmt wird, dass

1) $2\mu\pi+\arg.(p_1+q_1 i)+\arg.(p_2+q_2 i)=(\pi$ od. zw. π u. $-\pi)$,

so hat man die gesonderten Gleichungen:

$$2)\quad {}_{\tau_1}\overset{{}_{\tau}p+qi}{\log}[(p_1+q_1 i)(p_2+q_2 i)] = {}_{\tau_1}\overset{{}_{\tau}p+qi}{\log}(p_1+q_1 i) + {}_{\mu}\overset{{}_{\tau}p+qi}{\log}(p_2+q_2 i),$$

$$3)\quad {}_{\tau_1+\gamma_1-\mu}\overset{{}_{\gamma}p+qi}{\log}[(p_1+q_1 i)\cdot(p_2+q_2 i)] + {}_{\tau_1}\overset{{}_{\tau}p+qi}{\log}(p_1+q_1 i)\cdot{}_{\gamma-\tau}\overset{{}_{\gamma}p+qi}{\log}1$$

$$= {}_{\tau_1}\overset{{}_{\tau}p+qi}{\log}(p_1+q_1 i) + {}_{\gamma_1}\overset{{}_{\gamma}p+qi}{\log}(p_2+q_2 i),$$

$$4)\quad {}_{\tau_1+\gamma_1-\mu}\overset{{}_{\tau}p+qi}{\log}[(p_1+q_1 i)(p_2+q_2 i)] = {}_{\tau_1}\overset{{}_{\tau}p+qi}{\log}(p_1+q_1 i) + {}_{\gamma_1}\overset{{}_{\tau}p+qi}{\log}(p_2+q_2 i);$$

und aus dieser letztern die vollkommene Gleichung:

$$5)\quad \overset{{}_{\tau}p+qi}{\log}[(p_1+q_1 i)(p_2+q_2 i)] = \overset{{}_{\tau}p+qi}{\log}(p_1+q_1 i) + \overset{{}_{\tau}p+qi}{\log}(p_2+q_2 i).$$

II. Wenn ζ reell, aber nicht gebrochen ist, und so bestimmt wird, dass

$$1)\quad 2\zeta\pi + \text{arg.}(p_1+q_1 i) - \text{arg.}(p_2+q_2 i) = (\pi \text{ od. zw. } \pi \text{ u. } -\pi),$$

so hat man die gesonderten Gleichungen:

$$2)\quad {}_{\tau_1}\overset{{}_{\tau}p+qi}{\log}\frac{p_1+q_1 i}{p_2+q_2 i} = {}_{\tau_1}\overset{{}_{\tau}p+qi}{\log}(p_1+q_1 i) - {}_{\zeta}\overset{{}_{\tau}p+qi}{\log}(p_2+q_2 i),$$

$$3)\quad {}_{\tau_1-\gamma_1-\zeta}\overset{{}_{\tau}p+qi}{\log}\frac{p_1+q_1 i}{p_2+q_2 i} = {}_{\tau_1}\overset{{}_{\tau}p+qi}{\log}(p_1+q_1 i)\cdot{}_{\gamma-\tau}\overset{{}_{\tau}p+qi}{\log}1$$

$$= {}_{\tau_1}\overset{{}_{\tau}p+qi}{\log}(p_1+q_1 i) - {}_{\gamma_1}\overset{{}_{\gamma}p+qi}{\log}(p_2+q_2 i),$$

$$4)\quad {}_{\tau_1-\gamma_1-\zeta}\overset{{}_{\tau}p+qi}{\log}\frac{p_1+q_1 i}{p_2+q_2 i} = {}_{\tau_1}\overset{{}_{\tau}p+qi}{\log}(p_1+q_1 i) - {}_{\gamma_1}\overset{{}_{\tau}p+qi}{\log}(p_2+q_2 i);$$

und hieraus die vollkommene Gleichung:

$$5)\quad \overset{{}_{\tau}p+qi}{\log}\frac{p_1+q_1 i}{p_2+q_2 i} = \overset{{}_{\tau}p+qi}{\log}(p_1+q_1 i) - \overset{{}_{\tau}p+qi}{\log}(p_2+q_2 i).$$

Zusatz. Die Weglassung des τ aus den Gleichungen I. 5) und II. 5) würde diese Gleichungen in unvollkommene verwandeln; die Ausdrücke rechts vom Gleichheitszeichen hätten dann unendlichmal mehr Werthe als die links. Eine brauchbare vollkommene Gleichung zwischen $\overset{e}{\log}(ab)$ oder $\overset{e}{\log}\frac{a}{b}$ und den beiden Zahlen $\overset{e}{\log} a$ und $\overset{e}{\log} b$ wird wohl kaum existiren.

Anmerkung. In Ohm's „Geist der math. Anal. 1842. pag. 126" findet man zwei Lehrsätze, die in unsern Zeichen sich durch folgende Gleichungen darstellen lassen:

$${}_0\overset{{}_0 p+qi}{\log}[(p_1+q_1i)(p_2+q_2i)] = {}_0\overset{{}_0 p+qi}{\log}(p_1+q_1i) + {}_0\overset{{}_0 p+qi}{\log}(p_2+q_2i),$$

$$\overset{{}_0 p+qi}{\log}\frac{p_1+q_1i}{p_2+q_2i} = {}_0\overset{{}_0 p+qi}{\log}(p_1+q_1i) - {}_0\overset{{}_0 p+qi}{\log}(p_2+q_2i).$$

Für den Fall, da $p+qi=e=2{,}718\ldots$, fanden wir diese Gleichungen schon im §. 19. im Allgemeinen unrichtig. Richtig wird die erste nur in dem besondern Falle, da $\arg.(p+qi)+\arg.(p_1+q_1i)$ ein Bogen ist, der entweder gleich π oder dann zwischen π und $-\pi$ liegt, und die zweite jener zwei Gleichungen nur dann, wenn $\arg(p_1+q_1i)-\arg(p_2+q_2i)$ ein Bogen von derselben Beschaffenheit ist.

§. 23. Lehrsätze.

I. Wenn μ reell, aber nicht gebrochen, und so bestimmt wird, dass

1) $$2\mu\pi+\beta l\mathrm{Mod.}(p_1+q_1i)+\alpha[2\gamma\pi+\arg.(p_1+q_1i)]$$
$$=(\pi \text{ oder zwischen } \pi \text{ u. } -\pi),$$

so hat man die gesonderten Gleichungen:

2) $${}_\zeta\overset{{}_\tau p+qi}{\log}{}_\gamma(p_1+q_1i)^{\alpha+\beta i} = (\alpha+\beta i)_\gamma\overset{{}_\tau p+qi}{\log}(p_1+q_1i) + {}_{\zeta+\mu}\overset{{}_\tau p+qi}{\log}1,$$

3) $$\cdot(\alpha+\beta i)_\gamma\overset{{}_\tau p+qi}{\log}(p_1+q_1i) = {}_{-\mu}\overset{{}_\tau p+qi}{\log}{}_\gamma(p_1+q_1i)^{\alpha+\beta i}.$$

Die erste dieser zwei Gleichungen gibt sofort die vollkommene Gleichung:

4) $\overset{\tau p+qi}{\log}(p_1+q_1 i)^{\alpha+\beta i}=(\alpha+\beta i)\overset{\tau p+qi}{\log}(p_1+q_1 i)+\overset{\tau p+qi}{\log}1.$

II. Folgerungen von I. sind folgende Sätze:

Wenn

1) $2\mu_1\pi+\frac{1}{m}[2\gamma\pi+\arg.(p_1+q_1 i)]=(\pi \text{ od. zw. } \pi \text{ u. } -\pi),$

wo m aber nur eine positive oder negative ganze Zahl bedeuten darf; so ist

2) $${}_{\zeta}\overset{\tau p+qi}{\log_\gamma}\sqrt[m]{(p_1+q_1 i)}=\frac{1}{m}\cdot{}_{\gamma+m(\zeta+\mu_1)}\overset{\tau p+qi}{\log}(p_1+q_1 i),$$

und hieraus bei derselben Bedeutung von m:

3) $$\overset{p+qi}{\log}\sqrt[m]{(p_1+q_1 i)}=\frac{1}{m}\cdot\overset{p+qi}{\log}(p_1+q_1 i).$$

Wenn ferner

4) $2\mu\pi+\frac{1}{m}[2\gamma\pi+\arg.(p_1+q_1 i)^m]=(\pi \text{ od. zw. } \pi \text{ u. } -\pi),$

wo wieder m nur eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet, so ist:

5) $${}_{\gamma+m(\zeta+\mu)}\overset{\tau p+qi}{\log}(p_1+q_1 i)^m=m\,{}_{\zeta}\overset{\tau p+qi}{\log_\gamma}\sqrt[m]{(p_1+q_1 i)^m},$$

und hieraus:

6) $$\overset{p+qi}{\log}(p_1+q_1 i)^m=m\overset{p+qi}{\log}\sqrt[m]{(p_1+q_1 i)^m}.$$

In dem besondern Falle, da α ein positiver oder negativer ächter Bruch ist, findet stets auch folgende Gleichung Statt:

$${}_0\overset{\tau p+qi}{\log_0}(p+qi)^\alpha=\alpha\,{}_0\overset{\tau p+qi}{\log}(p+qi).$$

Anmerkung 1. Wenn in I. 4) die τ weggelassen würden, so erhielte man eine Gleichung, bei der zwar sämmtliche Werthe des ersten Theils auch zugleich Werthe des zweiten Theils wären, hingegen unendlich viele Werthe des zweiten Theils sich alsdann nicht unter den Werthen des ersten Theils befänden.

Anmerkung 2. In Ohm's „Geist der math. Anal. 1842. pag. 126." findet sich, wenn wir unsere Zeichen beibehalten:

$$ {}_0\overset{{}_0p+qi}{\log}{}_0(p_1+q_1i)^{\alpha+\beta i}=(\alpha+\beta i)\,{}_0\overset{{}_0p+qi}{\log}(p+qi). $$

Diese Gleichung ist durchaus nur in dem besondern Falle richtig, da $[\beta l\mathrm{Mod.}(p_1+q_1i)+\arg.(p_1+q_1i)]$ entweder $=\pi$, oder dann zwischen π und $-\pi$ liegt. Uebrigens haben wir für den Fall, da $p+qi=e=2,718....$, die Unrichtigkeit dieser Gleichung schon im §. 20. bemerkt.

§. 24.

Die logarithmische Reihe $(p+qi)-\frac{1}{2}(p+qi)^2+\frac{1}{3}(p+qi)^3-....$ gibt in den sämmtlichen Fällen ihrer Convergenz den speziellen Werth ${}_0\log(1+p+qi)$ von $\log(1+p+qi)$, was leicht daraus gefolgert werden kann, dass die binomische Reihe für

$$ (1+p+qi)^{\alpha+\beta i}, $$

so oft sie convergirt, den besondern Werth

$$ {}_0(1+p+qi)^{\alpha+\beta i}, $$

und die Exponentialreihe E^{p+qi} den speziellen Werth ${}_0e^{p+qi}$ von e^{p+qi} ausdrückt.

Die Fortsetzung dieser Mittheilung behalte ich einer späteren Gelegenheit vor.

XXI.

Ueber die Aufgabe, einen Kreis zu beschreiben, welcher drei gegebene Kreise berührt.

Von

Herrn *Ferdinand Kerz*,

Rittmeister in der Grossherzogl. Hessischen Gendarmerie zu Darmstadt.

Dritte Abtheilung*).

§. 91.

Es ist in der zweiten Abtheilung dieser Abhandlung gezeigt worden, wie sämmtliche Berührungsaufgaben, bei welchen es sich um die Berührung dreier gegebener Stücke (Kreise, gerade Linien und Punkte) handelt, sich auf die Aufgabe, einen Kreis zu beschreiben, welcher drei gegebene Kreise berührt, zurückführen lassen und wie also diesen sämmtlichen Berührungsaufgaben eine und dieselbe Auflösung zukommt.

Es besteht indessen noch eine Klasse von Aufgaben, bei welchen die Berührung nur zweier gegebenen Stücke (Kreise, gerade Linien und Punkte) statt finden soll, aber als dritte Bedingung das Verlangen gestellt wird, dass der Mittelpunkt des zu berührenden Kreises in einer gegebenen geraden Linie liege. Den Zusammenhang dieser Klasse von Aufgaben mit der Hauptaufgabe nachzuweisen ist der Zweck dieser dritten Abtheilung.

---

*) Fortsetzung von Thl. XXVI. Nr. XVIII. S. 266. — S. 293. Alle zu dieser dritten Abtheilung gehörenden Figurentafeln Taf. VII. bis Taf. X. sind mit „Kerz" bezeichnet, und die Figuren auf denselben ohne Unterbrechung von Fig. 1. bis Fig. 12. gezählt.

§. 92.

Da wir bisher von der Betrachtung ausgingen, dass der Punkt ein Kreis von unendlich kleinem Halbmesser und die gerade Linie ein Theil einer Kreislinie von unendlich grossem Halbmesser sei, die gerade Linie aber von einem Kreise, dessen Mittelpunkt einer ihrer Punkte ist, rechtwinkelig geschnitten wird; so wird die erwähnte Klasse von Aufgaben in ihrer Allgemeinheit sich folgendermassen ausdrücken lassen:

> Gegeben sind drei Kreise; man soll einen Kreis beschreiben, der zwei der gegebenen Kreise berührt und den dritten rechtwinklig schneidet;

und es soll diese Aufgabe in Bezug auf gleichartige und ungleichartige Berührung abgehandelt werden.

§. 93.

Berührt ein Kreis $\mathfrak{M}'$ ($\mathfrak{M}^2$) (Taf. V. Theil XXIV.) zwei andere Kreise M und m gleichartig und schneidet zugleich einen dritten Kreis a*) rechtwinkelig; so ist dieser dritte Kreis a der äussere Aehnlichkeitskreis (§. 18. I.) zu einem der gleichartig berührten Kreise M und einem andern Kreise $\mathfrak{M}$, welcher ebenfalls von dem Kreise $\mathfrak{M}'$ ($\mathfrak{M}^2$) gleichartig berührt wird.

Der Beweis dieses Satzes folgt leicht aus §. 11.

§. 94.

Zur Auflösung der in §. 92. gestellten Aufgabe könnte man daher für gleichartige Berührung zweier gegebenen Kreise M und m denjenigen Kreis $\mathfrak{M}$ als Hülfskreis aufsuchen, für welchen in Beziehung auf einen der zu berührenden Kreise M der gegebene und rechtwinkelig zu schneidende Kreis a der äussere Aehnlichkeitskreis ist, und dann diejenigen Kreise ($\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}^2$) bestimmen, welche die drei Kreise M, m, $\mathfrak{M}$ gleichartig berühren.

---

*) Was in dieser dritten Abtheilung vom Kreise a gesagt wird, ist durchgehends auch für den Kreis A gültig, so dass überall, unbeschadet der Symmetrie der Buchstaben, A für a geschrieben werden kann.

§. 95.

Für drei Kreise, *M*, *m* und *a* (Taf. V. Theil XXIV.), von welchen zwei, *M* und *m*, von einem dritten Kreise 𝔐′ (𝔐²) gleichartig berührt und der dritte *a* rechtwinkelig geschnitten werden, kann daher die gerade Verbindungslinie *a*𝔄 des Mittelpunktes *a* des rechtwinkelig geschnittenen Kreises und des äusseren Aehnlichkeitspunktes 𝔄 der gleichartig berührten Kreise *M* und *m*, in Uebereinstimmung mit dem Vorhergehenden, die **äussere Aehnlichkeitsaxe** (§. 18. 3.) genannt werden.

Und ebenso heisse die Linie gleicher Potenzen $O'O''$ (Taf. V. oder $O_{,}O_{,,}$ Taf. VII. Th. XXIV.) des rechtwinkelig geschnittenen Kreises *a* und des, zu den beiden gleichartig berührten Kreisen *M* und *m* gehörigen, äusseren Aehnlichkeitskreises 𝔄 (§. 11. 1.) die **äussere Axe** (§. 18. 3.).

§. 96.

Es folgt leicht:

Ist der Halbmesser des rechtwinkelig zu schneidenden Kreises *a* unendlich gross, soll also der Mittelpunkt des zu beschreibenden Kreises in einer gegebenen geraden Linie *a′a″* liegen (Fig. 4.); so ist, für gleichartige Berührung, die äussere Aehnlichkeitsaxe *a*𝔄 die von dem äusseren Aehnlichkeitspunkt 𝔄 der zu berührenden Kreise *M* und *m* auf die gegebene Gerade *a′a″* gefällte Senkrechte, und die äussere Axe $O'O''(O_{,}O_{,,})$ fällt mit der gegebenen Geraden *a′a″* zusammen.

Der Durchschnittspunkt *O* der äusseren Aehnlichkeitsaxe *a*𝔄 mit der gegebenen Geraden *a′a″* ist daher der **Hauptpunkt der äusseren Aehnlichkeitsaxe**. (§. 18. 5.)

§. 97.

Für ungleichartige Berührung möge folgende Betrachtung vorausgehen:

Es wurde (in §. 62.) der leicht zu erweisende Satz aufgestellt, dass derjenige Kreis, welcher die Peripherien zweier inneren Aehnlichkeitskreise *J* und 𝔍 halbire, zugleich den zugehörigen äusseren Aehnlichkeitskreis *a* rechtwinkelig schneide, und dass der Mittelpunkt dieses den äusseren Aehnlichkeitskreis rechtwin-

kelig schneidenden Kreises immer ein Punkt der Linie äquidifferenter Potenzen, $Q_{,}Q_{,,}$ sei, welche zu den beiden inneren Aehnlichkeitskreisen, J und $\mathfrak{J}$, gehöre.

Nennen wir eine Linie $Q_{,}Q_{,,}$ (Fig. 1) von der Eigenschaft, dass, wenn man von irgend welchem ihrer Punkte Q' eine Tangente an einen Kreis a legt und mit dieser Tangente als Halbmesser aus Q' als Mittelpunkt einen Kreis beschreibt, durch diesen Kreis zugleich die Peripherie eines zweiten Kreises $\mathfrak{J}$ halbirt wird, die **Linie differenter Potenzen des rechtwinkelig geschnittenen Kreises a in Bezug auf den halbirten Kreis $\mathfrak{J}$.**

§. 98.

Sind zwei Kreise a und $\mathfrak{J}$ (Fig. 1.) gegeben; so findet sich die Linie $Q_{,}Q_{,,}$ differenter Potenzen des einen Kreises a in Bezug auf den andern Kreis $\mathfrak{J}$ leicht durch folgende Construction: Man errichte auf dem Endpunkte d' irgend eines Durchmessers $d'd''$ des rechtwinkelig zu schneidenden Kreises a eine Senkrechte $d'k$ und auf irgend einem Durchmessers $\mathfrak{D}'\mathfrak{D}''$ des andern Kreises $\mathfrak{J}$ im Mittelpunkte eine Senkrechte $\mathfrak{J}\mathfrak{K}$, mache $d'k = \mathfrak{D}'\mathfrak{K}$ $(= \mathfrak{D}''\mathfrak{K})$, beschreibe aus den Mittelpunkten der respectiven Kreise a und $\mathfrak{J}$ mit ak und $\mathfrak{J}\mathfrak{K}$ Kreisbogen, welche sich in Q'' schneiden, und fälle durch diesen Schneidungspunkt Q'' auf die Centrale $a\mathfrak{J}$ die Senkrechte $Q_{,}Q_{,,}$; so ist diese die verlangte Linie differenter Potenzen des einen Kreises a in Bezug auf den andern Kreis $\mathfrak{J}$.

§. 99.

Lässt man den Halbmesser bald des einen, bald des andern Kreises, bald beider Kreise unendlich ab- und zunehmen; so ergeben sich für die Linie differenter Potenzen leicht folgende Sätze:

1) Die Linie differenter Potenzen eines Kreises (oder eines Punktes) in Bezug auf einen Punkt fällt mit ihrer Linie gleicher Potenzen zusammen.

2) Die Linie differenter Potenzen eines Punktes in Bezug auf einen Kreis fällt mit ihrer Linie äquidifferenter Potenzen zusammen.

3) Die Linie differenter Potenzen einer geraden Linie in Bezug auf einen Kreis (oder einen Punkt) fällt mit der geraden Linie zusammen.

4) Die Linie differenter Potenzen eines Kreises (oder eines Punktes) in Bezug auf eine gerade Linie fällt unendlich weit weg.

§. 100.

Denkt man sich (in Taf. VI. Th. XXIV.) zu den Kreisen *M* und 𝔐 den äusseren Aehnlichkeitskreis *a* gezogen, so fliesst aus §. 97. leicht folgender Satz:

Berührt ein Kreis $𝔐^3$ ($𝔐^4$) zwei andere Kreise *M* und *m* ungleichartig und schneidet zugleich einen dritten Kreis *a* rechtwinkelig; so ist dieser dritte Kreis *a* der äussere Aehnlichkeitskreis zu einem der ungleichartig berührten Kreise *M* und einem andern Kreise 𝔐, welcher von dem Kreise $𝔐^3$ ($𝔐^4$) mit dem berührten Kreise *M* gleichartig berührt wird.

§. 101.

Zur Auflösung der in §. 92. gestellten Aufgabe könnte man daher für ungleichartige Berührung zweier gegebenen Kreise *M* und *m* denjenigen Kreis 𝔐 als Hülfskreis aufsuchen, für welchen in Beziehung auf einen der zu berührenden Kreise *M* der gegebene und rechtwinkelig zu schneidende Kreis *a* der äussere Aehnlichkeitskreis ist, und dann diejenigen Kreise ($𝔐^3$ und $𝔐^4$) bestimmen, welche den einen der zu berührenden Kreise *M* und den Hülfskreis 𝔐 gleichartig, den andern der zu berührenden Kreise *m* aber ungleichartig berühren.

§. 102.

Für drei Kreise *M*, *m* und *a*, von welchen zwei, *M* und *m*, von einem dritten Kreise $𝔐^3$ ($𝔐^4$) ungleichartig berührt und der dritte *a* rechtwinkelig geschnitten werden, kann daher die gerade Verbindungslinie *a*ℑ des Mittelpunktes *a* des rechtwinkelig geschnittenen Kreises und des inneren Aehnlichkeitspunktes ℑ der ungleichartig berührten Kreise *M* und *m*, in Uebereinstimmung mit dem Vorhergehenden, die innere Aehnlichkeitsaxe (§. 18. 4.) genannt werden.

Und ebenso heisse die Linie differenter Potenzen $Q_{,}Q_{,,}$ des rechtwinkelig geschnittenen Kreises *a*, in Bezug auf den, zu den beiden ungleichartig berührten Kreisen *M* und *m* gehörigen, inneren Aehnlichkeitskreis ℑ, die innere Axe (§. 18. 4.).

§. 103.

Es folgt leicht:

Ist der Halbmesser des rechtwinkelig zu schneidenden Kreises a unendlich gross, soll also der Mittelpunkt des zu beschreibenden Kreises in einer gegebenen geraden Linie $a'a''$ liegen, (Fig. 5.); so ist, für ungleichartige Berührung, die innere Aehnlichkeitsaxe $a\mathfrak{J}$ die von dem inneren Aehnlichkeitspunkt $\mathfrak{J}$ der zu berührenden Kreise M und m auf die gegebene Gerade $a'a''$ gefällte Senkrechte, und die innere Axe $Q_, Q_{,,}$ fällt mit der gegebenen Geraden $a'a''$ zusammen.

Der Durchschnittspunkt Q der inneren Aehnlichkeitsaxe $a\mathfrak{J}$ mit der gegebenen Geraden $a'a''$ ist daher der Hauptpunkt der inneren Aehnlichkeitsaxe (§. 18. 6.).

§. 104.

Aufgabe. Es sind drei Kreise M, m, a gegeben (Fig. 2); man soll einen Kreis $\mathfrak{M}$ beschreiben, der die beiden ersteren Kreise, M und m, gleichartig berührt und den letzten Kreis a rechtwinkelig schneidet.

Auflösung. Man bestimme:

1) die äussere Aehnlichkeitsaxe $a\mathfrak{A}$. (§. 95.);

2) den äusseren Aehnlichkeitskreis $\mathfrak{A}$, welcher den gegebenen Kreis a entweder schneidet, (wie in Fig. 2.), oder nicht schneidet.

Schneiden sich beide Kreise $\mathfrak{A}$ und a, so hat man in der geraden Verbindungslinie $O'O''$ ihrer Schneidungspunkte O' und O'' bereits die äussere Axe. Schneiden sie sich nicht, so ergiebt sich die äussere Axe als Linie gleicher Potenzen $(O_, O_{,,})$ des äusseren Aehnlichkeitskreises $\mathfrak{A}$ und des rechtwinkelig zu schneidenden Kreises a (§. 95.).

3) Im ersteren Falle suche man zu einem der Durchschnittspunkte $O'(O'')$ und einem der zu berührenden Kreise $m(M)$ die Linie gleicher Potenzen; so ergiebt sich als Durchschnittspunkt dieser Linie mit der äusseren Aehnlichkeitsaxe $a\mathfrak{A}$ der Pol $p(P)$ der Berührungspunkte. (§. 18. 10.)

Im letzteren Falle lege man aus dem Hauptpunkte O der äusseren Aehnlichkeitsaxe $a\mathfrak{A}$ entweder an den rechtwinkelig zu schneidenden Kreis a oder an den äusseren Aehnlichkeitskreis $\mathfrak{A}$ eine Tangente, beschreibe mit derselben als Halbmesser aus dem Hauptpunkte O einen Kreis, den Hauptkreis der äusseren Axe (§. 18. 7.), und bestimme zu diesem und einem der zu berührenden Kreise $m(M)$ die Linie gleicher Potenzen; so ergiebt sich als Durchschnittspunkt dieser Linie mit der äusseren Aehnlichkeitsaxe $a\mathfrak{A}$ der Pol $p(P)$ der Berührungspunkte. (§. 18. 10.)

4) Aus dem gefundenen Pole $p(P)$ beschreibe man mit einer an den betreffenden Kreis $m(M)$ gelegten Tangente pb' $(=pb^2)(PB'(=PB^2))$ als Halbmesser den Bestimmungskreis der Berührungspunkte; so ergeben sich letztere als Durchschnittspunkte b' und b^2 (B' und B^2) beider Kreise p und m (P und M).

5) Durch die gerade Verbindungslinie der gefundenen Berührungspunkte b' und b^2 (B' und B^2) mit dem Mittelpunkt des zugehörigen Kreises $m(M)$, resp. deren Verlängerung, ergeben sich als Durchschnittspunkte mit der äusseren Axe $O'O''$ (oder $O_{,}O_{,,}$) zwei Punkte $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}^2$, welche die Mittelpunkte zweier Kreise sind, die beide der Aufgabe genügen.

§. 105.

Aufgabe. Es sind drei Kreise M, m, a (Fig. 3.) gegeben; man soll einen Kreis $\mathfrak{M}$ beschreiben, der die beiden ersteren Kreise M und m ungleichartig berührt und den letzten Kreis a rechtwinkelig schneidet.

Auflösung. Man bestimme:

1) die innere Aehnlichkeitsaxe $a\mathfrak{J}$; (§. 102.);

2) den inneren Aehnlichkeitskreis $\mathfrak{J}$ und die Linie $(Q_{,}Q_{,,})$ differenter Potenzen des gegebenen Kreises a in Bezug auf den inneren Aehnlichkeitskreis $\mathfrak{J}$ (§§. 97. u. 98.); sodann den Hauptkreis Q der inneren Aehnlichkeitsaxe, welcher den gegebenen Kreis a rechtwinkelig schneidet und die Peripherie des inneren Aehnlichkeitskreises $\mathfrak{J}$ halbirt.

3) Zu diesem Hauptkreis Q der inneren Aehnlichkeitsaxe und einem der zu berührenden Kreise $M(m)$ suche man die Linie gleicher Potenzen; so ergiebt deren Durchschnitt $P^I(p^I)$ mit der inneren Aehnlichkeitsaxe $a\mathfrak{J}$ den Pol der Berührungspunkte.

4) Aus dem gefundenen Pol $P^I(p^I)$ beschreibe man mit einer an den betreffenden Kreis $M(m)$ gelegten Tangente $P^I B^3 (= P^I B^4) (p^I b^3 (= p^I b^4))$ als Halbmesser den Bestimmungskreis der Berührungspunkte; so ergeben sich letztere als Durchschnittspunkte B^3 und B^4 (b^3 und b^4) beider Kreise P^I und M (p^I und m).

5) Die durch die gerade Verbindungslinie der gefundenen Berührungspunkte $B^3(b^3)$ und $B^4(b^4)$ mit dem Mittelpunkte des zugehörigen Kreises $M(m)$, resp. deren Verlängerung, ergeben sich als Durchschnittspunkte mit der inneren Axe $Q_{,}Q_{,,}$ zwei Punkte $\mathfrak{M}^3$ und $\mathfrak{M}^4$, welche die Mittelpunkte zweier Kreise sind, die beide der Aufgabe genügen.

§. 106.

Aufgabe. Es sind zwei Kreise M, m und eine gerade Linie $a'a''$ gegeben (Fig. 4.); man soll einen Kreis $\mathfrak{M}$ beschreiben, der die beiden gegebenen Kreise gleichartig berührt und dessen Mittelpunkt in der gegebenen geraden Linie liegt.

Auflösung. Man bestimme:

1) die äussere Aehnlichkeitsaxe $a\mathfrak{A}$ (§. 96.);

2) den äusseren Aehnlichkeitskreis $\mathfrak{A}$, welcher die gegebene gerade Linie $a'a''$ entweder schneidet oder nicht schneidet.

3) Im ersteren Falle bestimme man zu einem der Durchschnittspunkte $O'(O'')$ und einem der zu berührenden Kreise $M(m)$ die Linie gleicher Potenzen; so ergiebt sich als Durchschnittspunkt dieser Linie mit der äusseren Aehnlichkeitsaxe $a\mathfrak{A}$ der Pol $P(p)$ der Berührungspunkte des Kreises $M(m)$.

Im letzteren Falle lege man aus dem Hauptpunkte O der äusseren Aehnlichkeitsaxe eine Tangente an den äusseren Aehnlichkeitskreis $\mathfrak{A}$, beschreibe mit derselben als Halbmesser aus dem Hauptpunkte einen Kreis; den Hauptkreis der äusseren Aehnlichkeitsaxe, und bestimme

zu diesem und einem der zu berührenden Kreise $M(m)$ die Linie gleicher Potenzen; so ergiebt sich als Durchschnittspunkt dieser Linie mit der äusseren Aehnlichkeitsaxe $a\mathfrak{A}$ der Pol $P(p)$ der zu dem Kreis $M(m)$ gehörigen Berührungspunkte.

4) Aus dem gefundenen Pol $P(p)$ beschreibe man mit einer an den betreffenden Kreis $M(m)$ gelegten Tangente $PB'(=PB^2)$ $(pb'(=pb^2))$ als Halbmesser den Bestimmungskreis der Berührungspunkte; so ergeben sich letztere als Durchschnittspunkte B' und B^2 (b' und b^2) beider Kreise P und M (p und m).

5) Durch die gerade Verbindungslinie der gefundenen Berührungspunkte B' und B^2 (b' und b^2) mit dem Mittelpunkt des zugehörigen Kreises $M(m)$, resp. deren Verlängerung, ergeben sich als Durchschnittspunkte mit der gegebenen Geraden $a'a''$ zwei Punkte $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}^2$, welche die Mittelpunkte zweier Kreise sind, die beide der Aufgabe genügen.

§. 107.

Sind die Halbmesser der gleichartig zu berührenden Kreise M und m (§. 106.) einander gleich, (Fig. 10.); so fällt der äussere Aehnlichkeitspunkt $\mathfrak{A}$ und somit die äussere Aehnlichkeitsaxe $a\mathfrak{A}$ unendlich weit weg (§. 34.), der äussere Aehnlichkeitskreis $\mathfrak{A}$ wird eine gerade Linie $\mathfrak{A}'\mathfrak{A}''$, steht in der Mitte $\mathfrak{Z}$ der Centrale Mm senkrecht auf dieser (§. 44.) und schneidet entweder die gegebene gerade Linie $a'a''$ in dem Punkte O' (der Schneidungspunkt O' fällt in $a'a''$ unendlich weit weg), oder schneidet sie nicht.

Im ersteren Falle fällt der Pol $P(p)$ der Berührungspunkte, als Durchschnittspunkt der zu dem Punkt O' und dem Kreise $M(m)$ gehörigen Linie gleicher Potenzen mit der äusseren Aehnlichkeitsaxe $a\mathfrak{A}$, unendlich weit weg, die Tangenten $PB'(=PB^2)$ $(pb'(=pb^2))$ ergeben sich als, auf den Endpunkten B' und B^2 (b' und b^2) des in der Linie $O'M$ ($O'm$) liegenden Durchmessers $B'B^2(b'b^2)$ senkrecht stehende Linien PB', $PB^2(pb', pb^2)$, und der in die gerade Linie $P'P''(p'p'')$ übergehende Bestimmungskreis $P(p)$ fällt daher mit $O'M(O'm)$ zusammen. Daher ergeben sich die Berührungspunkte B', B^2 (b', b^2) als Durchschnittspunkte der Linie $O'M(O'm)$ mit dem gegebenen Kreis $M(m)$.

Hieraus folgt ferner, dass der Schneidungspunkt O' des äusseren Aehnlichkeitskreises $\mathfrak{A}'\mathfrak{A}''$ und der gegebenen Geraden $a'a''$

gleichzeitig den Mittelpunkten $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}^2$ (§. 106.) derjenigen Kreise entspricht, welche beide der Aufgabe genügen.

§. 108.

Steht die Centrale *Mm* zweier Kreise von gleichen Halbmessern senkrecht auf der gegebenen Linie $a'a''$, so schneiden sich die gegebene Gerade $a'a''$ und der äussere Aehnlichkeitskreis $\mathfrak{A}'\mathfrak{A}''$ (§. 107.) nicht (Fig. 11.). Es lässt sich dann leicht zeigen, dass die in der gegebenen Geraden $a'a''$ liegenden Mittelpunkte $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}^2$ der zu beschreibenden Kreise unendlich weit wegfallen, dass also die Kreise $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}^2$ in gerade, auf der gegebenen Linie $a'a''$ senkrecht stehende, Linien $\mathfrak{M}^1\mathfrak{M}^{1''}$ und $\mathfrak{M}^2\mathfrak{M}^{2''}$ übergehen, welche Tangenten der gegebenen Kreise *M* und *m* sind.

§. 109.

Werden die Halbmesser der gegebenen Kreise *M* und *m* (Fig. 10. und 11.) unendlich klein, gehen also die Kreise selbst in Punkte über; so fallen auch die Berührungspunkte B' und B^2, sowie b' und b^2, mit den respectiven Punkten *M* und *m* zusammen und die Kreise $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}^2$ vereinigen sich.

§. 110.

Aufgabe. Es sind zwei Kreise, *M* und *m*, und eine gerade Linie $a'a''$ (Fig. 5.) gegeben; man soll einen Kreis $\mathfrak{M}$ beschreiben, der die beiden gegebenen Kreise ungleichartig berührt und dessen Mittelpunkt in der gegebenen geraden Linie liegt.

Auflösung. Man bestimme:

1) die innere Aehnlichkeitsaxe $a\mathfrak{J}$ (§. 103);

2) den inneren Aehnlichkeitskreis $\mathfrak{J}$.

Die Linie $(Q,Q_{,,})$ differenter Potenzen der gegebenen Geraden $a'a''$ in Bezug auf den inneren Aehnlichkeitskreis $\mathfrak{J}$ fällt mit der gegebenen Geraden $a'a''$ zusammen (§. 99. 3.), daher ist der Durchschnittspunkt $Q_{,,}$ der gegebenen Geraden $a'a''$ mit der inneren Aehnlichkeitsaxe $a\mathfrak{J}$ der Hauptpunkt der inneren Aehnlichkeitsaxe, und der Halbmesser des Hauptkreises der inneren Aehnlichkeitsaxe ergiebt sich als gerade Verbindungslinie $Q\mathfrak{B}'$

($=Q\mathfrak{B}''$) des Hauptpunktes Q mit dem Endpunkte $\mathfrak{B}'$ ($\mathfrak{B}''$) des in dem Mittelpunkt $\mathfrak{J}$ des inneren Aehnlichkeitskreises auf die innere Aehnlichkeitsaxe $a\mathfrak{J}$ errichteten Durchmessers $\mathfrak{B}'\mathfrak{B}''$.

Man bestimme den Hauptkreis Q der inneren Aehnlichkeitsaxe und

3) zu diesem Hauptkreis Q und einem der zu berührenden Kreise $M(m)$ die Linie gleicher Potenzen; so ergiebt sich deren Durchschnitt $P^I(p^I)$ mit der inneren Aehnlichkeitsaxe $a\mathfrak{J}$ als Pol der Berührungspunkte.

4) Aus dem gefundenen Pol $P^I(p^I)$ beschreibe man mit einer an den betreffenden Kreis $M(m)$ gelegten Tangente $P^IB^3(=P^IB^4)(p^Ib^3(=p^Ib^4))$ als Halbmesser den Bestimmungskreis der Berührungspunkte, so ergeben sich letztere als Durchnittspunkte B^3 und B^4 (b^3 und b^4) beider Kreise P^I und $M(p^I$ und $m)$.

5) Durch die gerade Verbindungslinie der gefundenen Berührungspunkte B^3 und B^4 (b^3 und b^4) mit dem Mittelpunkt des zugehörigen Kreises $M(m)$, resp. deren Verlängerung, ergeben sich als Durchschnittspunkte mit der gegebenen Geraden $a'a''$ zwei Punkte $\mathfrak{M}^3$ und $\mathfrak{M}^4$, welche die Mittelpunkte zweier Kreise sind, die beide der Aufgabe genügen.

§. 111.

Wird der Halbmesser des Kreises m (Fig. 4. und 5.) unendlich klein, geht also der Kreis m in einen Punkt über; so fallen der äussere Aehnlichkeitspunkt $\mathfrak{A}$ und der innere $\mathfrak{J}$ mit dem Punkte m zusammen (§. 32.) und ebenso fallen der äussere Aehnlichkeitskreis $\mathfrak{A}$ und der innere $\mathfrak{J}$ mit dem Punkte m zusammen (§. 42.). Da nun sowohl die äussere Aehnlichkeitsaxe $a\mathfrak{A}$, wie auch die innere $a\mathfrak{J}$ auf $a'a''$ senkrecht stehen; so fallen auch die Aehnlichkeitsaxen $a\mathfrak{A}$ und $a\mathfrak{J}$, sowie ihre Hauptpunkte O und Q, in einander. (Fig. 6.)

Es tritt nun der Fall ein, dass der äussere Aehnlichkeitskreis $\mathfrak{A}$ die gegebene Gerade $a'a''$ nicht schneidet, daher ist zur Bestimmung des Halbmessers des Hauptkreises O von dem Hauptpunkte O der Aehnlichkeitsaxe eine Tangente an den äusseren Aehnlichkeitskreis zu legen (§. 106. 3.); also im vorliegenden Falle O mit $\mathfrak{A}$ (d. h. dem Punkte m) durch eine Gerade Om zu verbinden. Ferner fällt $\mathfrak{B}'(\mathfrak{B}'')$ mit $\mathfrak{J}$ (d. h. dem Punkte m) zusam-

men und man erhält zur Bestimmung des Halbmessers des Hauptkreises Q die gerade Verbindungslinie Qm des Hauptpunktes Q mit dem gegebenen Punkt m; so dass also auch die Hauptkreise O und Q zusammenfallen.

Es geht hieraus hervor, dass, wenn der Kreis m (Fig. 4. u. 5.) in einen Punkt übergeht, die Aufgaben §§. 106. und 110. sich vereinigen.

§. 112.

Aufgabe. Es sind ein Kreis M, ein Punkt m und eine gerade Linie $a'a''$ gegeben (Fig. 6.); man soll einen Kreis $\mathfrak{M}$ beschreiben, der den gegebenen Kreis M berührt, durch den Punkt m geht, und dessen Mittelpunkt in der geraden Linie $a'a''$ liegt.

Auflösung. Man bestimme:

1) die (äussere oder innere) Aehnlichkeitsaxe ($a\mathfrak{A}$ oder $a\mathfrak{J}$), d. h. man fälle von dem gegebenen Punkt m die Senkrechte $mO\,(mQ)$ auf die gegebene Gerade $a'a''$, und da

2) der (äussere oder innere) Aehnlichkeitskreis ($\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{J}$) mit dem gegebenen Punkt m zusammenfällt (§. 111.); so beschreibe man aus dem Hauptpunkt $O(Q)$ mit der Senkrechten $mO(mQ)$ als Halbmesser den Hauptkreis $O(Q)$.

3) Zu diesem Hauptkreis und dem zu berührenden Kreis M suche man die Linie gleicher Potenzen; so ergiebt sich deren Durchschnitt P mit der Aehnlichkeitsaxe $a\mathfrak{A}$ ($a\mathfrak{J}$) (also mit der von dem gegebenen Punkt m auf die gegebene Gerade $a'a''$ gefällten Senkrechten $mO = mQ$) der Pol der Berührungspunkte.

Man verfahre weiter nach 4) und 5) der §§. 106. u. 110.

§. 113.

Aufgabe. Es sind zwei Punkte M und m und eine gerade Linie $a'a''$ gegeben (Fig. 10.); man soll einen Kreis $\mathfrak{M}$ beschreiben, der durch die gegebenen Punkte geht und dessen Mittelpunkt in der gegebenen Geraden liegt.

Auflösung dieser Aufgabe enthält bereits §. 109., daher die einfache Regel:

Man halbire die gerade Verbindungslinie Mm der gegebenen Punkte M und m in $\mathfrak{J}$, errichte in dem Halbirungspunkt $\mathfrak{J}$ die

Senkrechte $\mathfrak{A}'\mathfrak{A}''$; so ist deren Durchschnittspunkt $\mathfrak{M}$ mit der gegebenen Geraden $a'a''$ der Mittelpunkt des verlangten Kreises.

§. 114.

Aufgabe. Es sind ein Kreis m und zwei gerade Linien $M'M''$ und $a'a''$ gegeben (Fig. 7.); man soll einen Kreis $\mathfrak{M}$ beschreiben, dessen Mittelpunkt in einer der gegebenen Geraden $a'a''$ liegt und der die andere gegebene gerade $M'M''$ und den gegebenen Kreis m gleichartig berührt, d. h. beide ausschliesst.

Auflösung. Man bestimme:

1) die äussere Aehnlichkeitsaxe $a\mathfrak{A}$; (der äussere Aehnlichkeitspunkt $\mathfrak{A}$ ergiebt sich nach §. 31. und nunmehr die Axe $a\mathfrak{A}$ selbst nach §. 96.);

2) den äusseren Aehnlichkeitskreis $\mathfrak{A}$ (§. 39.), welcher die gegebene gerade Linie $a'a''$ entweder schneidet oder nicht schneidet.

3) Im ersteren Falle (wie Fig. 7.) bestimme man zu einem der Durchschnittspunkte $O'(O'')$ und dem zu berührenden Kreise m die Linie gleicher Potenzen; so ergiebt sich als Durchschnittspunkt dieser Linie mit der äusseren Aehnlichkeitsaxe $a\mathfrak{A}$ der Pol p der Berührungspunkte des Kreises m. Im letzteren Falle lege man aus dem Hauptpunkte O der äusseren Aehnlichkeitsaxe eine Tangente an den äusseren Aehnlichkeitskreis $\mathfrak{A}$, beschreibe mit derselben als Halbmesser aus dem Hauptpunkte einen Kreis, den Hauptkreis der äusseren Aehnlichkeitsaxe, und bestimme zu diesem und dem zu berührenden Kreis m die Linie gleicher Potenzen; so ergiebt sich als Durchschnittspunkt dieser Linie mit der äusseren Aehnlichkeitsaxe $a\mathfrak{A}$ der Pol p der zu dem Kreis m gehörigen Berührungspunkte.

4) Aus dem gefundenen Pol p beschreibe man mit einer an den Kreis m gelegten Tangente $pb'(=pb^2)$ als Halbmesser, den Bestimmungskreis der Berührungspunkte; so ergeben sich diese als Durchschnittspunkte b' und b^2 beider Kreise p und m.

5) Durch die gerade Verbindungslinie der gefundenen Berührungspunkte b' und b^2 mit dem Mittelpunkt des gegebenen Kreises m, resp. deren Verlängerung, ergeben sich als Durchschnittspunkte mit der gegebenen Geraden $a'a''$ zwei Punkte $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}^2$, welche die Mittelpunkte zweier Kreise sind, die beide der Aufgabe genügen.

§. 115.

1) Der zu der gegebenen Linie $M'M''$ (§. 114.) gehörige Berührungspol P (Fig. 7.) bestimmt sich, weil (nach §. 53. 3.) für einen gegebenen Punkt (O') und eine Gerade ($M'M''$) letztere selbst die zugehörige Linie gleicher Potenzen ist, die Berührungspole für gleichartige Berührung aber in der äusseren Aehnlichkeitsaxe $a\mathfrak{A}$ liegen, als Durchschnittspunkt der zu berührenden Geraden $M'M''$ mit der äusseren Aehnlichkeitsaxe $a\mathfrak{A}$.

Da nun die äussere Aehnlichkeitsaxe $a\mathfrak{A}$ die Linie gleicher Potenzen der conjugirten Berührungskreise $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}^2$ ist (§. 54.); so ergiebt sich der Halbmesser $O'P$ ($= O''P$) des zu der gegebenen Geraden $M'M''$ gehörigen Bestimmungskreises P, für den Fall, dass der äussere Aehnlichkeitskreis $\mathfrak{A}$ die gegebene Gerade $a'a''$ schneidet, alsbald durch die gerade Verbindung des Poles P mit einem der Durchschnittspunkte O' oder O''. Hierdurch bestimmt sich ein Paar, und zwar das der gegebenen Geraden $M'M''$ zugehörige Paar Berührungspunkte B' und B^2 schneller, als nach §. 114. 3. das dem Kreise m angehörige Paar Berührungspunkte b' und b^2.

2) Für den Fall aber, dass der äussere Aehnlichkeitskreis $\mathfrak{A}$ die gegebene Gerade $a'a''$ nicht schneidet, und man die Berührungspunkte B' und B^2 unabhängig von den Berührungspunkten b' und b^2 des Kreises m bestimmen wollte, nehme man in Betracht, dass die gegebene Linie $a'a''$ die Linie gleicher Potenzen ist zu dem äusseren Aehnlichkeitskreis $\mathfrak{A}$ und dem Bestimmungskreis P der Berührungspunkte B' und B^2, und suche zu dem äusseren Aehnlichkeitskreis $\mathfrak{A}$, der gegebenen Geraden $a'a''$ als gegebene Linie gleicher Potenzen, und dem Pole P als Mittelpunkt des zweiten Kreises, diesen zweiten Kreis P selbst; so ergeben sich dann die Berührungspunkte B' und B^2 als Durchschnittspunkte desselben mit der gegebenen Geraden $M'M''$.

§. 116.

Aufgabe. Ein Kreis m und zwei gerade Linien $M'M''$ und $a'a''$ sind gegeben (Fig. 8.); man soll einen Kreis $\mathfrak{M}$ beschreiben, dessen Mittelpunkt in einer der gegebenen Geraden $a'a''$ liegt, und

der die andere gegebene Gerade $M'M''$ und den gegebenen Kreis m ungleichartig berührt, d. h. den Kreis m einschliesst und die Gerade $M'M''$ ausschliesst.

Auflösung. Man bestimme:

1) die innere Aehnlichkeitsaxe $a\mathfrak{J}$, (der innere Aehnlichkeitspunkt $\mathfrak{J}$ ergiebt sich nach §. 31. und nunmehr die Axe $a\mathfrak{J}$ selbst nach §. 103.);

2) den inneren Aehnlichkeitskreis $\mathfrak{J}$ (nach §. 40.). Der Hauptpunkt Q der inneren Aehnlichkeitsaxe ergiebt sich als Durchschnittspunkt dieser Axe mit der gegebenen Geraden $a'a''$ (§. 110. 2.), und nun bestimme man den Hauptkreis Q der inneren Aehnlichkeitsaxe (nach §. 110. 2.).

3) Zu diesem Hauptkreis Q und dem gegebenen Kreise m bestimme man die Linie gleicher Potenzen; so ergiebt sich deren Durchschnitt p^I mit der inneren Aehnlichkeitsaxe $a\mathfrak{J}$ als Pol der Berührungspunkte b^3 und b^4.

Schliesslich verfahre man ganz nach §. 114. 4) und 5); so erhält man in der Geraden $a'a''$ zwei Punkte $\mathfrak{M}^3$ und $\mathfrak{M}^4$, welche die Mittelpunkte zweier Kreise sind, die beide der Aufgabe genügen.

§. 117.

Um auch für ungleichartige Berührung die der zu berührenden Geraden $M'M''$ zugehörigen Berührungspunkte B^3 und B^4 (analog §. 115. für gleichartige Berührung), unabhängig von den Berührungspunkten b^3 und b^4 des Kreises m zu bestimmen, lege man von dem Durchschnittspunkt P^I der zu berührenden Geraden $M'M''$ (Fig. 8.) mit der inneren Aehnlichkeitsaxe $a\mathfrak{J}$ eine Tangente an den Hauptkreis Q und beschreibe mit derselben einen Kreis P^I; so schneidet derselbe die zu berührende Gerade $M'M''$ in den verlangten zwei Punkten B^3 und B^4.

§. 118.

Wird der Halbmesser des Kreises m (Fig. 7. und 8.) unendlich klein, geht also der Kreis m in einen Punkt über (Fig. 9.); so fallen mit dem Punkt m zusammen: der äussere Aehnlichkeitspunkt $\mathfrak{A}$ und der innere $\mathfrak{J}$, ebenso der äussere Aehnlichkeitskreis $\mathfrak{A}$ und der innere $\mathfrak{J}$ (§. 42.).

Da nun sowohl die äussere Aehnlichkeitsaxe $a\mathfrak{A}$, wie auch

die innere $a\mathfrak{J}$ auf $a'a''$ senkrecht stehen; so fallen auch diese Linien, so wie ihre Hauptpunkte O und Q in einander. Es tritt nun der Fall ein, dass der äussere Aehnlichkeitskreis $\mathfrak{A}$ die gegebene Gerade $a'a''$ nicht schneidet; daher ist zur Bestimmung des Hauptkreises O von dem Hauptpunkte O eine Tangente an den äusseren Aehnlichkeitskreis $\mathfrak{A}$ zu legen (§. 114. 3.), also in vorliegendem Falle O mit $\mathfrak{A}$ (d. h. dem gegebenen Punkte m) durch eine Gerade Om zu verbinden.

Ferner fällt $\mathfrak{B}'(\mathfrak{B}'')$ mit $\mathfrak{J}$ (d. h. dem gegebenen Punkte m) zusammen und man erhält zur Bestimmung des Halbmessers des Hauptkreises Q die gerade Verbindungslinie Qm des Hauptpunktes Q mit dem gegebenen Punkt m, so dass also auch die Hauptkreise O und Q zusammenfallen.

Es geht hieraus hervor, dass, wenn der Kreis m (Fig. 7. u. 8.) in einen Punkt übergeht, die Aufgaben der §§. 114. und 116. sich vereinigen.

§. 119.

Aufgabe. Es sind zwei gerade Linien $a'a''$, $M'M''$ und ein Punkt m gegeben (Fig. 9.); man soll einen Kreis $\mathfrak{M}$ beschreiben, dessen Mittelpunkt in der gegebenen Geraden $a'a''$ liegt, der die Gerade $M'M''$ berührt und zugleich durch den Punkt m geht.

Auflösung dieser Aufgabe folgt nach §. 118. leicht aus den §§. 114. und 116., daher die einfache Regel:

Man fälle durch den gegebenen Punkt m auf die Gerade $a'a''$ eine Senkrechte, welche diese Gerade $a'a''$ in O und die gegebene Gerade $M'M''$ in P schneidet, beschreibe aus O mit Om einen Kreis, lege an denselben von P aus eine Tangente und beschreibe mit derselben aus P einen Kreis, so schneidet dieser die gegebene Gerade in den Berührungspunkten B' und B^2 zweier Kreise $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}^2$, welche beide der Aufgabe genügen. Die Mittelpunkte $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}^2$ dieser Kreise erhält man als Durchschnittspunkte der auf $M'M''$ in den Berührungspunkten B' und B^2 errichteten Senkrechten ($B'\mathfrak{M}'$ und $B^2\mathfrak{M}^2$) mit der gegebenen Geraden $a'a''$.

§. 120.

Es ist aus den §§. 112. und 119. leicht abzuleiten, wie man verfahren müsse, wenn die Aufgabe gestellt sei: Einen Kreis $\mathfrak{M}$ zu beschreiben, dessen Mittelpunkt in einer gegebenen Geraden

$a'a''$ zu liegen und der einen gegebenen Kreis M (eine gegebene Gerade $M'M''$) in einem bestimmten Punkt zu zu berühren habe.

§. 121.

Behält der Kreis m (Fig. 7. und 8.) in seiner Peripherie irgend einen festen Punkt, wird aber dabei sein Halbmesser unendlich gross gedacht; so geht der Kreis m in eine gerade Linie $m'm''$, und zwar in die Tangente seines festen Punktes über (Fig. 12.), und die Aufgabe verwandelt sich in die Bestimmung eines Kreises M, dessen Mittelpunkt in einer Geraden $a'a''$ liege und der zwei Gerade, $M'M''$ und $m'm''$, zu berühren habe. Hierbei fallen äusserer und innerer Aehnlichkeitspunkt 𝔄 und 𝔍 unendlich weit weg und zwar in Richtungen, welche den Halbirungslinien der, von den zu berührenden Linien $M'M''$ und $m'm''$ gebildeten, Nebenwinkel ($m'NM'$ und $m'NM''$) entsprechen (§. 36.).

Nehmen wir an, der äussere Aehnlichkeitspunkt 𝔄 falle in die Richtung der den Winkel $m'NM'$ halbirenden Linie; so fällt der innere Aehnlichkeitspunkt 𝔍 in die den Nebenwinkel $m'NM''$ halbirende Richtung (§. 37.).

Unter dieser Voraussetzung fällt der äussere Aehnlichkeitskreis 𝔄'𝔄'' mit der Halbirungslinie dieses Nebenwinkels $m'NM''$ und der innere Aehnlichkeitskreis mit der Halbirungslinie jenes Winkels $m'NM'$ zusammen (§. 50.). Da der äussere Aehnlichkeitspunkt 𝔄 und der innere 𝔍 unendlich weit wegfallen, so ist dieses auch der Fall mit der äusseren Aehnlichkeitsaxe a𝔄 und mit der inneren a𝔍 und folglich auch mit den Hauptpunkten O und Q dieser Axen und mit den Polen P, (P^I), p, (p^I) der Berührungspunkte als Punkte dieser Linien a𝔄 und a𝔍.

Nun schneidet der äussere Aehnlichkeitskreis 𝔄'𝔄'' die gegebene Gerade $a'a''$ in dem Punkt O' und der innere Aehnlichkeitskreis 𝔍'𝔍'' schneidet sie in dem Punkt Q' und die coordinirten Durchschnittspunkte O'' und Q'' fallen unendlich weit weg.

Da aber der, der gegebenen Geraden $M'M''(m'm'')$ entsprechende Pol $P(p)$ der Berührungspunkte in der Linie $M'M''(m'm'')$ unendlich weit wegfällt; so ist für gleichartige Berührung*) der Bestimmungskreis der, der Linie $M'M''(m'm'')$ entsprechenden Berührungspunkte die durch O' auf die Gerade $M'M''(m'm'')$ ge-

*) Ein eigentlicher Constructions-Unterschied zwischen gleichartiger und ungleichartiger Berührung kann hier (nach §. 69.) nicht stattfinden.

fällte Senkrechte $P'P''(p'p'')$, also ihr Durchschnitt $B'(b')$ mit der Geraden $M'M''(m'm'')$ ein Berührungspunkt dieser Linie. Es folgt hieraus, dass der Mittelpunkt $\mathfrak{M}'$ des entsprechenden Berührungskreises mit dem Punkt O' zusammen, der Berührungspunkt B^2 (b^2) aber, also auch der Mittelpunkt $\mathfrak{M}^2$ des entsprechenden mit $\mathfrak{M}'$ conjugirten Kreises, sowie dieser Kreis $\mathfrak{M}^2$ selbst, unendlich weit wegfallen. Ebenso erhält man für ungleichartige Berührung*), dass, weil der, der gegebenen Geraden $M'M''(m'm'')$ entsprechende Pol $P^I(p^I)$ der Berührungspunkte in der Linie $M'M''(m'm'')$ unendlich weit wegfällt, der Bestimmungskreis der, der Linie $M'M''$ $(m'm'')$ entsprechenden Berührungspunkte die durch Q' auf die Gerade $M'M''(m'm'')$ gefällte Senkrechte $P^{I'}P^{I''}(p^{I'}p^{I''})$, also ihr Durchschnitt $B^3(b^3)$ mit der Geraden $M'M''(m'm'')$ ein Berührungspunkt dieser Linie ist. Und ferner folgt, dass der Mittelpunkt $\mathfrak{M}^3$ des entsprechenden Berührungskreises mit dem Punkte Q' zusammen, der Berührungspunkt B^4 aber, also auch der Mittelpunkt $\mathfrak{M}^4$ des entsprechenden mit $\mathfrak{M}^3$ conjugirten Kreises, sowie dieser Kreis selbst, unendlich weit wegfallen.

§. 122.

Aufgabe. Gegeben sind drei gerade Linien $M'M''$, $m'm''$, $a'a''$ (Fig. 12.); man soll einen Kreis beschreiben, der die zwei ersteren Geraden, $M'M''$ und $m'm''$, berührt und dessen Mittelpunkt in der letzteren, $a'a''$, liegt.

Auflösung dieser Aufgabe enthält bereits §. 121. und aus ihm fliesst die einfache Regel: Man halbire den von den gegebenen und zu berührenden Linien, $M'M''$ und $m'm''$, gebildeten Winkel $m'NM''$, sowie seinen Nebenwinkel $m'NM'$, so schneiden die entsprechenden Halbirungslinien, $\mathfrak{A}'\mathfrak{A}''$ und $\mathfrak{J}'\mathfrak{J}''$, die gegebene Gerade $a'a''$ in zwei Punkten $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}^3$, welche die Mittelpunkte zweier Kreise sind, die beide der Aufgabe genügen.

Die entsprechenden Berührungspunkte B', b' und B^3, b^3 ergeben sich als die Durchschnittspunkte der von den gefundenen Mittelpunkten $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}^3$ auf die gegebenen Geraden $M'M''$ und $m'm''$ gefällten Senkrechten.

Die vierte Abtheilung dieser Abhandlung folgt in einem der nächsten Hefte.

---

*) S. vorige Seite.

XXII.

Ueber den Gebrauch der Spiegel-Sextanten bei geodätischen Messungen.

Von

dem Herausgeber.

Dass zu allen geodätischen Messungen der die Winkel sogleich auf den Horizont projicirende Theodolit das geeignetste und beste, die meiste Genauigkeit gewährende Instrument ist, kann keinem Zweifel unterworfen sein; aber freilich unterliegt sein Gebrauch nicht unerheblichen Schwierigkeiten und Unbequemlichkeiten, und namentlich ist der Transport auch des leichtesten und einfachsten Instruments dieser Art immer beschwerlich und nicht unter allen Umständen leicht zu beschaffen, auch mit Kosten verknüpft, weil er immer einen Hülfs-Arbeiter voraussetzt. Wer namentlich, wie der Herausgeber dieser Zeitschrift, selbst einsame Spaziergänge, sei es auch nur zu seinem Vergnügen, zu gelegentlichen geodätischen Aufnahmen benutzt, um sich nach und nach ein Bild der Umgegend seines Wohnorts zu verschaffen, ist nothwendig auf die Anwendung eines anderen Instrumentes hingewiesen. Kein besseres Werkzeug zu diesem Zwecke besitzt aber jetzt nach meiner Meinung die Wissenschaft, als den Spiegel-Sextanten, der von mehreren geschickten Künstlern gegenwärtig bei ungemein kleinen Dimensionen mit sehr grosser Vollendung und Genauigkeit angefertigt wird. Aber freilich hat dieses Instrument für den vorliegenden Zweck den Nachtheil, dass damit nicht die auf den Horizont projicirten Winkel, sondern die meistens in gegen den Horizont geneigten Ebenen liegenden Winkel

selbst gemessen werden, so dass dieselben, bevor sie in die Rechnung eingeführt werden können, immer erst noch auf den Horizont projicirt oder reducirt werden müssen, wozu die Messung der Neigungswinkel ihrer Schenkel gegen den Horizont erforderlich ist. Diese Neigungswinkel lassen sich bekanntlich allerdings auch mit dem Sextanten messen, wozu aber erfordert wird, dass man einen Quecksilber-Horizont bei sich führe, was zwar nicht sehr beschwerlich ist, da diese Horizonte bekanntlich in, die Grösse gewöhnlicher runder Tabacksdosen nicht übersteigende Dosen eingeschlossen werden, aber in der That nicht viel nützt, weil die Beobachtung vom Quecksilber-Horizonte auf freiem Felde, wo man den Horizont unmittelbar auf dem Erdboden aufzustellen genöthigt ist, häufig nur mit grosser Beschwerde ausgeführt werden kann, viele Zeit in Anspruch nimmt, und die oscillirenden Bewegungen des Quecksilbers nur selten vollständig aufhören, wozu dann aber hauptsächlich noch kommt, dass die entfernten terrestrischen Objecte meistens so schwach beleuchtet und die zu messenden vertikalen Neigungswinkel meistens so klein sind, dass deren Bestimmung mit dem Quecksilberhorizont ganz unthunlich und unausführbar ist. Daher ist nach meiner Meinung dieses Hülfsmittel zur Messung der vertikalen Neigungswinkel bei geodätischen Messungen mit dem Sextanten ganz zu verwerfen, und man ist daher genöthigt, noch ein besonderes Instrument zur Ausführung dieser Messungen bei sich zu führen, was zwar leicht in hinreichender Leichtigkeit und Genauigkeit erdacht und construirt werden kann, aber den Beobachter auf seinen einsamen Excursionen doch unter allen Umständen sehr belästigt und beschwert. In einem so ganz ebenen Lande wie das Küstenland, welches mir die Vorsehung zum Wohnsitze angewiesen hat, lässt sich freilich die Reduction der gemessenen Winkel auf den Horizont meistens ganz vernachlässigen, ohne die Genauigkeit der Resultate wesentlich zu beeinträchtigen, und der Sextant ist in der That schon häufig, namentlich früher, bei Landesvermessungen wohl in dieser Weise mit Vortheil angewandt worden, worüber man z. B. die vielleicht fast etwas zu warme und die Kraft des Instrumentes etwas überschätzende Empfehlung v. Zach's in der Monatlichen Correspondenz. Thl. III. 1801. S. 510. und S. 511. nachsehen kann, wenn auch an dieser Stelle nicht geradezu bemerkt wird, dass die Reduction der gemessenen Winkel auf den Horizont überall unterlassen worden sei, was jedoch, wenn ich mich recht erinnere, v. Textor an einer anderen Stelle in Bezug auf seine in dem theilweise gleichfalls sehr ebenen Westphalen ausgeführten Messungen ausdrücklich bemerkt. In Gegenden aber, die einigermaassen erhebliche Erhöhungen des Bodens darbieten,

darf man die Reduction der mit dem Sextanten in gegen den Horizont geneigten Ebenen gemessenen Winkel auf den Horizont unter keiner Bedingung vernachlässigen, und da die besondere Messung der zur Ausführung dieser Reduction erforderlichen Data, wie ich oben mit hinreichender Deutlichkeit glaube dargelegt zu haben, unter allen Umständen Beschwerden mancherlei Art herbeiführt, so will ich mir erlauben, in diesem Aufsatze ein besonderes Aufnahme-System mit dem Spiegel-Sextanten zu entwickeln, welches die unmittelbare Messung der Neigungswinkel der betreffenden Gesichtslinien gegen den Horizont gar nicht erfordert, und nicht bloss zur Kenntniss der horizontalen Projection der aufzunehmenden Gegend, sondern auch zur Kenntniss der Höhenverhältnisse aller in den Kreis der Messung gezogenen Punkte führt.

Jede geodätische Messung, bei welcher mittelst des Theodoliten die auf den Horizont projicirten Winkel gemessen werden, ist bekanntlich auf eine mit aller nur möglichen Genauigkeit zu messende horizontale Grundlinie, Basis oder Standlinie zu gründen. Bei jeder mit dem Spiegel-Sextanten auszuführenden geodätischen Messung, bei welcher nur die in gegen den Horizont geneigten Ebenen liegenden Winkel mit dem Sextanten gemessen worden, muss man dagegen von einem Dreiecke ausgehen, dessen auf den Horizont projicirte Seiten mit aller nur möglichen Genauigkeit gemessen, und für dessen drei Spitzen oder Ecken, die Höhen über einer beliebig angenommenen Horizontalebene oder auch nur die relativen Höhen gleichfalls mit aller nur möglichen Genauigkeit bestimmt worden sind; überhaupt also kann man sagen, dass jeder mit dem Sextanten auszuführenden geodätischen Aufnahme, bei welcher nur die in gegen den Horizont geneigten Ebenen liegenden Winkel selbst gemessen werden, drei Punkte zu Grunde gelegt werden müssen, deren Lage im Raume man auf irgend eine Weise mit aller nur möglichen Genauigkeit bestimmt hat, und diese drei Punkte treten bei einer Messung von der in Rede stehenden Art ganz an die Stelle der einer Messung mit dem die Winkel auf den Horizont projicirenden Theodoliten zu Grunde zu legenden Basis oder Standlinie. Dass man bei Messungen der ersteren Art nicht wie bei Messungen der zweiten Art mit zwei Fundamentalpunkten ausreicht, sondern drei Fundamentalpunkte nöthig hat, liegt darin, weil man bei jenen Messungen wie bei letzteren die Projection der Gegend auf den Horizont kennen zu lernen wünscht, aber nicht die auf den Horizont projicirten Winkel, sondern die wirklichen Naturwinkel, um so zu sagen, misst, und weil man zugleich auch zur Kenntniss der Höhenverhältnisse der in den Kreis der Aufnahme gezogenen Objecte ge-

langen will, was man bei Aufnahmen mit dem Theodoliten wenigstens in den meisten Fällen nicht beabsichtigt oder nicht unbedingt zu beabsichtigen braucht. Dies ist im Allgemeinen der Grundgedanke, dem das Aufnahme-System mit dem Spiegel-Sextanten, das ich in diesem Aufsatze etwas näher zu entwickeln beabsichtige, seine Entstehung verdankt.

Wie man sich die Kenntniss der gegenseitigen Lage der drei Fundamentalpunkte im Raume verschaffen kann, braucht hier nicht weitläufig aus einander gesetzt zu werden. Bemerkt mag nur werden, dass man auf einem möglichst ebenen und horizontalen Terrain drei möglichst weit von einander entfernte Punkte auswählen wird, deren horizontale Entfernungen von einander durch die bekannten Mittel zur Längenmessung mit aller nur möglichen Genauigkeit bestimmt werden müssen. Die Höhenunterschiede der drei Fundamentalpunkte wird man aber, wie es mir scheint, am besten und mit der grössten Genauigkeit durch ein genaues Nivellement ermitteln, wozu freilich dem Beobachter ein gutes Nivellirinstrument zu Gebote stehen muss. Dass man sich auch anderer Hülfsmittel bedienen könnte, versteht sich von selbst; aber das vorher angedeutete Verfahren scheint mir das beste zu sein und die grösste Genauigkeit zu gewähren, vorausgesetzt, dass die drei Fundamentalpunkte auf einem möglichst ebenen und horizontalen Terrain angenommen worden sind, was ja bekanntlich auch bei der Annahme der Endpunkte einer jeden zu messenden Basis oder Standlinie besonders zu beachten ist. Hat man nun aber die Lage der drei Fundamentalpunkte genau bestimmt, so kann die ganze übrige Messung bloss mit dem Sextanten ausgeführt werden, und reducirt sich lediglich auf die Auflösung der folgenden Aufgabe:

Wenn die Lage dreier Punkte A_0, A_1, A_2 im Raume gegeben ist, und, wenn M einen vierten seiner Lage im Raume nach noch unbekannten Punkt bezeichnet, in den Punkten A_0, A_1, A_2 die vier Winkel $\overline{A_1A_0M}$, $\overline{A_2A_0M}$, $\overline{A_0A_1M}$, $\overline{A_0A_2M}$ der Dreiecke $\overline{A_0A_1M}$, $\overline{A_0A_2M}$ gemessen worden sind, die Lage des Punktes M zu bestimmen.

Man kann diese Aufgabe auf verschiedene Arten auflösen, immer aber wird die Auflösung und die durch dieselbe nöthig gemachte numerische Rechnung nicht ganz einfach ausfallen können. Die folgende analytische Auflösung scheint mir die grösste Allgemeinheit darzubieten und insbesondere dadurch sich zu empfehlen, dass sie ein Zurückgehen auf eine Figur, sowie eine Unterscheidung verschiedener Fälle, gar nicht erfordert.

Ein rechtwinkliges Coordinatensystem zu Grunde legend, wollen wir die gegebenen Coordinaten der drei Punkte A_0, A_1, A_2 respective durch

$$a_0, b_0, c_0; \quad a_1, b_1, c_1; \quad a_2, b_2, c_2$$

bezeichnen. Werden dann ferner die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche die beiden von dem Punkte A_0 ausgehend gedachten Linien $\overline{A_0A_1}$ und $\overline{A_0A_2}$ mit den positiven Theilen der drei Coordinatenaxen einschliessen, respective durch $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ bezeichnet; so können diese Winkel und die beiden Entfernungen $\overline{A_0A_1}$ und $\overline{A_0A_2}$ aus den gegebenen Coordinaten der Punkte A_0, A_1, A_2 leicht auf folgende Art berechnet werden. Die Entfernungen A_0A_1 und A_0A_2 findet man mittelst der Formeln:

$$\overline{A_0A_1} = \sqrt{(a_1-a_0)^2+(b_1-b_0)^2+(c_1-c_0)^2},$$

$$\overline{A_0A_2} = \sqrt{(a_2-a_0)^2+(b_2-b_0)^2+(c_2-c_0)^2};$$

und zur Berechnung der Winkel $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ hat man dann die einfachen Ausdrücke:

$$\cos\alpha_1 = \frac{a_1-a_0}{\overline{A_0A_1}}, \quad \cos\beta_1 = \frac{b_1-b_0}{\overline{A_0A_1}}, \quad \cos\gamma_1 = \frac{c_1-c_0}{\overline{A_0A_1}}$$

und

$$\cos\alpha_2 = \frac{a_2-a_0}{\overline{A_0A_2}}, \quad \cos\beta_2 = \frac{b_2-b_0}{\overline{A_0A_2}}, \quad \cos\gamma_2 = \frac{c_2-c_0}{\overline{A_0A_2}}.$$

Die Berechnung der Entfernungen $\overline{A_0A_1}$ und $\overline{A_0A_2}$ mittelst der obigen Formeln erleichtert man sich dadurch, dass man die Hülfswinkel $\omega_1, \overline{\omega}_1$ und $\omega_2, \overline{\omega}_2$ mittelst der Formeln

$$\tang\omega_1 = \frac{b_1-b_0}{a_1-a_0}, \quad \tang\overline{\omega}_1 = \frac{c_1-c_0}{a_1-a_0}\cos\omega_1$$

und

$$\tang\omega_2 = \frac{b_2-b_0}{a_2-a_0}, \quad \tang\overline{\omega}_2 = \frac{c_2-c_0}{a_2-a_0}\cos\omega_2$$

berechnet; denn dann ist, wie man leicht findet:

$$\overline{A_0A_1} = \text{val.abs.}\frac{a_1-a_0}{\cos\omega_1\cos\overline{\omega}_1}, \quad \overline{A_0A_2} = \text{val.abs.}\frac{a_2-a_0}{\cos\omega_2\cos\overline{\omega}_2};$$

und auf ganz ähnliche Art kann man auch noch die Entfernung $\overline{A_1A_2}$ mittelst der Formel

$$\overline{A_1A_2}=\sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2+(c_1-c_2)^2}$$

berechnen.

Da man nun in jedem der beiden Dreiecke $\overline{A_0A_1M}$ und $\overline{A_0A_2M}$ eine Seite, $\overline{A_0A_1}$ und $\overline{A_0A_2}$, und die beiden daran liegenden, mit dem Sextanten gemessenen Winkel kennt, so lassen sich die drei Entfernungen $\overline{A_0M}$, $\overline{A_1M}$, $\overline{A_2M}$ des Punktes M von den drei Punkten A_0, A_1, A_2 leicht berechnen, und diese Entfernungen können also im Folgenden als bekannt angenommen werden. Bezeichnen wir der Kürze wegen die beiden mit dem Sextanten gemessenen Winkel $\overline{A_1A_0M}$ und $\overline{A_2A_0M}$ respective durch μ_1 und μ_2, und die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche die von dem Punkte A_0 ausgehend gedachte Linie $\overline{A_0M}$ mit den positiven Theilen der drei Coordinatenaxen einschliesst, durch φ, ψ, χ; so haben wir zur Bestimmung dieser drei Winkel die drei folgenden Gleichungen:

$$\cos\mu_1=\cos\alpha_1\cos\varphi+\cos\beta_1\cos\psi+\cos\gamma_1\cos\chi,$$

$$\cos\mu_2=\cos\alpha_2\cos\varphi+\cos\beta_2\cos\psi+\cos\gamma_2\cos\chi,$$

$$\cos\varphi^2+\cos\psi^2+\cos\gamma^2=1.$$

Wenn die drei Punkte A_0, A_1, A_2 in gerader Linie lägen, so wäre offenbar mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$\cos\alpha_2=\pm\cos\alpha_1,\quad \cos\beta_2=\pm\cos\beta_1,\quad \cos\gamma_2=\pm\cos\gamma_1;$$

$$\cos\mu_2=\pm\cos\mu_1.$$

und die zwei ersten der drei obigen Gleichungen würden daher in eine zusammenfallen, also die Bestimmung der Winkel φ, ψ, χ mittelst der obigen Gleichungen, und daher auch die Bestimmung der Lage des Punktes M aus den angestellten Beobachtungen, nicht möglich sein, was auch ohne diese analytische Betrachtung sogleich in die Augen fällt. Man sieht daher, dass die Punkte A_0, A_1, A_2 nie in einer geraden Linie liegen dürfen, und überhaupt auch von der geradlinigen Lage möglichst abweichen müssen.

Die drei obigen Gleichungen werden nun mittelst des folgenden schon früher in ähnlicher Weise bei anderer Gelegenheit*) von mir angewandten Verfahrens aufgelöst. Den 180° nicht über-

*) Thl. XXIV. S. 183.

steigenden Winkel Ω berechne man mittelst der Formel

$$\cos\Omega=\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2.$$

Man übersieht leicht, dass der Winkel Ω der Winkel $\overline{A_1A_0A_2}$ des Dreiecks $\overline{A_0A_1A_2}$ ist, so dass dieser Winkel, wenn man sich der vorhergehenden Formeln nicht bedienen wollte, sich auch mittelst der bekannten Formeln der ebenen Trigonometrie aus den drei nach dem Obigen bereits bekannten Seiten des in Rede stehenden Dreiecks berechnen lassen würde. Hierauf berechne man die drei Grössen A, B, C mittelst der Formeln

$$A=\frac{(\cos\alpha_1-\cos\alpha_2\cos\Omega)\cos\mu_1+(\cos\alpha_2-\cos\alpha_1\cos\Omega)\cos\mu_2}{\sin\Omega^2},$$

$$B=\frac{(\cos\beta_1-\cos\beta_2\cos\Omega)\cos\mu_1+(\cos\beta_2-\cos\beta_1\cos\Omega)\cos\mu_2}{\sin\Omega^2},$$

$$C=\frac{(\cos\gamma_1-\cos\gamma_2\cos\Omega)\cos\mu_1+(\cos\gamma_2-\cos\gamma_1\cos\Omega)\cos\mu_2}{\sin\Omega^2}$$

und setze

$$\cos\varphi=A+X,\quad \cos\psi=B+Y,\quad \cos\chi=C+Z.$$

Dann überzeugt man sich zuvörderst leicht von der Richtigkeit der zwei Gleichungen

$$A\cos\alpha_1+B\cos\beta_1+C\cos\gamma_1=\cos\mu_1,$$

$$A\cos\alpha_2+B\cos\beta_2+C\cos\gamma_2=\cos\mu_2;$$

und weil nun nach dem Obigen

$$\cos\mu_1=\cos\alpha_1\cos\varphi+\cos\beta_1\cos\psi+\cos\gamma_1\cos\chi,$$

$$\cos\mu_2=\cos\alpha_2\cos\varphi+\cos\beta_2\cos\psi+\cos\gamma_2\cos\chi$$

ist, so ist offenbar

$$\cos\alpha_1.X+\cos\beta_1.Y+\cos\gamma_1.Z=0,$$

$$\cos\alpha_2.X+\cos\beta_2.Y+\cos\gamma_2.Z=0;$$

was mittelst der obigen Ausdrücke von A, B, C ferner sogleich zu der Gleichung

$$AX+BY+CZ=0$$

führt. Quadrirt man dann die drei Gleichungen

$$\cos\varphi=A+X,\quad \cos\psi=B+Y,\quad \cos\chi=C+Z$$

und addirt sie hierauf zu einander, so erhält man auf der Stelle die Gleichung

$$(A^2+B^2+C^2)+(X^2+Y^2+Z^2)=1$$

oder

$$X^2+Y^2+Z^2=1-(A^2+B^2+C^2).$$

Drückt man nun die Grössen A, B, C auf folgende Art aus:

$$A=\frac{\cos\alpha_1\cos\mu_1+\cos\alpha_2\cos\mu_2-\cos\Omega(\cos\alpha_1\cos\mu_2+\cos\alpha_2\cos\mu_1)}{\sin\Omega^2},$$

$$B=\frac{\cos\beta_1\cos\mu_1+\cos\beta_2\cos\mu_2-\cos\Omega(\cos\beta_1\cos\mu_2+\cos\beta_2\cos\mu_1)}{\sin\Omega^2},$$

$$C=\frac{\cos\gamma_1\cos\mu_1+\cos\gamma_2\cos\mu_2-\cos\Omega(\cos\gamma_1\cos\mu_2+\cos\gamma_2\cos\mu_1)}{\sin\Omega^2};$$

so findet man mittelst leichter Rechnung mit Hülfe der aus dem Obigen bekannten Gleichungen:

$$A^2+B^2+C^2=\frac{\cos\mu_1{}^2+\cos\mu_2{}^2-2\cos\Omega\cos\mu_1\cos\mu_2}{\sin\Omega^2},$$

und hat also jetzt zur Bestimmung der Grössen X, Y, Z die drei folgenden Gleichungen:

$$\cos\alpha_1 . X+\cos\beta_1 . Y+\cos\gamma_1 . Z=0,$$

$$\cos\alpha_2 . X+\cos\beta_2 . Y+\cos\gamma_2 . Z=0,$$

$$X^2+Y^2+Z^2=1-\frac{\cos\mu_1{}^2+\cos\mu_2{}^2-2\cos\Omega\cos\mu_1\cos\mu_2}{\sin\Omega^2}.$$

Bekanntlich ist eine Grösse von der Form

$$\left(\frac{\cos\mu_1}{\sin\Omega}\right)^2+\left(\frac{\cos\mu_2}{\sin\Omega}\right)^2-2\frac{\cos\mu_1}{\sin\Omega}\cdot\frac{\cos\mu_2}{\sin\Omega}\cos\Omega$$

stets positiv; und weil nun auch die Grösse $X^2+Y^2+Z^2$ stets positiv ist, so kann, wenn die Aufgabe überhaupt möglich sein soll, die vorstehende Grösse nicht grösser als die Einheit sein, so dass wir also

$$\cos\Theta=\sqrt{\left(\frac{\cos\mu_1}{\sin\Omega}\right)^2+\left(\frac{\cos\mu_2}{\sin\Omega}\right)^2-2\frac{\cos\mu_1}{\sin\Omega}\cdot\frac{\cos\mu_2}{\sin\Omega}\cos\Omega},$$

folglich nach dem Obigen

$$X^2+Y^2+Z^2=\sin\Theta^2$$

zu setzen berechtigt sind.

Drücken wir mittelst der Gleichungen

$$\cos\alpha_1 . X+\cos\beta_1 . Y+\cos\gamma_1 . Z=0,$$

$$\cos\alpha_2 . X+\cos\beta_2 . Y+\cos\gamma_2 . Z=0$$

die Grössen Y, Z beide durch X aus, so erhalten wir:

$$Y=\frac{\cos\gamma_1\cos\alpha_2-\cos\alpha_1\cos\gamma_2}{\cos\beta_1\cos\gamma_2-\cos\gamma_1\cos\beta_2}X,$$

$$Z=\frac{\cos\alpha_1\cos\beta_2-\cos\beta_1\cos\alpha_2}{\cos\beta_1\cos\gamma_2-\cos\gamma_1\cos\beta_2}X;$$

also, wie man leicht findet,

$$\frac{X^2+Y^2+Z^2}{X^2}=\frac{1-(\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2)^2}{(\cos\beta_1\cos\gamma_2-\cos\gamma_1\cos\beta_2)^2},$$

oder nach dem Obigen:

$$\frac{X^2+Y^2+Z^2}{X^2}=\frac{\sin\Omega^2}{(\cos\beta_1\cos\gamma_2-\cos\gamma_1\cos\beta_2)^2}.$$

Folglich ist

$$X=\pm\frac{(\cos\beta_1\cos\gamma_2-\cos\gamma_1\cos\beta_2)\sin\Theta}{\sin\Omega},$$

und daher nach dem Vorbergehenden überhaupt mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$X=\pm\frac{(\cos\beta_1\cos\gamma_2-\cos\gamma_1\cos\beta_2)\sin\Theta}{\sin\Omega},$$

$$Y=\pm\frac{(\cos\gamma_1\cos\alpha_2-\cos\alpha_1\cos\gamma_2)\sin\Theta}{\sin\Omega},$$

$$Z=\pm\frac{(\cos\alpha_1\cos\beta_2-\cos\beta_1\cos\alpha_2)\sin\Theta}{\sin\Omega}.$$

Setzt man der Kürze wegen:

$$f_1=\frac{\cos\alpha_1}{\sin\Omega},\quad g_1=\frac{\cos\beta_1}{\sin\Omega},\quad h_1=\frac{\cos\gamma_1}{\sin\Omega};$$

$$f_2=\frac{\cos\alpha_2}{\sin\Omega},\quad g_2=\frac{\cos\beta_2}{\sin\Omega},\quad h_2=\frac{\cos\gamma_2}{\sin\Omega};$$

$$\lambda_1=\frac{\cos\mu_1}{\sin\Omega},\quad \lambda_2=\frac{\cos\mu_2}{\sin\Omega};$$

so ist nach dem Obigen:

$$A=\lambda_1(f_1-f_2\cos\Omega)+\lambda_2(f_2-f_1\cos\Omega),$$

$$B=\lambda_1(g_1-g_2\cos\Omega)+\lambda_2(g_2-g_1\cos\Omega),$$

$$C=\lambda_1(h_1-h_2\cos\Omega)+\lambda_2(h_2-h_1\cos\Omega);$$

$$\cos\Theta=\sqrt{\lambda_1{}^2+\lambda_2{}^2-2\lambda_1\lambda_2\cos\Omega};$$

$$X=\pm(g_1h_2-h_1g_2)\sin\Omega\sin\Theta,$$

$$Y=\pm(h_1f_2-f_1h_2)\sin\Omega\sin\Theta,$$

$$Z=\pm(f_1g_2-g_1f_2)\sin\Omega\sin\Theta;$$

und hierauf:

$$\cos\varphi=A+X,\quad \cos\psi=B+Y,\quad \cos\chi=C+Z.$$

Sollte einer der Winkel φ, ψ, χ der Null sehr nahe kommen, so würde man sich bei der Berechnung desselben so zu verhalten haben, wie im Archiv, Thl. I. Nr. XI. S. 73. gezeigt worden ist.

Bezeichnen x, y, z die gesuchten Coordinaten des Punktes M, so hat man zu deren Berechnung nun die folgenden Formeln:

$$x=a_0+\overline{A_0M}.\cos\varphi,$$

$$y=b_0+\overline{A_0M}.\cos\psi,$$

$$z=c_0+\overline{A_0M}.\cos\chi;$$

mittelst welcher diese Coordinaten leicht gefunden werden können.

Unsere Aufgabe lässt im Allgemeinen zwei Auflösungen zu; welche der beiden Auflösungen genommen werden muss, hat man in jedem einzelnen Falle besonders zu entscheiden, worüber allgemeine Regeln natürlich nicht gegeben werden können. Indess mag hierüber Folgendes bemerkt werden, wobei wir grösserer Deutlichkeit wegen annehmen wollen, dass die Ebene der xy die Horizontalebene sei. Die Gleichung der durch die drei Punkte A_0, A_1, A_2 gelegten Ebene sei, wenn wir die veränderlichen Coordinaten durch $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ bezeichnen,

$$K(\mathfrak{x}-a_0)+L(\mathfrak{y}-b_0)+N(\mathfrak{z}-c_0)=0,$$

so ist

$$K(a_1-a_0)+L(b_1-b_0)+N(c_1-c_0)=0,$$
$$K(a_2-a_0)+L(b_2-b_0)+N(c_2-c_0)=0;$$

also, weil nach dem Obigen

$$a_1-a_0=\overline{A_0A_1}.\cos\alpha_1,\quad b_1-b_0=\overline{A_0A_1}.\cos\beta_1,\quad c_1-c_0=\overline{A_0A_1}.\cos\gamma_1;$$
$$a_2-a_0=\overline{A_0A_2}.\cos\alpha_2,\quad b_2-b_0=\overline{A_0A_2}.\cos\beta_2,\quad c_2-c_0=\overline{A_0A_2}.\cos\gamma_2$$

ist:

$$K\cos\alpha_1+L\cos\beta_1+N\cos\gamma_1=0,$$
$$K\cos\alpha_2+L\cos\beta_2+N\cos\gamma_2=0.$$

Weil nun aber nach dem Obigen

$$X\cos\alpha_1+Y\cos\beta_1+Z\cos\gamma_1=0,$$
$$X\cos\alpha_2+Y\cos\beta_2+Z\cos\gamma_2=0$$

ist, so ist offenbar

$$K:L:N=X:Y:Z,$$

und die Gleichung der durch die drei Punkte A_0, A_1, A_2 bestimmten Ebene ist folglich

$$X(\mathfrak{x}-a_0)+Y(\mathfrak{y}-b_0)+Z(\mathfrak{z}-c_0)=0.$$

Bezeichnen wir nun die Coordinaten des Punktes, in welchem diese Ebene das von dem Punkte M auf die Horizontalebene gefällte Perpendikel schneidet, durch x, y, z', da die beiden ersten Coordinaten dieses Durchschnittspunktes offenbar mit den beiden ersten Coordinaten des Punktes M einerlei sind; so ist wegen vorstehender Gleichung:

$$X(x-a_0)+Y(y-b_0)+Z(z'-c_0)=0,$$

also

$$z'-c_0=-\frac{X(x-a_0)+Y(y-b_0)}{Z},$$

und daher nach dem Obigen:

$$z'-c_0=-\frac{X\cos\varphi+Y\cos\psi}{Z}.\overline{A_0M},$$

also, weil

$$z - c_0 = \overline{A_0 M}.\cos\chi$$

ist, wenn man subtrahirt:

$$z' - z = -\frac{X\cos\varphi + Y\cos\psi + Z\cos\chi}{Z}.\overline{A_0M},$$

oder nach dem Obigen:

$$z - z' = \frac{X(A+X) + Y(B+Y) + Z(C+Z)}{Z}.\overline{A_0M},$$

also, weil bekanntlich

$$AX + BY + CZ = 0$$

ist,

$$z - z' = \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{Z}.\overline{A_0M},$$

oder nach dem Obigen:

$$z - z' = \frac{\overline{A_0M}.\sin\Theta^2}{Z}.$$

Hieraus sieht man, dass $z - z'$ jederzeit mit Z gleiches Vorzeichen hat. Nehmen wir nun den positiven Theil der dritten Coordinatenaxe oberhalb von der Horizontalebene, so lässt sich Folgendes sagen. Wenn für Z, welches nach dem Obigen immer zwei absolut gleiche, dem Zeichen nach aber entgegengesetzte Werthe hat, sein positiver Werth gesetzt wird, so ist auch $z - z'$ positiv oder $z > z'$, und der Punkt M liegt folglich oberhalb von der Ebene $\overline{A_0A_1A_2}$; wenn dagegen für Z sein negativer Werth gesetzt wird, so ist auch $z - z'$ negativ oder $z < z'$, und der Punkt M liegt folglich unterhalb von der Ebene $\overline{A_0A_1A_2}$. Wenn also, was in jedem einzelnen Falle besonders zu beurtheilen ist und nie Schwierigkeiten unterworfen sein wird, der beobachtete Punkt, dessen Lage bestimmt werden soll, oberhalb von der Ebene $\overline{A_0A_1A_2}$ liegt, so muss man für Z seinen positiven Werth setzen; wenn dagegen der beobachtete Punkt unterhalb von der Ebene $\overline{A_0A_1A_2}$ liegt, so muss man für Z seinen negativen Werth setzen; welche Werthe man aber in jedem dieser beiden Fälle für X und Y setzen muss, kann nun nie zweifelhaft sein, weil in den oben für X, Y, Z entwickelten Ausdrücken die oberen und unteren Zeichen sich bekanntlich auf einander beziehen.

Streng genommen muss man die sämmtlichen mit dem Sextanten gemessenen Winkel wegen der terrestrischen Refraction verbessern, bevor man dieselben in die Rechnung einführt. Dazu bedarf man aber der Kenntniss der horizontalen Entfernungen der anvisirten Punkte von den betreffenden Stationspunkten und der Neigungswinkel der Schenkel der mit dem Sextanten gemessenen Winkel gegen den Horizont. Diese Data verschafft man sich mit zu diesem Zwecke hinreichender Genauigkeit dadurch, dass man die ganze obige Rechnung zuerst ohne Rücksicht auf die Strahlenbrechung führt, hierauf in bekannter Weise die Neigungswinkel der Schenkel der gemessenen Winkel gegen den Horizont wegen der Refraction corrigirt und dann aus den beobachteten, d. h. mit dem Sextanten gemessenen Winkeln die entsprechenden wahren Winkel etwa ganz in derselben Weise ableitet, wie der Schiffer aus den beobachteten oder sogenannten scheinbaren Monddistanzen die entsprechenden wahren Monddistanzen berechnet, was hier um so weniger einer weiteren Erläuterung bedürfen wird, weil es mir wohl erlaubt ist, wegen dieses Gegenstandes auf meinen denselben betreffenden Aufsatz im Archiv. Thl. XXIV. Nr. XXXII. S. 470. zu verweisen. Dann muss man aber natürlich die ganze obige Rechnung mit den verbesserten gemessenen Winkeln noch einmal führen. Zur ersten genäherten Kenntniss der horizontalen Entfernungen der anvisirten Punkte von den betreffenden Stationspunkten und der Neigungswinkel der Schenkel der mit dem Sextanten gemessenen Winkel gegen den Horizont gelangt man leicht, weil man aus der ersten Rechnung genäherte Werthe für die Coordinaten des Punktes M erhält und auch die Coordinaten der Punkte A_0, A_1, A_2 als bekannt vorausgesetzt werden, was hier nicht weiter erläutert zu werden braucht.

Wenn ich auch nicht glaube, dass sich eine vollkommenere und genügendere Auflösung unserer Aufgabe wie die vorhergehende geben lässt, so will ich doch noch zeigen, wie dieselbe auf indirecte Weise aufgelöst werden kann, welches Verfahren namentlich dann vielleicht mit Vortheil in Anwendung gebracht werden dürfte, wenn die Schenkel der gemessenen Winkel sehr wenig von der horizontalen Lage abweichen. Wir bezeichnen wieder die Coordinaten der gegebenen Punkte A_0, A_1, A_2 durch a_0, b_0, c_0; a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2 und die Coordinaten des zu bestimmenden Punktes M durch x, y, z. Die Linien $\overline{A_0M}$, $\overline{A_1M}$, $\overline{A_2M}$ wollen wir durch u_0, u_1, u_2 und ihre horizontalen Projectionen durch v_0, v_1, v_2, ihre Neigungswinkel gegen die durch A_0, A_1, A_2 gelegten Horizontalebenen, welche als positiv oder

$$\sin\Theta_0=\frac{z-c_0}{u_0},\quad \sin\Theta_1=\frac{z-c_1}{u_1},\quad \sin\Theta_2=\frac{z-c_2}{u_2}$$

und

$$v_0=u_0\cos\Theta_0,\quad v_1=u_1\cos\Theta_1,\quad v_2=u_2\cos\Theta_2.$$

Bezeichnen wir die horizontalen Projectionen der Punkte A_0, A_1, A_2 und M respective durch A_0', A_1', A_2' und M', so kann man aus den gegebenen Coordinaten der Punkte A_0, A_1, A_2 leicht die horizontalen Projectionen $\overline{A_0'A_1'}$, $\overline{A_1'A_2'}$, $\overline{A_2'A_0'}$ der Linien $\overline{A_0A_1}$, $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_0}$ und auch die horizontale Projection $\overline{A_1'A_0'A_2'}$ des Winkels $\overline{A_1A_0A_2}$ in dem Dreiecke $\overline{A_0A_1A_2}$, natürlich auch die Linien $\overline{A_0A_1}$, $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_0}$ selbst berechnen. Da man nun in jedem der Dreiecke $\overline{A_0A_1M}$ und $\overline{A_0A_2M}$ zwei Winkel gemessen hat, und die Seiten $\overline{A_0A_1}$, $\overline{A_2A_0}$ dieser Dreiecke kennt, so kann man in denselben leicht die Seiten $\overline{A_0M}$, $\overline{A_1M}$, $\overline{A_2M}$, d. h. nach dem Obigen die Grössen u_0, u_1, u_2 berechnen, welche daher als bekannt angenommen werden dürfen. Zur Berechnung der beiden Winkel $\overline{A_1'A_0'M'}$ und $\overline{A_2'A_0'M'}$ hat man die beiden folgenden Formeln:

$$\cos\tfrac{1}{2}\overline{A_1'A_0'M'}=\sqrt{\frac{(\overline{A_0'A_1'}+v_0+v_1)(\overline{A_0'A_1'}+v_0-v_1)}{4v_0\,.\,\overline{A_0'A_1'}}},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\overline{A_2'A_0'M'}=\sqrt{\frac{(\overline{A_0'A_2'}+v_0+v_2)(\overline{A_0'A_2'}+v_0-v_2)}{4v_0\,.\,\overline{A_0'A_2'}}};$$

in denen aber v_0, v_1, v_2 noch unbekannt sind. Den Winkel $\overline{A_1'A_0'A_2'}$ kennt man aus dem Vorhergehenden, und ist dann, welchen Fall wir hier zu Grunde legen wollen *), dieser Winkel die Summe der beiden Winkel $\overline{A_1'A_0'M'}$ und $\overline{A_2'A_0'M'}$, so hat man die Bedingungsgleichung:

$$\angle\,\overline{A_1'A_0'M'}+\angle\,\overline{A_2'A_0'M'}=\angle\,\overline{A_1'A_0'A_2'},$$

und wird sich nun der vorhergehenden Formeln auf folgende Weise zur indirecten Auflösung unserer Aufgabe zu bedienen haben. Aus willkührlich angenommenen Werthen von z berechnet man mittelst der Formeln

*) Wie man sich in jedem anderen Falle zu verhalten haben würde, bedarf keiner weiteren Erläuterung.

$$\sin\Theta_0=\frac{z-c_0}{u_0},\quad \sin\Theta_1=\frac{z-c_1}{u_1},\quad \sin\Theta_2=\frac{z-c_2}{u_2}$$

die Winkel Θ_0, Θ_1, Θ_2, und hierauf die Grössen v_0, v_1, v_2 mittelst der Formeln

$$v_0=u_0\cos\Theta_0,\quad v_1=u_1\cos\Theta_1,\quad v_2=u_2\cos\Theta_2,$$

worauf man die Winkel $\overline{A_1'A_0'M'}$ und $\overline{A_2'A_0'M'}$ mittelst der oben angegebenen Formeln findet, und nun untersucht, in wie weit dieselben der Bedingungsgleichung

$$\angle\overline{A_1'A_0'M'}+\angle\overline{A_2'A_0'M'}=\angle\overline{A_1'A_0'A_2'}$$

genügen, überhaupt aber die angenommenen Werthe von z so lange verbessert, bis diese Gleichung vollständig erfüllt wird, wodurch man dann zugleich auch Θ_0, Θ_1, Θ_2 und v_0, v_1, v_2, so wie auch die Winkel $\overline{A_1'A_0'M'}$ und $\overline{A_2'A_0'M'}$ gefunden, überhaupt also die relative Lage des Punktes M gegen die Punkte A_0, A_1, A_2 bestimmt hat, und nun auch dessen zwei andere Coordinaten x, y immer leicht wird finden können, wie Jeder sogleich übersehen wird. Vorstehende Andeutungen über diese indirecte Auflösung unserer Aufgabe werden hier vollständig genügen.

In Bezug auf den Fall, wenn man bei einer mit dem Sextanten ausgeführten Aufnahme die Neigungswinkel der Schenkel der mit dem Sextanten gemessenen Winkel gegen den Horizont wirklich misst, will ich dem Obigen noch die einfache Bemerkung hinzufügen, dass es in diesem Falle keineswegs nöthig ist, die mit dem Sextanten gemessenen Winkel wirklich auf den Horizont zu reduciren, bevor man sie in die Rechnung einführt, wie auf folgende Art leicht gezeigt werden kann. Wir wollen uns ein beliebig im Raume liegendes Dreieck $\overline{A_0A_1A_2}$ denken, dessen Winkel A_0 und A_1 mit dem Sextanten, und die Neigungswinkel i, i_0, i_1 der Seiten $\overline{A_0A_1}$, $\overline{A_0A_2}$, $\overline{A_1A_2}$ gegen den Horizont durch irgend ein zweckmässiges Hülfsmittel gemessen worden sind. Bezeichnen wir dann die horizontalen Projectionen der Linien $\overline{A_0A_1}$, $\overline{A_0A_2}$, $\overline{A_1A_2}$ respective durch $\overline{A_0'A_1'}$, $\overline{A_0'A_2'}$, $\overline{A_1'A_2'}$, so kommt es bei einer Triangulirung bekanntlich immer auf die Bestimmung von $\overline{A_0'A_2'}$ und $\overline{A_1'A_2'}$ aus der als gegeben anzusehenden horizontalen Basis oder Standlinie $\overline{A_0'A_1'}$ und den gemessenen Winkeln an. Nun hat man aber in dem Dreiecke $\overline{A_0A_1A_2}$ die Proportionen:

$$\overline{A_0A_1}:\overline{A_0A_2}=\sin(A_0+A_1):\sin A_1,$$

$$\overline{A_0A_1}:\overline{A_1A_2}=\sin(A_0+A_1):\sin A_0;$$

und ausserdem hat man die Formeln:

$$\overline{A_0'A_1'}=\overline{A_0A_1}.\cos i,\quad \overline{A_0'A_2'}=\overline{A_0A_2}.\cos i_0,\quad \overline{A_1'A_2'}=\overline{A_1A_2}.\cos i_1;$$

also ist:

$$\frac{\overline{A_0'A_1'}}{\cos i}:\frac{\overline{A_0'A_2'}}{\cos i_0}=\sin(A_0+A_1):\sin A_1,$$

$$\frac{\overline{A_0'A_1'}}{\cos i}:\frac{\overline{A_1'A_2'}}{\cos i_1}=\sin(A_0+A_1):\sin A_0;$$

woraus man zur Berechnung von $\overline{A_0'A_2'}$ und $\overline{A_1'A_2'}$ sogleich die Formeln

$$\overline{A_0'A_2'}=\frac{\sin A_1}{\sin(A_0+A_1)}.\frac{\cos i_0}{\cos i}.\overline{A_0'A_1'},$$

$$\overline{A_1'A_2'}=\frac{\sin A_0}{\sin(A_0+A_1)}.\frac{\cos i_1}{\cos i}.\overline{A_0'A_1'}$$

erhält, welche die Kenntniss der Reductionen der Winkel A_0 und A_1 gar nicht erfordern, sondern die unmittelbare Einführung dieser gemessenen Winkel selbst in die Rechnung gestatten.

Man vergleiche über das erweiterte Pothenot'sche Problem, das bei Messungen mit dem Sextanten auch Anwendung finden kann, den Aufsatz Archiv. Thl. I. Nr. XXXV. S. 238.

XXIII.

Ueber die Entwickelung der Grundformeln der Drehung eines Systems materieller Punkte um einen festen Punkt, als weitere Ausführung und Fortsetzung der Abhandlung in Thl. XXIV. Nr. VI. über die Hauptaxen eines Systems materieller Punkte.

Von
dem Herausgeber.

Die Entwickelung der Grundformeln der Drehung eines Systems materieller Punkte um einen festen Punkt, so wie dieselbe in den gangbaren Lehrbüchern der Mechanik meistens gegeben wird, lässt nach meiner Meinung in Rücksicht auf analytische Eleganz Einiges zu wünschen übrig, weshalb ich diese merkwürdigen und wichtigen Formeln im Folgenden nach einer von der gewöhnlichen zwar nicht wesentlich, aber doch einigermassen verschiedenen Methode entwickeln und mit einigen mir nöthig scheinenden Bemerkungen begleiten werde.

Durch den Punkt, um welchen die Drehung des Systems der Massen m, m_1, m_2, m_3,.... vor sich geht, als Anfang, legen wir ein festes rechtwinkliges Coordinatensystem der xyz im Raume, und ausserdem ein in dem Systeme der Massen festes rechtwinkliges Coordinatensystem der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$, welches sich mit dem Systeme der Massen zugleich dreht, ohne in demselben, nämlich gegen dessen einzelne Punkte, seine Lage zu ändern. Setzen wir dann der Kürze wegen:

$$\cos(x\mathfrak{x})=a_1,\quad \cos(x\mathfrak{y})=b_1,\quad \cos(x\mathfrak{z})=c_1;$$
$$\cos(y\mathfrak{x})=a_2,\quad \cos(y\mathfrak{y})=b_2,\quad \cos(y\mathfrak{z})=c_2;$$
$$\cos(z\mathfrak{x})=a_3,\quad \cos(z\mathfrak{y})=b_3,\quad \cos(z\mathfrak{z})=c_3;$$

so ist nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten:

$$1) \quad \ldots \ldots \quad \begin{cases} x = a_1\mathfrak{x} + b_1\mathfrak{y} + c_1\mathfrak{z}, \\ y = a_2\mathfrak{x} + b_2\mathfrak{y} + c_2\mathfrak{z}, \\ z = a_3\mathfrak{x} + b_3\mathfrak{y} + c_3\mathfrak{z}; \end{cases}$$

und zwischen den neun Grössen

$$a_1,\ b_1,\ c_1;\quad a_2,\ b_2,\ c_2;\quad a_3,\ b_3,\ c_3$$

finden bekanntlich die folgenden Gleichungen Statt:

$$2) \quad \ldots \ldots \quad \begin{cases} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1, \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1, \\ c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1; \end{cases}$$

$$3) \quad \ldots \ldots \quad \begin{cases} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1, \\ a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1, \\ a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 = 1; \end{cases}$$

$$4) \quad \ldots \ldots \quad \begin{cases} a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0, \\ b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 = 0, \\ c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3 = 0; \end{cases}$$

$$5) \quad \ldots \ldots \quad \begin{cases} a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0, \\ a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 = 0, \\ a_3a_1 + b_3b_1 + c_3c_1 = 0. \end{cases}$$

Wenn man die drei Gleichungen 1) nach der Reihe zuerst mit

$$b_2c_3 - c_2b_3,\quad b_3c_1 - c_3b_1,\quad b_1c_2 - c_1b_2;$$

dann mit

$$c_2a_3 - a_2c_3,\quad c_3a_1 - a_3c_1,\quad c_1a_2 - a_1c_2;$$

endlich mit

$$a_2b_3 - b_2a_3,\quad a_3b_1 - b_3a_1,\quad a_1b_2 - b_1a_2$$

multiplicirt, und hierauf in jedem Falle zu einander addirt, so erhält man, wenn der Kürze wegen

$$6)\quad \mu = a_1(b_2c_3-c_2b_3)+a_2(b_3c_1-c_3b_1)+a_3(b_1c_2-c_1b_2)$$
$$= b_1(c_2a_3-a_2c_3)+b_2(c_3a_1-a_3c_1)+b_3(c_1a_2-a_1c_2)$$
$$= c_1(a_2b_3-b_2a_3)+c_2(a_3b_1-b_3a_1)+c_3(a_1b_2-b_1a_2)$$

gesetzt wird:

$$7)\quad \begin{cases} \mathfrak{x} = \frac{b_2c_3-c_2b_3}{\mu}x+\frac{b_3c_1-c_3b_1}{\mu}y+\frac{b_1c_2-c_1b_2}{\mu}z, \\ \mathfrak{y} = \frac{c_2a_3-a_2c_3}{\mu}x+\frac{c_3a_1-a_3c_1}{\mu}y+\frac{c_1a_2-a_1c_2}{\mu}z, \\ \mathfrak{z} = \frac{a_2b_3-b_2a_3}{\mu}x+\frac{a_3b_1-b_3a_1}{\mu}y+\frac{a_1b_2-b_1a_2}{\mu}z. \end{cases}$$

Nun ist aber nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten bekanntlich in völliger Allgemeinheit:

$$8)\quad \begin{cases} \mathfrak{x} = a_1x+a_2y+a_3z, \\ \mathfrak{y} = b_1x+b_2y+b_3z, \\ \mathfrak{z} = c_1x+c_2y+c_3z; \end{cases}$$

also, wenn man diese Gleichungen mit den vorhergehenden vergleicht:

$$9)\quad \begin{cases} a_1=\frac{b_2c_3-c_2b_3}{\mu},\ a_2=\frac{b_3c_1-c_3b_1}{\mu},\ a_3=\frac{b_1c_2-c_1b_2}{\mu}; \\ b_1=\frac{c_2a_3-a_2c_3}{\mu},\ b_2=\frac{c_3a_1-a_3c_1}{\mu},\ b_3=\frac{c_1a_2-a_1c_2}{\mu}; \\ c_1=\frac{a_2b_3-b_2a_3}{\mu},\ c_2=\frac{a_3b_1-b_3a_1}{\mu},\ c_3=\frac{a_1b_2-b_1a_2}{\mu}. \end{cases}$$

Aus den drei ersten dieser Formeln ergiebt sich unmittelbar:

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2=\frac{(b_2c_3-c_2b_3)^2+(b_3c_1-c_3b_1)^2+(b_1c_2-c_1b_2)^2}{\mu^2},$$

welchen Ausdruck man mittelst leichter Rechnung sogleich auf die folgende Form bringt:

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2=\frac{(b_1^2+b_2^2+b_3^2)(c_1^2+c_2^2+c_3^2)-(b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3)^2}{\mu^2},$$

woraus sich mittelst der Gleichungen 2) und 4) auf der Stelle die Gleichung

$$10)\quad \ldots\ldots\ldots\ldots \mu^2=1$$

ergiebt.

Weil mit der Zeit t sich wohl x, y, z und a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3; aber nicht $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ ändern; so ist nach 1):

$$11) \quad \ldots \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= \mathfrak{x}\frac{\partial a_1}{\partial t} + \mathfrak{y}\frac{\partial b_1}{\partial t} + \mathfrak{z}\frac{\partial c_1}{\partial t}, \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= \mathfrak{x}\frac{\partial a_2}{\partial t} + \mathfrak{y}\frac{\partial b_2}{\partial t} + \mathfrak{z}\frac{\partial c_2}{\partial t}, \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= \mathfrak{x}\frac{\partial a_3}{\partial t} + \mathfrak{y}\frac{\partial b_3}{\partial t} + \mathfrak{z}\frac{\partial c_3}{\partial t}. \end{aligned} \right.$$

Von den drei Grössen

$$x\frac{\partial y}{\partial t} - y\frac{\partial x}{\partial t}, \quad z\frac{\partial x}{\partial t} - x\frac{\partial z}{\partial t}, \quad y\frac{\partial z}{\partial t} - z\frac{\partial y}{\partial t},$$

die bei der vorliegenden Untersuchung hauptsächlich in Betracht kommen, wird es genügen, etwa bloss die erste einer besonderen Betrachtung zu unterwerfen, weil dieselbe dann für die beiden anderen der drei obigen Grössen leicht ganz in derselben Weise angestellt werden kann.

Nach 1) und 11) ist

$$x\frac{\partial y}{\partial t} - y\frac{\partial x}{\partial t}$$

$$=(a_1\mathfrak{x}+b_1\mathfrak{y}+c_1\mathfrak{z})(\mathfrak{x}\frac{\partial a_2}{\partial t}+\mathfrak{y}\frac{\partial b_2}{\partial t}+\mathfrak{z}\frac{\partial c_2}{\partial t})-(a_2\mathfrak{x}+b_2\mathfrak{y}+c_2\mathfrak{z})(\mathfrak{x}\frac{\partial a_1}{\partial t}+\mathfrak{y}\frac{\partial b_1}{\partial t}+\mathfrak{z}\frac{\partial c_1}{\partial t}),$$

und folglich, wie man hieraus mittelst leichter Rechnung sogleich findet:

$$x\frac{\partial y}{\partial t} - y\frac{\partial x}{\partial t}$$

$$\begin{aligned} = \; & (a_1\frac{\partial a_2}{\partial t} - a_2\frac{\partial a_1}{\partial t})\mathfrak{x}^2 + (b_1\frac{\partial b_2}{\partial t} - b_2\frac{\partial b_1}{\partial t})\mathfrak{y}^2 + (c_1\frac{\partial c_2}{\partial t} - c_2\frac{\partial c_1}{\partial t})\mathfrak{z}^2 \\ & + \{(a_1\frac{\partial b_2}{\partial t} - b_2\frac{\partial a_1}{\partial t}) + (b_1\frac{\partial a_2}{\partial t} - a_2\frac{\partial b_1}{\partial t})\}\mathfrak{x}\mathfrak{y} \\ & + \{(b_1\frac{\partial c_2}{\partial t} - c_2\frac{\partial b_1}{\partial t}) + (c_1\frac{\partial b_2}{\partial t} - b_2\frac{\partial c_1}{\partial t})\}\mathfrak{y}\mathfrak{z} \\ & + \{(c_1\frac{\partial a_2}{\partial t} - a_2\frac{\partial c_1}{\partial t}) + (a_1\frac{\partial c_2}{\partial t} - c_2\frac{\partial a_1}{\partial t})\}\mathfrak{z}\mathfrak{x}. \end{aligned}$$

Nach 9) ist aber zuvörderst:

$$(a_1\frac{\partial a_2}{\partial t}-a_2\frac{\partial a_1}{\partial t})\mathfrak{x}^2+(b_1\frac{\partial b_2}{\partial t}-b_2\frac{\partial a_1}{\partial t})\mathfrak{y}^2+(c_1\frac{\partial c_2}{\partial t}-c_2\frac{\partial c_1}{\partial t})\mathfrak{z}^2$$

$$=\left(\frac{b_2c_3-c_2b_3}{\mu}\cdot\frac{\partial a_2}{\partial t}-\frac{b_3c_1-c_3b_1}{\mu}\cdot\frac{\partial a_1}{\partial t}\right)\mathfrak{x}^2$$

$$+\left(\frac{c_2a_3-a_2c_3}{\mu}\cdot\frac{\partial b_2}{\partial t}-\frac{c_3a_1-a_3c_1}{\mu}\cdot\frac{\partial b_1}{\partial t}\right)\mathfrak{y}^2$$

$$+\left(\frac{a_2b_3-b_2a_3}{\mu}\cdot\frac{\partial c_2}{\partial t}-\frac{a_3b_1-b_3a_1}{\mu}\cdot\frac{\partial c_1}{\partial t}\right)\mathfrak{z}^2$$

$$=\left\{\frac{c_3}{\mu}(b_1\frac{\partial a_1}{\partial t}+b_2\frac{\partial a_2}{\partial t}+b_3\frac{\partial a_3}{\partial t})-\frac{b_3}{\mu}(c_1\frac{\partial a_1}{\partial t}+c_2\frac{\partial a_2}{\partial t}+c_3\frac{\partial a_3}{\partial t})\right\}\mathfrak{x}^2$$

$$+\left\{\frac{a_3}{\mu}(c_1\frac{\partial b_1}{\partial t}+c_2\frac{\partial b_2}{\partial t}+c_3\frac{\partial b_3}{\partial t})-\frac{c_3}{\mu}(a_1\frac{\partial b_1}{\partial t}+a_2\frac{\partial b_2}{\partial t}+a_3\frac{\partial b_3}{\partial t})\right\}\mathfrak{y}^2$$

$$+\left\{\frac{b_3}{\mu}(a_1\frac{\partial c_1}{\partial t}+a_2\frac{\partial c_2}{\partial t}+a_3\frac{\partial c_3}{\partial t})-\frac{a_3}{\mu}(b_1\frac{\partial c_1}{\partial t}+b_2\frac{\partial c_2}{\partial t}+b_3\frac{\partial c_3}{\partial t})\right\}\mathfrak{z}^2;$$

folglich, weil aus 4) sogleich

$$c_1\frac{\partial a_1}{\partial t}+c_2\frac{\partial a_2}{\partial t}+c_3\frac{\partial a_3}{\partial t}=-(a_1\frac{\partial c_1}{\partial t}+a_2\frac{\partial c_2}{\partial t}+a_3\frac{\partial c_3}{\partial t}),$$

$$a_1\frac{\partial b_1}{\partial t}+a_2\frac{\partial b_2}{\partial t}+a_3\frac{\partial b_3}{\partial t}=-(b_1\frac{\partial a_1}{\partial t}+b_2\frac{\partial a_2}{\partial t}+b_3\frac{\partial a_3}{\partial t}),$$

$$b_1\frac{\partial c_1}{\partial t}+b_2\frac{\partial c_2}{\partial t}+b_3\frac{\partial c_3}{\partial t}=-(c_1\frac{\partial b_1}{\partial t}+c_2\frac{\partial b_2}{\partial t}+c_3\frac{\partial b_3}{\partial t})$$

sich ergiebt:

$$(a_1\frac{\partial a_2}{\partial t}-a_2\frac{\partial a_1}{\partial t})\mathfrak{x}^2+(b_1\frac{\partial b_2}{\partial t}-b_2\frac{\partial b_1}{\partial t})\mathfrak{y}^2+(c_1\frac{\partial c_2}{\partial t}-c_2\frac{\partial c_1}{\partial t})\mathfrak{z}^2$$

$$=\frac{a_3}{\mu}(c_1\frac{\partial b_1}{\partial t}+c_2\frac{\partial b_2}{\partial t}+c_3\frac{\partial b_3}{\partial t})(\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2)$$

$$+\frac{b_3}{\mu}(a_1\frac{\partial c_1}{\partial t}+a_2\frac{\partial c_2}{\partial t}+a_3\frac{\partial c_3}{\partial t})(\mathfrak{z}^2+\mathfrak{x}^2)$$

$$+\frac{c_3}{\mu}(b_1\frac{\partial a_1}{\partial t}+b_2\frac{\partial a_2}{\partial t}+b_3\frac{\partial a_3}{\partial t})(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2).$$

Ferner ist

$$(a_1\frac{\partial b_2}{\partial t}-b_2\frac{\partial a_1}{\partial t})+(b_1\frac{\partial a_2}{\partial t}-a_2\frac{\partial b_1}{\partial t})$$

$$=\frac{b_2c_3-c_2b_3}{\mu}\cdot\frac{\partial b_2}{\partial t}-\frac{c_3a_1-a_3c_1}{\mu}\cdot\frac{\partial a_1}{\partial t}$$

$$+\frac{c_2a_3-a_2c_3}{\mu}\cdot\frac{\partial a_2}{\partial t}-\frac{b_3c_1-c_3b_1}{\mu}\cdot\frac{\partial b_1}{\partial t}$$

$$=\frac{c_3}{\mu}(b_1\frac{\partial b_1}{\partial t}+b_2\frac{\partial b_2}{\partial t}+b_3\frac{\partial b_3}{\partial t})-\frac{c_3}{\mu}(a_1\frac{\partial a_1}{\partial t}+a_2\frac{\partial a_2}{\partial t}+a_3\frac{\partial a_3}{\partial t})$$

$$+\frac{a_3}{\mu}(c_1\frac{\partial a_1}{\partial t}+c_2\frac{\partial a_2}{\partial t}+c_3\frac{\partial a_3}{\partial t})-\frac{b_3}{\mu}(c_1\frac{\partial b_1}{\partial t}+c_2\frac{\partial b_2}{\partial t}+c_3\frac{\partial b_3}{\partial t}),$$

$$(b_1\frac{\partial c_2}{\partial t}-c_2\frac{\partial b_1}{\partial t})+(c_1\frac{\partial b_2}{\partial t}-b_2\frac{\partial c_1}{\partial t})$$

$$=\frac{c_2a_3-a_2c_3}{\mu}\cdot\frac{\partial c_2}{\partial t}-\frac{a_3b_1-b_3a_1}{\mu}\cdot\frac{\partial b_1}{\partial t}$$

$$+\frac{a_2b_3-b_2a_3}{\mu}\cdot\frac{\partial b_2}{\partial t}-\frac{c_3a_1-a_3c_1}{\mu}\cdot\frac{\partial c_1}{\partial t}$$

$$=\frac{a_3}{\mu}(c_1\frac{\partial c_1}{\partial t}+c_2\frac{\partial c_2}{\partial t}+c_3\frac{\partial c_3}{\partial t})-\frac{a_3}{\mu}(b_1\frac{\partial b_1}{\partial t}+b_2\frac{\partial b_2}{\partial t}+b_3\frac{\partial b_3}{\partial t})$$

$$+\frac{b_3}{\mu}(a_1\frac{\partial b_1}{\partial t}+a_2\frac{\partial b_2}{\partial t}+a_3\frac{\partial b_3}{\partial t})-\frac{c_3}{\mu}(a_1\frac{\partial c_1}{\partial t}+a_2\frac{\partial c_2}{\partial t}+a_3\frac{\partial c_3}{\partial t}),$$

$$(c_1\frac{\partial a_2}{\partial t}-a_2\frac{\partial c_1}{\partial t})+(a_1\frac{\partial c_2}{\partial t}-c_2\frac{\partial a_1}{\partial t})$$

$$=\frac{a_2b_3-b_2a_3}{\mu}\cdot\frac{\partial a_2}{\partial t}-\frac{b_3c_1-c_3b_1}{\mu}\cdot\frac{\partial c_1}{\partial t}$$

$$+\frac{b_2c_3-c_2b_3}{\mu}\cdot\frac{\partial c_2}{\partial t}-\frac{a_3b_1-b_3a_1}{\mu}\cdot\frac{\partial a_1}{\partial t}$$

$$=\frac{b_3}{\mu}(a_1\frac{\partial a_1}{\partial t}+a_2\frac{\partial a_2}{\partial t}+a_3\frac{\partial a_3}{\partial t})-\frac{b_3}{\mu}(c_1\frac{\partial c_1}{\partial t}+c_2\frac{\partial c_2}{\partial t}+c_3\frac{\partial c_3}{\partial t})$$

$$+\frac{c_3}{\mu}(b_1\frac{\partial c_1}{\partial t}+b_2\frac{\partial c_2}{\partial t}+b_3\frac{\partial c_3}{\partial t})-\frac{a_3}{\mu}(b_1\frac{\partial a_1}{\partial t}+b_2\frac{\partial a_2}{\partial t}+b_3\frac{\partial a_3}{\partial t}).$$

Weil nun aber aus den Gleichungen 2) auf der Stelle

$$a_1\frac{\partial a_1}{\partial t}+a_2\frac{\partial a_2}{\partial t}+a_3\frac{\partial a_3}{\partial t}=0,$$

$$b_1\frac{\partial b_1}{\partial t}+b_2\frac{\partial b_2}{\partial t}+b_3\frac{\partial b_3}{\partial t}=0,$$

$$c_1\frac{\partial c_1}{\partial t}+c_2\frac{\partial c_2}{\partial t}+c_3\frac{\partial c_3}{\partial t}=0$$

folgt, so ist:

$$(a_1\frac{\partial b_2}{\partial t}-b_2\frac{\partial a_1}{\partial t})+(b_1\frac{\partial a_2}{\partial t}-a_2\frac{\partial b_1}{\partial t})$$

$$=\frac{a_3}{\mu}(c_1\frac{\partial a_1}{\partial t}+c_2\frac{\partial a_2}{\partial t}+c_3\frac{\partial a_3}{\partial t})-\frac{b_3}{\mu}(c_1\frac{\partial b_1}{\partial t}+c_2\frac{\partial b_2}{\partial t}+c_3\frac{\partial b_3}{\partial t}),$$

$$(b_1\frac{\partial c_2}{\partial t}-c_2\frac{\partial b_1}{\partial t})+(c_1\frac{\partial b_2}{\partial t}-b_2\frac{\partial c_1}{\partial t})$$

$$=\frac{b_3}{\mu}(a_1\frac{\partial b_1}{\partial t}+a_2\frac{\partial b_2}{\partial t}+a_3\frac{\partial b_3}{\partial t})-\frac{c_3}{\mu}(a_1\frac{\partial c_1}{\partial t}+a_2\frac{\partial c_2}{\partial t}+a_3\frac{\partial c_3}{\partial t}),$$

$$(c_1\frac{\partial a_2}{\partial t}-a_2\frac{\partial c_1}{\partial t})+(a_1\frac{\partial c_2}{\partial t}-c_2\frac{\partial a_1}{\partial t})$$

$$=\frac{c_3}{\mu}(b_1\frac{\partial c_1}{\partial t}+b_2\frac{\partial c_2}{\partial t}+b_3\frac{\partial c_3}{\partial t})-\frac{a_3}{\mu}(b_1\frac{\partial a_1}{\partial t}+b_2\frac{\partial a_2}{\partial t}+b_3\frac{\partial a_3}{\partial t});$$

also:

$$\{(a_1\frac{\partial b_2}{\partial t}-b_2\frac{\partial a_1}{\partial t})+(b_1\frac{\partial a_2}{\partial t}-a_2\frac{\partial b_1}{\partial t})\}\mathfrak{x}\mathfrak{y}$$

$$+\{(b_1\frac{\partial c_2}{\partial t}-c_2\frac{\partial b_1}{\partial t})+(c_1\frac{\partial b_2}{\partial t}-b_2\frac{\partial c_1}{\partial t})\}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$$

$$+\{(c_1\frac{\partial a_2}{\partial t}-a_2\frac{\partial c_1}{\partial t})+(a_1\frac{\partial c_2}{\partial t}-c_2\frac{\partial a_1}{\partial t})\}\mathfrak{z}\mathfrak{x}$$

$$=-\{\frac{c_3}{\mu}(a_1\frac{\partial c_1}{\partial t}+a_2\frac{\partial c_2}{\partial t}+a_3\frac{\partial c_3}{\partial t})-\frac{b_3}{\mu}(a_1\frac{\partial b_1}{\partial t}+a_2\frac{\partial b_2}{\partial t}+a_3\frac{\partial b_3}{\partial t})\}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$$

$$-\{\frac{a_3}{\mu}(b_1\frac{\partial a_1}{\partial t}+b_2\frac{\partial a_2}{\partial t}+b_3\frac{\partial a_3}{\partial t})-\frac{c_3}{\mu}(b_1\frac{\partial c_1}{\partial t}+b_2\frac{\partial c_2}{\partial t}+b_3\frac{\partial c_3}{\partial t})\}\mathfrak{z}\mathfrak{x}$$

$$-\{\frac{b_3}{\mu}(c_1\frac{\partial b_1}{\partial t}+c_2\frac{\partial b_2}{\partial t}+c_3\frac{\partial b_3}{\partial t})-\frac{a_3}{\mu}(c_1\frac{\partial a_1}{\partial t}+c_2\frac{\partial a_2}{\partial t}+c_3\frac{\partial a_3}{\partial t})\}\mathfrak{x}\mathfrak{y}.$$

Folglich ist nach dem Obigen:

$$\mu(x\frac{\partial y}{\partial t}-y\frac{\partial x}{\partial t})$$

$$\begin{aligned}
= \quad & a_3(c_1\frac{\partial b_1}{\partial t}+c_2\frac{\partial b_2}{\partial t}+c_3\frac{\partial b_3}{\partial t})(\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2) \\
& +b_3(a_1\frac{\partial c_1}{\partial t}+a_2\frac{\partial c_2}{\partial t}+a_3\frac{\partial c_3}{\partial t})(\mathfrak{z}^2+\mathfrak{x}^2) \\
& +c_3(b_1\frac{\partial a_1}{\partial t}+b_2\frac{\partial a_2}{\partial t}+b_3\frac{\partial a_3}{\partial t})(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2) \\
& -\{b_3(b_1\frac{\partial a_1}{\partial t}+b_2\frac{\partial a_2}{\partial t}+b_3\frac{\partial a_3}{\partial t})+c_3(a_1\frac{\partial c_1}{\partial t}+a_2\frac{\partial c_2}{\partial t}+a_3\frac{\partial c_3}{\partial t})\}\mathfrak{y}\mathfrak{z} \\
& -\{c_3(c_1\frac{\partial b_1}{\partial t}+c_2\frac{\partial b_2}{\partial t}+c_3\frac{\partial b_3}{\partial t})+a_3(b_1\frac{\partial a_1}{\partial t}+b_2\frac{\partial a_2}{\partial t}+b_3\frac{\partial a_3}{\partial t})\}\mathfrak{z}\mathfrak{x} \\
& -\{a_3(a_1\frac{\partial c_1}{\partial t}+a_2\frac{\partial c_2}{\partial t}+a_3\frac{\partial c_3}{\partial t})+b_3(c_1\frac{\partial b_1}{\partial t}+c_2\frac{\partial b_2}{\partial t}+c_3\frac{\partial b_3}{\partial t})\}\mathfrak{x}\mathfrak{y};
\end{aligned}$$

und setzen wir nun:

$$c_1\frac{\partial b_1}{\partial t}+c_2\frac{\partial b_2}{\partial t}+c_3\frac{\partial b_3}{\partial t}=-(b_1\frac{\partial c_1}{\partial t}+b_2\frac{\partial c_2}{\partial t}+b_3\frac{\partial c_3}{\partial t})=p,$$

$$a_1\frac{\partial c_1}{\partial t}+a_2\frac{\partial c_2}{\partial t}+a_3\frac{\partial c_3}{\partial t}=-(c_1\frac{\partial a_1}{\partial t}+c_2\frac{\partial a_2}{\partial t}+c_3\frac{\partial a_3}{\partial t})=q,$$

$$b_1\frac{\partial a_1}{\partial t}+b_2\frac{\partial a_2}{\partial t}+b_3\frac{\partial a_3}{\partial t}=-(a_1\frac{\partial b_1}{\partial t}+a_2\frac{\partial b_2}{\partial t}+a_3\frac{\partial b_3}{\partial t})=r;$$

so ist nach dem Obigen:

$$\begin{aligned}
\mu(x\frac{\partial y}{\partial t}-y\frac{\partial x}{\partial t})= \quad & a_3p(\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2)+b_3q(\mathfrak{z}^2+\mathfrak{x}^2)+c_3r(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2) \\
& -(b_3r+c_3q)\mathfrak{y}\mathfrak{z}-(c_3p+a_3r)\mathfrak{z}\mathfrak{x}-(a_3q+b_3p)\mathfrak{x}\mathfrak{y}
\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}
\mu(x\frac{\partial y}{\partial t}-y\frac{\partial x}{\partial t})= \quad & a_3\{p(\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2)-q\mathfrak{x}\mathfrak{y}-r\mathfrak{z}\mathfrak{x}\} \\
& +b_3\{q(\mathfrak{z}^2+\mathfrak{x}^2)-r\mathfrak{y}\mathfrak{z}-p\mathfrak{x}\mathfrak{y}\} \\
& +c_3\{r(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2)-p\mathfrak{z}\mathfrak{x}-q\mathfrak{y}\mathfrak{z}\},
\end{aligned}$$

und folglich:

$$\begin{aligned}
\mu m(x\frac{\partial y}{\partial t}-y\frac{\partial x}{\partial t})= \quad & a_3\{pm(\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2)-qm\mathfrak{x}\mathfrak{y}-rm\mathfrak{z}\mathfrak{x}\} \\
& +b_3\{qm(\mathfrak{z}^2+\mathfrak{x}^2)-rm\mathfrak{y}\mathfrak{z}-pm\mathfrak{x}\mathfrak{y}\} \\
& +c_3\{rm(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2)-pm\mathfrak{z}\mathfrak{x}-qm\mathfrak{y}\mathfrak{z}\}.
\end{aligned}$$

Setzen wir

$$12)\quad \begin{cases} \mathfrak{A}=\Sigma m(\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2), & \mathfrak{B}=\Sigma m(\mathfrak{z}^2+\mathfrak{x}^2), \quad \mathfrak{C}=\Sigma m(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2); \\ \mathfrak{D}=\Sigma m\mathfrak{y}\mathfrak{z}, & \mathfrak{E}=\Sigma m\mathfrak{z}\mathfrak{x}, \quad \mathfrak{F}=\Sigma m\mathfrak{x}\mathfrak{y}; \end{cases}$$

so erhalten wir aus dem Vorhergehenden unmittelbar die Gleichung:

$$\begin{aligned} \mu\Sigma m\left(x\frac{\partial y}{\partial t}-y\frac{\partial x}{\partial t}\right)= \; & a_3(\mathfrak{A}p-\mathfrak{F}q-\mathfrak{E}r) \\ & +b_3(\mathfrak{B}q-\mathfrak{D}r-\mathfrak{F}p) \\ & +c_3(\mathfrak{C}r-\mathfrak{E}p-\mathfrak{D}q) \end{aligned}$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$\begin{aligned} P&=\mathfrak{A}p-\mathfrak{F}q-\mathfrak{E}r, \\ Q&=\mathfrak{B}q-\mathfrak{D}r-\mathfrak{F}p, \\ R&=\mathfrak{C}r-\mathfrak{E}p-\mathfrak{D}q \end{aligned}$$

setzen:

$$\mu\Sigma m\left(x\frac{\partial y}{\partial t}-y\frac{\partial x}{\partial t}\right)=a_3P+b_3Q+c_3R,$$

und folglich, weil offenbar

$$\frac{\partial\Sigma m\left(x\frac{\partial y}{\partial t}-y\frac{\partial x}{\partial t}\right)}{\partial t}=\Sigma m\frac{\partial\left(x\frac{\partial y}{\partial t}-y\frac{\partial x}{\partial t}\right)}{\partial t}=\Sigma m\left(x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-y\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)$$

ist:

$$\mu\Sigma m\left(x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-y\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)=\frac{\partial(a_3P+b_3Q+c_3R)}{\partial t}.$$

Für die Bewegung eines um einen festen Punkt drehbaren Systems materieller Punkte hat man aber nach den von mir in Thl. XXV. S. 453. gegebenen Entwickelungen die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \Sigma m\left(y\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}-z\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)&=\Sigma m(yZ-zY), \\ \Sigma m\left(z\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}-x\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)&=\Sigma m(zX-xZ), \\ \Sigma m\left(x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-y\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)&=\Sigma m(xY-yX); \end{aligned}$$

wo der feste Drehpunkt wie vorher als Anfang der Coordinaten angenommen worden ist und die Bedeutung der Symbole X, Y, Z a. a. O. nachgesehen werden muss.

Also ist nach dem Obigen:

$$\mu\Sigma m(xY-yX)=\frac{\partial(a_3P+b_3Q+c_3R)}{\partial t};$$

und setzen wir nun der Kürze wegen:

$$M_1=\Sigma m(yZ-zY),\quad M_2=\Sigma m(zX-xZ),\quad M_3=\Sigma m(xY-yX);$$

so erhalten wir auf ganz ähnliche Art wie vorher überhaupt die drei folgenden Gleichungen:

$$13)\quad\ldots\quad\left\{\begin{aligned}\mu M_1&=\frac{\partial(a_1P+b_1Q+c_1R)}{\partial t},\\ \mu M_2&=\frac{\partial(a_2P+b_2Q+c_2R)}{\partial t},\\ \mu M_3&=\frac{\partial(a_3P+b_3Q+c_3R)}{\partial t}.\end{aligned}\right.$$

Führt man aber die Differentiationen aus, so wird:

$$\mu M_1=a_1\frac{\partial P}{\partial t}+b_1\frac{\partial Q}{\partial t}+c_1\frac{\partial R}{\partial t}+P\frac{\partial a_1}{\partial t}+Q\frac{\partial b_1}{\partial t}+R\frac{\partial c_1}{\partial t},$$

$$\mu M_2=a_2\frac{\partial P}{\partial t}+b_2\frac{\partial Q}{\partial t}+c_2\frac{\partial R}{\partial t}+P\frac{\partial a_2}{\partial t}+Q\frac{\partial b_2}{\partial t}+R\frac{\partial c_2}{\partial t},$$

$$\mu M_3=a_3\frac{\partial P}{\partial t}+b_3\frac{\partial Q}{\partial t}+c_3\frac{\partial R}{\partial t}+P\frac{\partial a_3}{\partial t}+Q\frac{\partial b_3}{\partial t}+R\frac{\partial c_3}{\partial t};$$

und folglich, wie man mittelst der aus dem Obigen bekannten Relationen zwischen den neun Grössen a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3 sogleich übersieht:

$$14)\quad .\quad\left\{\begin{aligned}\mu(a_1M_1+a_2M_2+a_3M_3)&=\frac{\partial P}{\partial t}-Qr+Rq,\\ \mu(b_1M_1+b_2M_2+b_3M_3)&=\frac{\partial Q}{\partial t}-Rp+Pr,\\ \mu(c_1M_1+c_2M_2+c_3M_3)&=\frac{\partial R}{\partial t}-Pq+Qp.\end{aligned}\right.$$

Wenn die Axen der $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die durch den Drehpunkt gelegten Hauptaxen (Thl. XXV. Nr. VI.) des Systems der Massen sind, so ist bekanntlich

$$\Sigma m\mathfrak{y}\mathfrak{z}=0,\quad \Sigma m\mathfrak{z}\mathfrak{x}=0,\quad \Sigma m\mathfrak{x}\mathfrak{y}=0;$$

also

$$\mathfrak{D}=0,\quad \mathfrak{E}=0,\quad \mathfrak{F}=0$$

und folglich nach dem Obigen:

$$P=\mathfrak{A}p,\quad Q=\mathfrak{B}q,\quad R=\mathfrak{C}r;$$

also:

$$\frac{\partial P}{\partial t}=\mathfrak{A}\frac{\partial p}{\partial t},\quad \frac{\partial Q}{\partial t}=\mathfrak{B}\frac{\partial q}{\partial t},\quad \frac{\partial R}{\partial t}=\mathfrak{C}\frac{\partial r}{\partial t};$$

folglich nach 14) in diesem Falle:

$$15)\quad \left\{\begin{aligned} &\mu(a_1M_1+a_2M_2+a_3M_3)=\mathfrak{A}\frac{\partial p}{\partial t}-(\mathfrak{B}-\mathfrak{C})qr,\\ &\mu(b_1M_1+b_2M_2+b_3M_3)=\mathfrak{B}\frac{\partial q}{\partial t}-(\mathfrak{C}-\mathfrak{A})rp,\\ &\mu(c_1M_1+c_2M_2+c_3M_3)=\mathfrak{C}\frac{\partial r}{\partial t}-(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})pq. \end{aligned}\right.$$

Wirkt in dem Systeme bloss die auf die Einheit der Massen bezogene Schwere G, so nehme man den positiven Theil der Axe der z vertikal abwärts. Dann ist, wobei man Thl. XXV. S. 449. zu vergleichen hat:

$$X'=0,\quad Y'=0,\quad Z'=mG;$$

also:

$$X=0,\quad Y=0,\quad Z=G;$$

folglich:

$$M_1=G\Sigma my,\quad M_2=-G\Sigma mx,\quad M_3=0;$$

und daher:

$$\begin{aligned} a_1M_1+a_2M_2+a_3M_3&=G\Sigma m(a_1y-a_2x),\\ b_1M_1+b_2M_2+b_3M_3&=G\Sigma m(b_1y-b_2x),\\ c_1M_1+c_2M_2+c_3M_3&=G\Sigma m(c_1y-c_2x); \end{aligned}$$

also nach 15):

$$16)\quad \left\{\begin{aligned} &\mu G\Sigma m(a_1y-a_2x)=\mathfrak{A}\frac{\partial p}{\partial t}-(\mathfrak{B}-\mathfrak{C})qr,\\ &\mu G\Sigma m(b_1y-b_2x)=\mathfrak{B}\frac{\partial q}{\partial t}-(\mathfrak{C}-\mathfrak{A})rp,\\ &\mu G\Sigma m(c_1y-c_2x)=\mathfrak{C}\frac{\partial r}{\partial t}-(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})pq; \end{aligned}\right.$$

oder, auch:

$$17) \quad \begin{cases} \mu G(a_1 \Sigma my - a_2 \Sigma mx) = \mathfrak{A}\frac{\partial p}{\partial t} - (\mathfrak{B} - \mathfrak{C})qr, \\ \mu G(b_1 \Sigma my - b_2 \Sigma mx) = \mathfrak{B}\frac{\partial q}{\partial t} - (\mathfrak{C} - \mathfrak{A})rp, \\ \mu G(c_1 \Sigma my - c_2 \Sigma mx) = \mathfrak{C}\frac{\partial r}{\partial t} - (\mathfrak{A} - \mathfrak{B})pq. \end{cases}$$

Nach 1) ist

$$x = a_1\mathfrak{x} + b_1\mathfrak{y} + c_1\mathfrak{z},$$
$$y = a_2\mathfrak{x} + b_2\mathfrak{y} + c_2\mathfrak{z};$$

also:

$$a_1 y - a_2 x = (a_1 b_2 - b_1 a_2)\mathfrak{y} - (c_1 a_2 - a_1 c_2)\mathfrak{z},$$
$$b_1 y - b_2 x = (b_1 c_2 - c_1 b_2)\mathfrak{z} - (a_1 b_2 - b_1 a_2)\mathfrak{x},$$
$$c_1 y - c_2 x = (c_1 a_2 - a_1 c_2)\mathfrak{x} - (b_1 c_2 - c_1 b_2)\mathfrak{y};$$

folglich nach 9):

$$a_1 y - a_2 x = \mu(c_3\mathfrak{y} - b_3\mathfrak{z}),$$
$$b_1 y - b_2 x = \mu(a_3\mathfrak{z} - c_3\mathfrak{x}),$$
$$c_1 y - c_2 x = \mu(b_3\mathfrak{x} - a_3\mathfrak{y}).$$

Also ist nach 16), weil nach 10) bekanntlich $\mu^2 = 1$ ist:

$$18) \quad \begin{cases} G\Sigma m(c_3\mathfrak{y} - b_3\mathfrak{z}) = \mathfrak{A}\frac{\partial p}{\partial t} - (\mathfrak{B} - \mathfrak{C})qr, \\ G\Sigma m(a_3\mathfrak{z} - c_3\mathfrak{x}) = \mathfrak{B}\frac{\partial q}{\partial t} - (\mathfrak{C} - \mathfrak{A})rp, \\ G\Sigma m(b_3\mathfrak{x} - a_3\mathfrak{y}) = \mathfrak{C}\frac{\partial r}{\partial t} - (\mathfrak{A} - \mathfrak{B})pq; \end{cases}$$

oder:

$$19) \quad \begin{cases} G(c_3\Sigma m\mathfrak{y} - b_3\Sigma m\mathfrak{z}) = \mathfrak{A}\frac{\partial p}{\partial t} - (\mathfrak{B} - \mathfrak{C})qr, \\ G(a_3\Sigma m\mathfrak{z} - c_3\Sigma m\mathfrak{x}) = \mathfrak{B}\frac{\partial q}{\partial t} - (\mathfrak{C} - \mathfrak{A})rp, \\ G(b_3\Sigma m\mathfrak{x} - a_3\Sigma m\mathfrak{y}) = \mathfrak{C}\frac{dr}{dt} - (\mathfrak{A} - \mathfrak{B})pq. \end{cases}$$

Sind $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ die Coordinaten des Schwerpunkts der Massen $m, m_1, m_2, m_3, \ldots$ im Systeme der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$, so ist bekanntlich:

$$\Sigma m\mathfrak{x} = \mathfrak{X}\Sigma m,\quad \Sigma m\mathfrak{y} = \mathfrak{Y}\Sigma m,\quad \Sigma m\mathfrak{z} = \mathfrak{Z}\Sigma m;$$

also:

$$20)\ \ldots \left\{\begin{array}{l} G(c_3\mathfrak{Y} - b_3\mathfrak{Z})\Sigma m = \mathfrak{A}\frac{\partial p}{\partial t} - (\mathfrak{B} - \mathfrak{C})qr, \\ G(a_3\mathfrak{Z} - c_3\mathfrak{X})\Sigma m = \mathfrak{B}\frac{\partial q}{\partial t} - (\mathfrak{C} - \mathfrak{A})rp, \\ G(b_3\mathfrak{X} - a_3\mathfrak{Y})\Sigma m = \mathfrak{C}\frac{\partial r}{\partial t} - (\mathfrak{A} - \mathfrak{B})pq. \end{array}\right.$$

Fällt der Schwerpunkt der Massen $m, m_1, m_2, m_3, \ldots$ mit dem Drehpunkte zusammen, so ist $\mathfrak{X}=0$, $\mathfrak{Y}=0$, $\mathfrak{Z}=0$, also:

$$21)\ \ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{A}\frac{\partial p}{\partial t} - (\mathfrak{B} - \mathfrak{C})qr = 0, \\ \mathfrak{B}\frac{\partial q}{\partial t} - (\mathfrak{C} - \mathfrak{A})rp = 0, \\ \mathfrak{C}\frac{\partial r}{\partial t} - (\mathfrak{A} - \mathfrak{B})pq = 0. \end{array}\right.$$

Dieselben Gleichungen erhält man aus 20) für $G=0$.

Die Grössen p, q, r sind für die im Vorhergehenden entwickelten allgemeinen Bedingungsgleichungen der Drehung eines Systems um einen festen Punkt offenbar von besonderer Bedeutung, und es ist daher wichtig, dass wir von der eigentlichen Natur oder dem eigentlichen Wesen dieser Grössen eine möglichst deutliche Vorstellung zu gewinnen suchen. Zu dem Ende wollen wir uns zuerst die Frage vorlegen, ob nicht vielleicht zur Zeit t gewisse Punkte des Systems in augenblicklicher Ruhe bleiben, wo wir jetzt unter Punkten des Systems keineswegs bloss die den Massen $m, m_1, m_2, m_3, \ldots$ entsprechenden Punkte verstehen. Ist daher (xyz) ein beliebiger Punkt des Systems, so sind $\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t}$ die Composanten seiner Geschwindigkeit nach den Axen der x, y, z; und soll also dieser Punkt in augenblicklicher Ruhe bleiben, so muss

$$\frac{\partial x}{\partial t}=0,\quad \frac{\partial y}{\partial t}=0,\quad \frac{\partial z}{\partial t}=0$$

sein. Nach 11) ist aber

$$\frac{\partial x}{\partial t}=\mathfrak{x}\frac{\partial a_1}{\partial t}+\mathfrak{y}\frac{\partial b_1}{\partial t}+\mathfrak{z}\frac{\partial c_1}{\partial t},$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}=\mathfrak{x}\frac{\partial a_2}{\partial t}+\mathfrak{y}\frac{\partial b_2}{\partial t}+\mathfrak{z}\frac{\partial c_2}{\partial t},$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\mathfrak{x}\frac{\partial a_3}{\partial t}+\mathfrak{y}\frac{\partial b_3}{\partial t}+\mathfrak{z}\frac{\partial c_3}{\partial t};$$

was, in Verbindung mit dem Vorhergehenden, zu den Gleichungen

$$\mathfrak{x}\frac{\partial a_1}{\partial t}+\mathfrak{y}\frac{\partial b_1}{\partial t}+\mathfrak{z}\frac{\partial c_1}{\partial t}=0,$$

$$\mathfrak{x}\frac{\partial a_2}{\partial t}+\mathfrak{y}\frac{\partial b_2}{\partial t}+\mathfrak{z}\frac{\partial c_2}{\partial t}=0,$$

$$\mathfrak{x}\frac{\partial a_3}{\partial t}+\mathfrak{y}\frac{\partial b_3}{\partial t}+\mathfrak{z}\frac{\partial c_3}{\partial t}=0$$

führt. Multiplicirt man diese Gleichungen nach der Reihe zuerst mit c_1, c_2, c_3; dann mit b_1, b_2, b_3; endlich mit a_1, a_2, a_3; und addirt sie in jedem Falle zu einander, so erhält man, mit Rücksicht darauf, dass nach 2)

$$c_1\frac{\partial c_1}{\partial t}+c_2\frac{\partial c_2}{\partial t}+c_3\frac{\partial c_3}{\partial t}=0,$$

$$b_1\frac{\partial b_1}{\partial t}+b_2\frac{\partial b_2}{\partial t}+b_3\frac{\partial b_3}{\partial t}=0,$$

$$a_1\frac{\partial a_1}{\partial t}+a_2\frac{\partial a_2}{\partial t}+a_3\frac{\partial a_3}{\partial t}=0$$

ist, die drei folgenden Gleichungen:

$$\left(c_1\frac{\partial a_1}{\partial t}+c_2\frac{\partial a_2}{\partial t}+c_3\frac{\partial a_3}{\partial t}\right)\mathfrak{x}+\left(c_1\frac{\partial b_1}{\partial t}+c_2\frac{\partial b_2}{\partial t}+c_3\frac{\partial b_3}{\partial t}\right)\mathfrak{y}=0,$$

$$\left(b_1\frac{\partial c_1}{\partial t}+b_2\frac{\partial c_2}{\partial t}+b_3\frac{\partial c_3}{\partial t}\right)\mathfrak{z}+\left(b_1\frac{\partial a_1}{\partial t}+b_2\frac{\partial a_2}{\partial t}+b_3\frac{\partial a_3}{\partial t}\right)\mathfrak{x}=0,$$

$$\left(a_1\frac{\partial b_1}{\partial t}+a_2\frac{\partial b_2}{\partial t}+a_3\frac{\partial b_3}{\partial t}\right)\mathfrak{y}+\left(a_1\frac{\partial c_1}{\partial t}+a_2\frac{\partial c_2}{\partial t}+a_3\frac{\partial c_3}{\partial t}\right)\mathfrak{z}=0;$$

also, wenn man die aus dem Obigen bekannten Ausdrücke von p, q, r einführt:

$$q\mathfrak{x}-p\mathfrak{y}=0,\quad p\mathfrak{z}-r\mathfrak{x}=0,\quad r\mathfrak{y}-q\mathfrak{z}=0$$

oder

$$\frac{\mathfrak{x}}{p}=\frac{\mathfrak{y}}{q}=\frac{\mathfrak{z}}{r},$$

welches die Gleichungen einer durch den Anfang der Coordinaten, also durch den festen Drehpunkt, gehenden Geraden sind. Diese Gerade, deren Punkte zur Zeit t bei der Drehung des Systems sämmtlich in augenblicklicher Ruhe bleiben, so dass sich also das System augenblicklich um diese Gerade wie um eine feste Axe dreht, hat man die freiwillige oder augenblickliche Drehungsaxe (axe instantané de rotation) genannt; und aus der vorhergehenden Betrachtung ergiebt sich von selbst, dass die Lage dieser Axe im Systeme der gegebenen Punkte selbst eine völlig bestimmte ist.

Bezeichnen wir die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche der eine der beiden von dem Anfange der Coordinaten oder dem festen Drehpunkte ausgehenden Theile der augenblicklichen oder freiwilligen Drehungsaxe mit den positiven Theilen der Axen der $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ einschliesst, durch φ, ψ, χ; so ist, wenn F einen gewissen Factor bezeichnet, nach den vorhergehenden Gleichungen der in Rede stehenden Axe:

$$F\cos\varphi=p,\quad F\cos\psi=q,\quad F\cos\chi=r;$$

also, wenn man quadrirt und addirt, nach einer bekannten Relation:

$$F=\pm\sqrt{p^2+q^2+r^2},$$

folglich:

$$\cos\varphi=\pm\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}},$$

$$\cos\psi=\pm\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}},$$

$$\cos\chi=\pm\frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}};$$

wo die oberen und unteren Zeichen sich auf einander beziehen.

Es sei nun (xyz) oder $(\mathfrak{xyz})$ ein beliebiger Punkt des Systems und v bezeichne dessen wirkliche Geschwindigkeit, so ist bekanntlich

$$v=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2}.$$

Nun ist aber nach dem Obigen:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \mathfrak{x}\frac{\partial a_1}{\partial t} + \mathfrak{y}\frac{\partial b_1}{\partial t} + \mathfrak{z}\frac{\partial c_1}{\partial t},$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \mathfrak{x}\frac{\partial a_2}{\partial t} + \mathfrak{y}\frac{\partial b_2}{\partial t} + \mathfrak{z}\frac{\partial c_2}{\partial t},$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \mathfrak{x}\frac{\partial a_3}{\partial t} + \mathfrak{y}\frac{\partial b_3}{\partial t} + \mathfrak{z}\frac{\partial c_3}{\partial t};$$

also:

$$\begin{aligned}
v^2 = & \left\{\left(\frac{\partial a_1}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial a_2}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial a_3}{\partial t}\right)^2\right\}\mathfrak{x}^2 \\
& + \left\{\left(\frac{\partial b_1}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial b_2}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial b_3}{\partial t}\right)^2\right\}\mathfrak{y}^2 \\
& + \left\{\left(\frac{\partial c_1}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial c_2}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial c_3}{\partial t}\right)^2\right\}\mathfrak{z}^2 \\
& + 2\left\{\frac{\partial a_1}{\partial t}\cdot\frac{\partial b_1}{\partial t} + \frac{\partial a_2}{\partial t}\cdot\frac{\partial b_2}{\partial t} + \frac{\partial a_3}{\partial t}\cdot\frac{\partial b_3}{\partial t}\right\}\mathfrak{x}\mathfrak{y} \\
& + 2\left\{\frac{\partial b_1}{\partial t}\cdot\frac{\partial c_1}{\partial t} + \frac{\partial b_2}{\partial t}\cdot\frac{\partial c_2}{\partial t} + \frac{\partial b_3}{\partial t}\cdot\frac{\partial c_3}{\partial t}\right\}\mathfrak{y}\mathfrak{z} \\
& + 2\left\{\frac{\partial c_1}{\partial t}\cdot\frac{\partial a_1}{\partial t} + \frac{\partial c_2}{\partial t}\cdot\frac{\partial a_2}{\partial t} + \frac{\partial c_3}{\partial t}\cdot\frac{\partial a_3}{\partial t}\right\}\mathfrak{z}\mathfrak{x}.
\end{aligned}$$

Bezeichnet P die Entfernung des Punktes (xyz) oder $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ von der freiwilligen Drehungsaxe, deren Gleichungen wir im Obigen gefunden haben, so ist nach den Lehren der analytischen Geometrie bekanntlich:

$$\mathrm{P} = \sqrt{\frac{(q\mathfrak{x} - p\mathfrak{y})^2 + (r\mathfrak{y} - q\mathfrak{z})^2 + (p\mathfrak{z} - r\mathfrak{x})^2}{p^2 + q^2 + r^2}}.$$

Also ist die als ein mit der Längeneinheit als Halbmesser beschriebener Kreisbogen betrachtete Winkelgeschwindigkeit des Punktes (xyz) oder $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ bei der Drehung des Systems um die freiwillige Drehungsaxe, also natürlich die Winkelgeschwindigkeit des Systems überhaupt, bei dieser Drehung offenbar:

$$\frac{v}{\mathrm{P}} = \frac{v\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}{\sqrt{(q\mathfrak{x} - p\mathfrak{y})^2 + (r\mathfrak{y} - q\mathfrak{z})^2 + (p\mathfrak{z} - r\mathfrak{x})^2}}.$$

Nun ist aber

$$(q\mathfrak{x} - p\mathfrak{y})^2 + (r\mathfrak{y} - q\mathfrak{z})^2 + (p\mathfrak{z} - r\mathfrak{x})^2$$
$$= (q^2 + r^2)\mathfrak{x}^2 + (r^2 + p^2)\mathfrak{y}^2 + (p^2 + q^2)\mathfrak{z}^2 - 2pq\mathfrak{x}\mathfrak{y} - 2qr\mathfrak{y}\mathfrak{z} - 2rp\mathfrak{z}\mathfrak{x},$$

wo wir jetzt die Theile dieses Ausdrucks einzeln betrachten wollen.

Nach dem Obigen ist

$$p^2+q^2=(a_1\frac{\partial c_1}{\partial t}+a_2\frac{\partial c_2}{\partial t}+a_3\frac{\partial c_3}{\partial t})^2+(b_1\frac{\partial c_1}{\partial t}+b_2\frac{\partial c_2}{\partial t}+b_3\frac{\partial c_3}{\partial t})^2$$

$$=(a_1^2+b_1^2)\left(\frac{\partial c_1}{\partial t}\right)^2+(a_2^2+b_2^2)\left(\frac{\partial c_2}{\partial t}\right)^2+(a_3^2+b_3^2)\left(\frac{\partial c_3}{\partial t}\right)^2$$

$$+2(a_1a_2+b_1b_2)\frac{\partial c_1}{\partial t}\cdot\frac{\partial c_2}{\partial t}$$

$$+2(a_2a_3+b_2b_3)\frac{\partial c_2}{\partial t}\cdot\frac{\partial c_3}{\partial t}$$

$$+2(a_3a_1+b_3b_1)\frac{\partial c_3}{\partial t}\cdot\frac{\partial c_1}{\partial t},$$

also, weil

$$a_1^2+b_1^2+c_1^2=1,$$
$$a_2^2+b_2^2+c_2^2=1,$$
$$a_3^2+b_3^2+c_3^2=1$$

und

$$a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0,$$
$$a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3=0,$$
$$a_3a_1+b_3b_1+c_3c_1=0$$

ist:

$$p^2+q^2=\left(\frac{\partial c_1}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial c_2}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial c_3}{\partial t}\right)^2$$

$$-c_1^2\left(\frac{\partial c_1}{\partial t}\right)^2-c_2^2\left(\frac{\partial c_2}{\partial t}\right)^2-c_3^2\left(\frac{\partial c_3}{\partial t}\right)^2$$

$$-2c_1c_2\frac{\partial c_1}{\partial t}\cdot\frac{\partial c_2}{\partial t}-2c_2c_3\frac{\partial c_2}{\partial t}\cdot\frac{\partial c_3}{\partial t}-2c_3c_1\frac{\partial c_3}{\partial t}\cdot\frac{\partial c_1}{\partial t},$$

folglich offenbar:

$$p^2+q^2=\left(\frac{\partial c_1}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial c_2}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial c_3}{\partial t}\right)^2-(c_1\frac{\partial c_1}{\partial t}+c_2\frac{\partial c_2}{\partial t}+c_3\frac{\partial c_3}{\partial t})^2,$$

also, weil aus der Gleichung

$$c_1^2+c_2^2+c_3^2=1$$

unmittelbar

$$c_1\frac{\partial c_1}{\partial t}+c_2\frac{\partial c_2}{\partial t}+c_3\frac{\partial c_3}{\partial t}=0$$

folgt:

$$p^2+q^2=\left(\frac{\partial c_1}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial c_2}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial c_3}{\partial t}\right)^2.$$

Auf diese Art findet man überhaupt:

$$q^2+r^2=\left(\frac{\partial a_1}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial a_2}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial a_3}{\partial t}\right)^2,$$

$$r^2+p^2=\left(\frac{\partial b_1}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial b_2}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial b_3}{\partial t}\right)^2,$$

$$p^2+q^2=\left(\frac{\partial c_1}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial c_2}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial c_3}{\partial t}\right)^2.$$

Ferner ist nach dem Obigen:

$$pq=-(c_1\frac{\partial a_1}{\partial t}+c_2\frac{\partial a_2}{\partial t}+c_3\frac{\partial a_3}{\partial t})\,(c_1\frac{\partial b_1}{\partial t}+c_2\frac{\partial b_2}{\partial t}+c_3\frac{\partial b_3}{\partial t})$$

$$=-c_1^2\frac{\partial a_1}{\partial t}\cdot\frac{\partial b_1}{\partial t}-c_2^2\frac{\partial a_2}{\partial t}\cdot\frac{\partial b_2}{\partial t}-c_3^2\frac{\partial a_3}{\partial t}\cdot\frac{\partial b_3}{\partial t}$$

$$-c_1c_2\left(\frac{\partial a_1}{\partial t}\cdot\frac{\partial b_2}{\partial t}+\frac{\partial a_2}{\partial t}\cdot\frac{\partial b_1}{\partial t}\right)$$

$$-c_2c_3\left(\frac{\partial a_2}{\partial t}\cdot\frac{\partial b_3}{\partial t}+\frac{\partial a_3}{\partial t}\cdot\frac{\partial b_2}{\partial t}\right)$$

$$-c_3c_1\left(\frac{\partial a_3}{\partial t}\cdot\frac{\partial b_1}{\partial t}+\frac{\partial a_1}{\partial t}\cdot\frac{\partial b_3}{\partial t}\right),$$

also, wieder weil

$$a_1^2+b_1^2+c_1^2=1,$$

$$a_2^2+b_2^2+c_2^2=1,$$

$$a_3^2+b_3^2+c_3^2=1$$

und

$$a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0,$$

$$a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3=0,$$

$$a_3a_1+b_3b_1+c_3c_1=0$$

ist:

$$pq=-\frac{\partial a_1}{\partial t}\cdot\frac{\partial b_1}{\partial t}-\frac{\partial a_2}{\partial t}\cdot\frac{\partial b_2}{\partial t}-\frac{\partial a_3}{\partial t}\cdot\frac{\partial b_3}{\partial t}$$
$$+(a_1^2+b_1^2)\frac{\partial a_1}{\partial t}\cdot\frac{\partial b_1}{\partial t}$$
$$+(a_2^2+b_2^2)\frac{\partial a_2}{\partial t}\cdot\frac{\partial b_2}{\partial t}$$
$$+(a_3^2+b_3^2)\frac{\partial a_3}{\partial t}\cdot\frac{\partial b_3}{\partial t}$$
$$+(a_1a_2+b_1b_2)\left(\frac{\partial a_1}{\partial t}\cdot\frac{\partial b_2}{\partial t}+\frac{\partial a_2}{\partial t}\cdot\frac{\partial b_1}{\partial t}\right)$$
$$+(a_2a_3+b_2b_3)\left(\frac{\partial a_2}{\partial t}\cdot\frac{\partial b_3}{\partial t}+\frac{\partial a_3}{\partial t}\cdot\frac{\partial b_2}{\partial t}\right)$$
$$+(a_3a_1+b_3b_1)\left(\frac{\partial a_3}{\partial t}\cdot\frac{\partial b_1}{\partial t}+\frac{\partial a_1}{\partial t}\cdot\frac{\partial b_3}{\partial t}\right),$$

folglich, wie man leicht findet:

$$pq=-\left(\frac{\partial a_1}{\partial t}\cdot\frac{\partial b_1}{\partial t}+\frac{\partial a_2}{\partial t}\cdot\frac{\partial b_2}{\partial t}+\frac{\partial a_3}{\partial t}\cdot\frac{\partial b_3}{\partial t}\right)$$
$$+(a_1\frac{\partial a_1}{\partial t}+a_2\frac{\partial a_2}{\partial t}+a_3\frac{\partial a_3}{\partial t})(a_1\frac{\partial b_1}{\partial t}+a_2\frac{\partial b_2}{\partial t}+a_3\frac{\partial b_3}{\partial t})$$
$$+(b_1\frac{\partial b_1}{\partial t}+b_2\frac{\partial b_2}{\partial t}+b_3\frac{\partial b_3}{\partial t})(b_1\frac{\partial a_1}{\partial t}+b_2\frac{\partial a_2}{\partial t}+b_3\frac{\partial a_3}{\partial t})$$

Weil nun aber

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2=1,$$
$$b_1^2+b_2^2+b_3^2=1$$

ist, so ist

$$a_1\frac{\partial a_1}{\partial t}+a_2\frac{\partial a_2}{\partial t}+a_3\frac{\partial a_3}{\partial t}=0,$$
$$b_1\frac{\partial b_1}{b t}+b_2\frac{\partial b_2}{\partial t}+b_3\frac{\partial b_3}{\partial t}=0;$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$pq=-\left(\frac{\partial a_1}{\partial t}\cdot\frac{\partial b_1}{\partial t}+\frac{\partial a_2}{\partial t}\cdot\frac{\partial b_2}{\partial t}+\frac{\partial a_3}{\partial t}\cdot\frac{\partial b_3}{\partial t}\right),$$

und auf diese Weise erhält man überhaupt:

$$pq = -\left(\frac{\partial a_1}{\partial t}\cdot\frac{\partial b_1}{\partial t} + \frac{\partial a_2}{\partial t}\cdot\frac{\partial b_2}{\partial t} + \frac{\partial a_3}{\partial t}\cdot\frac{\partial b_3}{\partial t}\right),$$

$$qr = -\left(\frac{\partial b_1}{\partial t}\cdot\frac{\partial c_1}{\partial t} + \frac{\partial b_2}{\partial t}\cdot\frac{\partial c_2}{\partial t} + \frac{\partial b_3}{\partial t}\cdot\frac{\partial c_3}{\partial t}\right),$$

$$rp = -\left(\frac{\partial c_1}{\partial t}\cdot\frac{\partial a_1}{\partial t} + \frac{\partial c_2}{\partial t}\cdot\frac{\partial a_2}{\partial t} + \frac{\partial c_3}{\partial t}\cdot\frac{\partial a_3}{\partial t}\right).$$

Folglich ist nach dem Obigen:

$$\begin{aligned}
&(q\mathfrak{x}-p\mathfrak{y})^2+(r\mathfrak{y}-q\mathfrak{z})^2+(p\mathfrak{z}-r\mathfrak{x})^2\\
= &\left\{\left(\frac{\partial a_1}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial a_2}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial a_3}{\partial t}\right)^2\right\}\mathfrak{x}^2\\
&+\left\{\left(\frac{\partial b_1}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial b_2}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial b_3}{\partial t}\right)^2\right\}\mathfrak{y}^2\\
&+\left\{\left(\frac{\partial c_1}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial c_2}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial c_3}{\partial t}\right)^2\right\}\mathfrak{z}^2\\
&+2\left\{\frac{\partial a_1}{\partial t}\cdot\frac{\partial b_1}{\partial t}+\frac{\partial a_2}{\partial t}\cdot\frac{\partial b_2}{\partial t}+\frac{\partial a_3}{\partial t}\cdot\frac{\partial b_3}{\partial t}\right\}\mathfrak{x}\mathfrak{y}\\
&+2\left\{\frac{\partial b_1}{\partial t}\cdot\frac{\partial c_1}{\partial t}+\frac{\partial b_2}{\partial t}\cdot\frac{\partial c_2}{\partial t}+\frac{\partial b_3}{\partial t}\cdot\frac{\partial c_3}{\partial t}\right\}\mathfrak{y}\mathfrak{z}\\
&+2\left\{\frac{\partial c_1}{\partial t}\cdot\frac{\partial a_1}{\partial t}+\frac{\partial c_2}{\partial t}\cdot\frac{\partial a_2}{\partial t}+\frac{\partial c_3}{\partial t}\cdot\frac{\partial a_3}{\partial t}\right\}\mathfrak{z}\mathfrak{x},
\end{aligned}$$

und daher offenbar:

$$(q\mathfrak{x}-p\mathfrak{y})^2+(r\mathfrak{y}-q\mathfrak{z})^2+(p\mathfrak{z}-r\mathfrak{x})^2=v^2,$$

oder

$$v=\sqrt{(q\mathfrak{x}-p\mathfrak{y})^2+(r\mathfrak{y}-q\mathfrak{z})^2+(p\mathfrak{z}-r\mathfrak{x})^2}.$$

Also ist nach dem oben Bewiesenen offenbar die Grösse $\sqrt{p^2+q^2+r^2}$ die Winkelgeschwindigkeit der Drehung des Systems um die freiwillige oder augenblickliche Drehungsaxe.

Aus den oben für q^2+r^2, r^2+p^2, p^2+q^2 gefundenen Ausdrücken folgt durch deren Addition die bemerkenswerthe Relation:

$$2(p^2+q^2+r^2)=\left\{\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial a_1}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial a_2}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial a_3}{\partial t}\right)^2\\
&+\left(\frac{\partial b_1}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial b_2}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial b_3}{\partial t}\right)^2\\
&+\left(\frac{\partial c_1}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial c_2}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial c_3}{\partial t}\right)^2
\end{aligned}\right.$$

und überhaupt könnte man aus den vorher von mir gegebenen Entwickelungen noch manche andere merkwürdige Relationen ableiten, was ich aber jetzt der Kürze wegen nicht weiter ausführen will.

XXIV.

Ueber die Bewegung eines magnetischen Pendels.

Von

Herrn *H. Kinkelin*,

Lehrer der Mathematik zu Aarburg.

---

§. 1.

Es sei (Taf. VI. Fig. 5.) MCO' ein im Schwerpunkt C aufgehängtes Pendel, das sich um C frei bewegen kann, in O' ein Elektromagnetstab, ebenso in O ein fester, so ist, wenn durch R ihre Entfernung angedeutet wird, ihre Anziehung $=-\frac{h}{R^2}$. Bis auf eine gewisse Genauigkeitsgrenze wird die Bewegung des Pendels dieselbe sein, wie die eines, an einer steifen Linie, die an einem Ende fest ist, magnetischen Punktes, der von einem andern festen, senkrecht unter dem Aufhängepunkt gelegenen magnetischen Punkt O angezogen wird.

§. 2.

Es sei (Taf. VI. Fig. 6.) der Aufhängepunkt in A, der magnetische bewegliche Punkt B, der in seiner Stellung B' über dem

festen magnetischen Punkt O von demselben um a entfernt ist, $AB = l$. Die Horizontalprojektion der Bahn sei $MNPQ$; OX, OY, OZ seien respektive die drei Coordinatenaxen. Man bezeichne $\angle BAB'$ mit α, $\angle BOX = \varphi$, $\angle BOC = \psi$, $\angle COX = \omega$. Die Bewegungsgleichungen eines Punktes, der sich auf einer Oberfläche $\varphi(x, y, z) = 0$ bewegt, sind

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dU}{dx} + \lambda\varphi'(x),$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dU}{dy} + \lambda\varphi'(y),$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dU}{dz} + \lambda\varphi'(z);$$

wo $U = \int(Xdx + Ydy + Zdz)$ das Anziehungspotenzial ist, das in unserem Fall $= \frac{h}{R}$. Die Gleichung der Bewegungsfläche des Punktes B ist

$$\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2z(a + l) - a(a + 2l) = 0,$$

so dass nun unsere Bewegungsgleichungen sind:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{gx}{R^3} + 2\lambda x, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{gy}{R^3} + 2\lambda y, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -\frac{gz}{R^3} + 2\lambda(z - l - a); \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (1)$$

wo λ ein unbestimmter Faktor.

§. 3.

Man erhält hieraus auf die bekannte Weise:

$$\left.\begin{aligned} xdy - ydx &= \alpha dt, \\ \frac{d.(zdx - xdz)}{dt^2} &= 2\lambda x(l + a), \\ \frac{d.(zdy - ydz)}{dt^2} &= 2\lambda y(l + a); \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (2)$$

$$v^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = \frac{2h}{R} + \beta. \qquad (3)$$

α und β bedeuten hier zwei willkürliche Konstanten, v ist die Geschwindigkeit des Punktes R in seiner Bahn. Die erste Gleichung gibt den Flächensatz in der XY-Ebene.

Um R auszudrücken, so ist aus der Flächengleichung:

$$z = l + a \pm \sqrt{l^2 - (x^2 + y^2)}.$$

Was das doppelte Vorzeichen betrifft, so ist zu bemerken, dass z nie grösser als AO oder $l + a$ werden kann; also ist

$$z = l + a - \sqrt{l^2 - (x^2 + y^2)},$$

und somit, da $R^2 = x^2 + y^2 + z^2$:

$$R = \sqrt{l^2 + (l+a)^2 - 2(l+a)\sqrt{l^2 - x^2 - y^2}},$$

und es ist:

$$dz = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{l^2 - x^2 - y^2}}.$$

§. 4.

Führt man nun die Coordinaten ω und r ein, wo $r = CO$ ist, so wird:

$$x = r\cos\omega, \quad y = r\sin\omega;$$

also:

$$dz = \frac{rdr}{\sqrt{l^2 - r^2}}, \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{l^2 + (l+a)^2 - 2(l+a)\sqrt{l^2 - r^2}}}. \quad (4)$$

Dies in die erste und letzte der Gleichungen (3) eingeführt, gibt:

$$r^2 d\omega = \alpha dt, \quad \frac{l^2 dr^2}{l^2 - r^2} + r^2 d\omega^2 = \left(\frac{2h}{R} + \beta\right) dt^2,$$

woraus durch Elimination von dt:

$$d\omega = \frac{l\alpha}{r\sqrt{l^2 - r^2}} \cdot \frac{dr}{\sqrt{\left(\frac{2h}{R} + \beta\right) r^2 - \alpha^2}},$$

und hieraus:

$$\omega = \nu + l\alpha \int \frac{dr}{r\sqrt{l^2 - r^2}\sqrt{\left(\frac{2h}{R} + \beta\right) r^2 - \alpha^2}} \quad . \; . \; . \quad (5)$$

ν ist eine willkürliche Winkelkonstante. Diese endliche Lösung des Problems hängt von der Entwickelung eines elliptischen Integrals ab.

§. 5.

Bevor wir allgemein (5) weiter behandeln, untersuchen wir einige spezielle Fälle.

Es sei $l=\infty$, alsdann wird $z=a$, d. h. der Punkt ist genöthigt, sich auf einer Ebene zu bewegen, die von O um die Grösse a entfernt ist. Dies wäre der Fall mit einer Kugel vom Halbmesser a, die sich auf der Ebene von O bewegt. Mit einem starken Elektromagneten könnte dieser Versuch ausgeführt werden und so wäre die Planetenbewegung direkt dargestellt. In diesem Fall wird $R=\sqrt{r^2+a^2}$, und die Gleichung der Bahn ist:

$$\omega=\nu+\alpha\int\frac{dr}{r\sqrt{\left(\frac{2h}{\sqrt{r^2+a^2}}+\beta\right)r^2-\alpha^2}}. \quad . \quad . \quad (6)$$

Für $a=0$, welches leicht herzustellen wäre, wird

$$\omega=\nu-\alpha\int\frac{du}{\sqrt{\beta+2hu-\alpha^2u^2}};$$

wo $u=\frac{1}{r}$; und durch Integration:

$$rh^2=r\sqrt{h^2+\beta\alpha^2}(\cos\nu\cos\omega+\sin\nu\sin\omega)+\alpha^2,$$

oder, wenn die ursprünglichen Coordinaten eingeführt werden:

$$h\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{h^2+\beta\alpha^2}(x\cos\nu+y\sin\nu)+\alpha^2.$$

Verfügt man über ν so, dass $\nu=\pi$, so wird

$$h^2y^2-\beta\alpha^2x^2=\alpha^4-2\alpha^2x\sqrt{h^2+\beta\alpha^2}.$$

Es sei r_0 die anfängliche Entfernung der Kugel B von O, die Geschwindigkeit des Anfangsstosses $=v_0$, so ist diese Linie eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel, jenachdem respektive

$$v_0<\sqrt{\frac{2h}{r_0}},\quad v_0>\sqrt{\frac{2h}{r_0}},\quad v_0=\sqrt{\frac{2h}{r_0}}.$$

Da ferner

$$r=\frac{a^2}{h-\sqrt{h^2+\beta a^2}\cos(\nu-\omega)},$$

so folgt, dass für die Winkel

$$\omega,\quad \omega+2\pi,\quad \omega+4\pi,\ldots\quad \omega+2k\pi$$

der nämliche Werth wiederkehrt. Geht der Anfangsstoss durch den Punkt O selbst, d. h. ist das Minimum von $r=0$, also $\alpha=0$, so ist

$$xdy-ydx=0,\quad \text{woraus } y=mx;$$

d. h. die Bahn ist eine geradlinige durch den Punkt O. Allgemein ist das Minimum von r für $\omega=0$:

$$r=\frac{a^2}{h+\sqrt{h^2+\beta a^2}}.$$

§. 6.

Wenden wir uns wieder der Gleichung (5) zu und entwickeln $\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2}}$ nach Potenzen von a^2, so kommt

$$\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2}}=\frac{1}{r}-\frac{1}{2}\frac{a^2}{r^3}+\frac{3}{8}\frac{a^4}{r^5}-\frac{5}{16}\frac{a^6}{r^7}+\ldots,$$

also:

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{2hr^2}{\sqrt{r^2+a^2}}+\beta r^2-\alpha^2}}=\frac{1}{\sqrt{-\alpha^2+2hr+\beta r^2}}+\frac{ha^2}{2\sqrt{\beta^3}r^4}$$
$$-\frac{3ha^2}{4\sqrt{\beta^3}}\left(\frac{\beta-2\alpha^2}{2\beta}\right)\frac{1}{r^6}+\ldots,$$

wenn man bei der sechsten Potenz von $\frac{1}{r}$ stehen bleibt. Sonach ist

$$\nu-\omega=\arccos\frac{hr-\alpha^2}{r\sqrt{h^2+\beta\alpha^2}}+\frac{ha^2}{8\sqrt{\beta^3}}\frac{1}{r^4}-\frac{3}{48}\frac{ha^2(\beta-2\alpha^2)}{\sqrt{\beta^5}}\frac{1}{r^6}+\ldots$$

Setzt man, da diese Curve eine hyperbelartige ist, den Winkel für ein bestimmtes r bei der Hyperbel gleich $\nu-\omega'$, wenn vorausgesetzt wird, dass man denselben vom nämlichen Punkt aus zählt, so hat man die Bahngleichung in der XY-Ebene:

$$\nu-\omega=(\nu-\omega')-\frac{ha^2}{8\sqrt{\beta^3}}\frac{1}{r^4}\left(1-\frac{\beta-2\alpha^2}{2\beta}\frac{1}{r^2}\right),$$

welche einer Hyperbel um so näher kommt, je grösser r gegenüber a ist.

§. 7.

Ist β negativ, d. h. die Curve eine geschlossene, so ist vorstehende Entwickelung unstatthaft. Setzt man alsdann einfach $-\beta$ anstatt β, so erhält man dann:

$$\frac{1}{r\sqrt{\frac{2hr^2}{r^2+a^2}-\beta r^2-\alpha^2}}=\frac{1}{r\sqrt{-\alpha^2+2hr-\beta r^2}}-\frac{1}{2}\frac{ha^2}{r^4}\left(1-\frac{3}{4}\frac{a^2}{r^2}\right)\frac{1}{\sqrt{\beta^3}}$$

$$\times\left\{1-\frac{3}{2}\left(\frac{2h}{\beta r}-\frac{\alpha^2}{\beta r^2}-2\right)+\frac{3.5}{8}\left(\frac{2h}{\beta r}-\frac{\alpha^2}{\beta r^2}-2\right)^2-\frac{3.5.7}{48}\left(\frac{2h}{\beta r}-\frac{\alpha^2}{\beta r^2}-2\right)^3\right\},$$

da $\frac{2h}{\beta r}-\frac{\alpha^2}{\beta r^2}-2<1$.

Dieser Ausdruck kommt einer Ellipse um so näher, je grösser r gegen a ist.

§. 8.

Behandeln wir nun die Gleichungen (2) und (3) unter der Voraussetzung, dass die Schwingungen sehr klein seien, so kann man $(z-a)^2$ vernachlässigen, und es wird dann

$$z-a=\frac{r^2}{2l},$$

und die Bewegungsgleichungen mit Polarcoordinaten sind:

$$r^2d\omega=dt,\quad dr^2+r^2d\omega^2+\frac{r^2dr^2}{l^2}=\left(\frac{2h}{R}+\beta\right)dt^2;$$

oder, da nun $R^2=r^2\frac{a+l}{2}+a^2$, so ist:

$$r^2d\omega=dt,\quad dr^2\left(\frac{r^2+l^2}{l^2}\right)+r^2d\omega^2=\left(\frac{2h\sqrt{l}}{\sqrt{a^2l+(a+l)r^2}}+\beta\right)dt^2. \quad (7)$$

welche mit (6) insofern übereinstimmt, dass, wenn man $b = 1$ setzt, (6) herauskommt.

Nimmt man nun a so klein an, dass $a^4 \ldots.$ zu vernachlässigende Grössen sind, so ist

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+r^2b}} = \frac{1}{r\sqrt{b}}\left(1-\frac{1}{2}\frac{a^2}{r^2b}\right) = \frac{1}{r}\left(1-\frac{1}{2}\frac{a}{l}+\frac{3}{8}\frac{a^2}{l^2}\right)-\frac{1}{2}\frac{a^2}{r^3}.$$

Lässt man $\frac{a^2}{l^2}$ verschwinden, so wird also:

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+r^2b}} = \frac{1}{r}-\frac{1}{2l}\frac{a}{r}-\frac{1}{2}\frac{a^2}{r^3},$$

so dass

$$Udr = \frac{dr}{r\sqrt{2hr-\beta r^2-\alpha^2-\frac{har}{l}-\frac{ha^2}{r}}}$$

$$= \frac{dr}{r\sqrt{2hr-\beta r^2-\alpha^2}}+\frac{h}{2}\frac{\left(\frac{ar}{l}+\frac{a^2}{r}\right)dr}{\sqrt{(2hr-\beta r^2-\alpha^2)^3}},$$

und somit:

$$\omega - v = \omega' - v + \frac{ha}{2l}\int\frac{rdr}{\sqrt{(2hr-\beta r^2-\alpha^2)^3}}$$

$$+\frac{ha^2}{2}\int\frac{dr}{r\sqrt{(2hr-\beta r^2-\alpha^2)^3}},$$

wo $\omega' - v$ den Werth des Winkels bedeutet, wenn die Curve eine Ellipse wäre.

Die Integrale rechterhand sind wieder periodische Funktionen von r, mehr einem Glied von der Form

$$A(2hr-\beta r^2-\alpha^2)^m.$$

Um in diesem Falle die Maxima- und Minimawerthe von r zu finden, so muss wieder $\frac{dr}{d\omega}=0$, also

$$\frac{2hr}{\sqrt{a^2+r^2b}}-\beta r^2-\alpha^2=0$$

oder

$$\beta^2r^4-2\alpha^2\beta r^2+\alpha^4=\frac{4h^2r^4}{a^2+r^2b}$$

sein.

Diese Gleichung gibt sechs Werthe für r, wovon aber nur zwei reell sind, wie man sich leicht überzeugen kann. Für diese Werthe wird dann wieder

$$\omega - v = \omega' - v + B.$$

Die Projektion der Bewegung ist also keine Ellipse, dagegen hat sie eine grosse und eine kleine Axe, die aber den elliptischen nicht gleich sind. Dieselben stehen jedoch senkrecht auf einander und sind gegen die elliptischen um den konstanten Winkel B geneigt.

§. 11.

Bei den vorhin betrachteten Fällen wurde als Bahnprojektion eine Curve zweiten Grades, resp. eine Ellipse annähernd gefunden, deren Brennpunkt in O liegt, für welche der Flächensatz gilt und die somit die planetarischen Gesetze ziemlich anschaulich darstellen. Lamont, von dem diese Idee herrührt, machte davon im Winter 1853/54 Gebrauch in seiner Vorlesung über populäre Astronomie. Wir wollen zum Schlusse dieser ersten Abtheilung noch den Fall betrachten, wenn $a = \infty$, d. h. wenn die magnetische Kraft senkrecht auf die Ebene XY wirkt. Es ist dies der Fall eines in Folge der Schwerkraft freischwingenden Pendels. Die beschleunigende Kraft in der Richtung der Anziehung sei $-g$, so werden die Bewegungsgleichungen, wenn der Coordinatenanfang in B' angenommen wird:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\lambda x,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2\lambda y,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g + 2\lambda(z - l);$$

woraus man erhält:

$$xdy - ydx = \alpha dt,\quad x^2 + y^2 + z^2 = 2lz,\quad \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = -2gz + \beta,$$

aus denen z und t zu eliminiren sind. Die erste Gleichung stellt den Flächensatz dar, die dritte gibt die Geschwindigkeit von B in seiner Bahn. Man erhält aus der zweiten Gleichung, wenn $x^2 + y^2 = r^2$ gesetzt wird:

$$z = l - \sqrt{l^2 - r^2},\quad \text{also}\quad dz = \frac{rdr}{\sqrt{l^2 - r^2}};$$

substituirt man dies in die dritte Gleichung und bemerkt, dass $rdr = xdx + ydy$, so geht dieselbe über in:

$$\frac{dx^2+dy^2}{dt^2} = -2gl + 2g\sqrt{l^2-x^2-y^2} - \frac{x^2dx^2+2xydxdy+y^2dy^2}{(l^2-x^2-y^2)dt^2} + \beta.$$

Aus dieser und der ersten Gleichung dt eliminirt, gibt

$$\frac{l^2(dx^2+dy^2)-(xdy-ydx)^2}{l^2-x^2-y^2}$$

$$= (-2gl+2g\sqrt{l^2-x^2-y^2}+\beta)\,\frac{(xdy-ydx)^2}{\alpha^2}.$$

Man führe Polarcoordinaten ein:

$$x = r\cos\omega,\quad y = r\sin\omega;$$

so geht obige Gleichung über in:

$$\frac{l^2dr^2}{l^2-r^2} = (-2glr^2+2gr^2\sqrt{l^2-r^2}+\beta-\alpha^2)\,\frac{r^2d\omega^2}{\alpha^2},$$

woraus man ω allgemein darstellen kann. Wir betrachten aber blos den speziellen Fall, wo die Schwingungen sehr klein sind, so dass man z^2 gegenüber l^2 vernachlässigen darf; dann wird

$$z = \frac{x^2+y^2}{2l},\quad dz = \frac{xdx+ydy}{l}$$

oder

$$z = \frac{r^2}{2l},\quad dz = \frac{rdr}{l},$$

so dass

$$r^2d\omega = \alpha dt,\quad dr^2+r^2d\omega^2+\frac{r^2dr^2}{l^2} = \left(-\frac{gr^2}{l}+\beta\right)dt^2,$$

und wenn noch r^2 neben l^2 vernachlässigt wird, durch Elimination von dt:

$$dr^2 = \frac{r^2}{\alpha^2}\left(-\frac{gr^4}{l}+\beta r^2-\alpha^2\right)d\omega^2,$$

oder, wenn die Grösse in der Klammer in zwei Faktoren zerlegt wird:

$$d\omega = \frac{\alpha\sqrt{l}}{\sqrt{g}}\,\frac{dr}{r\sqrt{\frac{l\beta}{2g}-r^2+\sqrt{\frac{l^2\beta^2}{4g^2}-\frac{l\alpha^2}{g}}}\;\sqrt{r^2-\frac{l\beta}{2g}+\sqrt{\frac{l^2\beta^2}{4g^2}-\frac{l\alpha^2}{g}}}}$$

Setzt man der Kürze wegen

$$\frac{l\beta}{2g}+\sqrt{\frac{l^2\beta^2}{4g^2}-\frac{l\alpha^2}{g}}=a^2,\quad \frac{l\beta}{2g}-\sqrt{\frac{l^2\beta^2}{4g^2}-\frac{l\alpha^2}{g}}=b^2;$$

so wird durch Multiplication dieser beiden Ausdrücke mit einander:

$$\frac{l\alpha^2}{g}=a^2b^2,\quad \frac{\alpha\sqrt{l}}{\sqrt{g}}=ab;$$

so dass nun:

$$d\omega=\frac{abdr}{r\sqrt{a^2-r^2}\sqrt{r^2-b^2}},\quad \text{woraus}\quad \omega=\nu+\arcsin\frac{b\sqrt{a^2-r^2}}{r\sqrt{a^2-b^2}}.$$

Das Maximum von r ist offenbar $r=a$. Für diesen Werth sei $\omega=0$, also $\nu=0$, so ist hieraus:

$$\sin\omega=\frac{b\sqrt{a^2-r^2}}{r\sqrt{a^2-b^2}},$$

woraus schliesslich, wenn die rechtwinkligen Coordinaten wieder eingeführt werden:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

die Gleichung einer Ellipse, deren Mittelpunkt in B', senkrecht unter dem Aufhängepunkt ist, wie bekannt.

§. 12.

Im Bisherigen wurde nur je Ein Pol der beiden Magneten berücksichtigt. Es soll nun noch kurz die Berechnung aufgestellt werden für den Fall, dass beide Pole, jeder als Punkt betrachtet, in Betracht kommen. Alsdann haben wir zwei Abstossungen und zwei Anziehungen, nämlich (Taf. VI. Fig. 7.):

von A nach D, Anziehung $=-\frac{\mu\mu'}{R^2}$;

von A nach C, Abstossung $=+\frac{\mu\mu'}{AC^2}$;

von B nach C, Anziehung $=-\frac{\mu\mu'}{BC^2}$;

von B nach D, Abstossung $=+\frac{\mu\mu'}{BD^2}$;

welche wir näher bestimmen wollen, für den Fall, dass in der Ruhe D auf A fällt.

§. 13.

Abstossung von A nach C. Die Reduktion senkrecht auf die Linie DO gibt

$$\frac{\mu\mu'}{AC^2}\cos\alpha.$$

Dies auf den Punkt D reduzirt, gibt:

$$\frac{\mu\mu'}{AC^2}\cos\alpha.\left(\frac{l-a}{l}\right).$$

Es ist nun:

$$AC^2 = l^2 + (l-a)^2 - 2l(l-a)\cos\gamma$$

und

$$\cos\gamma = 1 - \frac{R^2}{2l^2},\quad \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{AD}{AC} = \frac{R}{\sqrt{l^2+(l-a)^2-2l(l-a)\cos\gamma}},$$

und somit also die Abstossung von A nach D gleich

$$\mu\mu'\frac{l-a}{a^2l+R^2(l-a)}\cdot\frac{R\sqrt{l}}{\sqrt{a^2l+R^2(l-a)}}.$$

Anziehung von B nach C. Wird dieselbe auf die Richtung von A nach D reduzirt, so erhält man auf ähnliche Weise:

$$-\mu\mu'\frac{l-a}{l}\,\frac{R}{\sqrt{4l^2-R^2}}\cdot\frac{\sqrt{4(l^2-b^2)-\left(\frac{l+b}{l}\right)^2R^2}}{\left\{(a+b)^2+\frac{(l-a)(l+b)}{l^2}R^2\right\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Die Abstossung von B nach D wieder ebenso auf A nach D reduzirt, gleich

$$\frac{\mu\mu'}{b^2+\frac{l+b}{l}R^2}\,\frac{R\sqrt{4(l^2-b^2)-\left(\frac{l+b}{l}\right)^2R^2}}{\sqrt{b^2+\frac{l+b}{l}R^2}.\sqrt{4l^2-R^2}}.$$

§. 14.

Die Gesammtanziehung von A nach D ist sonach:

$$T = -\frac{\mu\mu'}{R^2} - \frac{\mu\mu'(l-a)R}{l\sqrt{4l^2-R^2}} \cdot \frac{\sqrt{4(l^2-b^2)-\left(\frac{l+b}{l}\right)^2 R^2}}{\left\{(a+b)^2+\frac{(l-a)(l+b)}{l^2}R^2\right\}^{\frac{3}{2}}}$$

$$+ \mu\mu' \frac{(l-a)R}{l\left\{a^2+\frac{l-a}{l}R^2\right\}^{\frac{3}{2}}} + \frac{\mu\mu' R}{\sqrt{4l^2-R^2}} \frac{\sqrt{4(l^2-b^2)-\left(\frac{l+b}{l}\right)^2 R^2}}{\left\{b^2+\frac{l+b}{l}R^2\right\}^{\frac{3}{2}}},$$

und die Bewegungsgleichungen sind demnach, wenn man noch die Anziehung der Erde berücksichtigt:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{xT}{R} + 2\lambda x,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{yT}{R} + 2\lambda y,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{zT}{R} - g + 2\lambda(z-l).$$

§. 15.

Als Spezialfall, der wohl in der Praxis der brauchbarste ist, sei $l = a$, d. h. der bewegliche Magnet hat seinen einen Pol im Aufhängepunkt; dann wird blos noch

$$T = -\frac{h}{R^2} + \frac{hR}{\sqrt{4l^2-R^2}} \cdot \frac{\sqrt{4(l^2-b^2)-\left(\frac{l+b}{l}\right)^2 R^2}}{\left\{b^2+\frac{l+b}{l}R^2\right\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Gibt man dem Pendel eine Kreisbewegung, und zwar macht man

$$R = 2l\sqrt{\frac{l-b}{l+b}}.$$

so verschwindet auch das zweite Glied in T, und es tritt der interessante Fall ein, dass dann blos noch, wie beim einfachen magnetischen Punkt,

$$T = -\frac{h}{R^2}.$$

Zur Abkürzung wurde h für $\mu\mu'$ gesetzt.

§. 16.

Nimmt man die Schwingungen so klein an, dass z^2 zu vernachlässigen ist, so kann man, da alsdann

$$R^2 = r^2 = 2zl, \quad \text{also} \quad z = \frac{r^2}{2l},$$

obigen Ausdruck für T nach absteigenden Potenzen von l ordnen, wobei die zweiten und höheren Potenzen von $\frac{1}{l}$ weggelassen werden können, und man findet dann:

$$T = -\frac{h}{R^2} - \frac{Rh}{\{(a+b)^2+R^2\}^{\frac{3}{2}}}\left\{1 + \frac{3}{2l}\frac{(b-a)R^2}{(a+b)^2+R^2}\right\}$$

$$+ \frac{Rh}{(a^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}\left\{1 - \frac{2a^3+5aR^2}{2l(a^2+R^2)}\right\} + \frac{Rh}{(b^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}\left\{1 + \frac{3bR^2}{2l(b^2+R^2)}\right\},$$

und für die spezielle Annahme $b = a$, d. h. dass die beiden Magnetstäbe die gleiche Länge haben:

$$T = -\frac{h}{R^2} - \frac{Rh}{(4a^2+R^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2Rh}{(a^2+R^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{a}{l}\frac{R}{(a^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Hiervon ist das Potenzial:

$$U = \frac{h}{R} + \frac{h}{\sqrt{4a^2+R^2}} - \frac{2h}{\sqrt{a^2+R^2}} + \frac{ah}{l\sqrt{a^2+R^2}},$$

so dass man endlich für den Fall $b = a$ unter der Annahme sehr kleiner Schwingungen und unter Nichtberücksichtigung der Schwerkraft erhält, wenn man $\frac{a^4}{r^4}$ vernachlässigt:

$$(\omega - \nu) = (\omega' - \nu) + \alpha g \int \frac{dr}{\sqrt{(-\alpha^2 + \beta r^2 + 2gr)^3}},$$

wo ω' wieder den elliptischen Bahnwinkel vorstellt.

XXV.

Zur sphärischen Trigonometrie.

Von

Herrn *Gustav Skrivan*,

Lehrer der Mathematik an P. Bilka's Erziehungs-Institute zu Wien.

---

§. 1.

Wenn die drei Höhenperpendikel eines ebenen Dreieckes bekannt sind, so kann das Dreieck aufgelöst werden. Ich will diese Aufgabe für ein sphärisches Dreieck lösen, wenn für dasselbe die drei, von den Scheitelpunkten der Winkel auf die ihnen gegenüberliegenden Seiten gezogenen Normalbögen (Höhenperpendikel) bekannt sind.

Zuerst werde ich einige Formeln aufstellen, welche die Relationen zwischen den Seiten, Winkeln und Höhenperpendikeln des sphärischen Dreieckes bilden.

Es sei (Taf. VI. Fig. 8.) ABC ein sphärisches Dreieck, dessen Seiten $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$, und die Winkel A, B, C sind.

Ferner sei der Bogen $AE=h_1$ (Höhenperpend.) senkrecht auf a,

„ „ $BF=h_2$ „ „ „ b,

„ „ $CG=h_3$ „ „ „ c.

Setzt man noch der Kürze wegen:

$$BE=a_1,\ CE=a-a_1 \text{ und } \angle BAE=A_1,\ \angle CAE=A-A_1,$$
$$CF=b_1,\ AF=b-b_1 \quad „ \quad \angle CBF=B_1,\ \angle ABF=B-B_1,$$
$$BG=c_1,\ AG=c-c_1 \quad „ \quad \angle BCG=C_1,\ \angle ACG=C-C_1;$$

so ist:

$$\left.\begin{aligned} \sin c \sin B &= \sin b \sin C = \sin h_1, \\ \sin c \sin A &= \sin a \sin C = \sin h_2, \\ \sin b \sin A &= \sin a \sin B = \sin h_3. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1)$$

Multiplizirt man die zwei ersten Gleichungen und dividirt das Produkt durch die dritte Gleichung, so ergiebt sich:

$$\frac{\sin b \sin C \sin c \sin A}{\sin b \sin A} = \frac{\sin h_1 \sin h_2}{\sin h_3}$$

oder

$$\left.\begin{aligned} \sin c \sin C &= \frac{\sin h_1 \sin h_2}{\sin h_3}, \\ \text{ebenso} \qquad \sin b \sin B &= \frac{\sin h_1 \sin h_3}{\sin h_2}, \\ \sin a \sin A &= \frac{\sin h_2 \sin h_3}{\sin h_1}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (2)$$

Sind daher die drei Höhenperpendikel nebst einer Seite oder einem Winkel eines sphärischen Dreieckes bekannt, so kann man beziehungsweise entweder einen Winkel oder eine Seite mit Hülfe der Gleichungen (2) finden.

Dividirt man in (2) die erste Gleichung durch die zweite, so ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sin c}{\sin b} &= \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{\sin h_3}{\sin h_2}, \\ \text{wie auch} \qquad \frac{\sin c}{\sin a} &= \frac{\sin C}{\sin A} = \frac{\sin h_1}{\sin h_3}, \\ \frac{\sin b}{\sin a} &= \frac{\sin B}{\sin A} = \frac{\sin h_1}{\sin h_2}; \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3)$$

d. h. die Sinusse zweier Seiten eines sphärischen Dreieckes stehen in umgekehrtem Verhältnisse mit den Sinussen der ihnen zugehörigen Höhenperpendikel.

Ferner ist:

$$\begin{aligned} \cos A &= \cos h_2 \sin (B - B_1) = \cos h_3 \sin (C - C_1), \\ \cos B &= \cos h_1 \sin A_1 \qquad\quad = \cos h_3 \sin C_1, \\ \cos C &= \cos h_1 \sin (A - A_1) = \cos h_2 \sin B_1; \end{aligned}$$

woraus folgt:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\cos h_1}{\cos h_3}&=\frac{\sin B_1}{\sin(A-A_1)},\\ \frac{\cos h_1}{\cos h_2}&=\frac{\sin C_1}{\sin A_1},\\ \frac{\cos h_2}{\cos h_3}&=\frac{\sin(C-C_1)}{\sin(B-B_1)}.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(4)$$

Da aber

$$\frac{\sin B_1}{\sin(A-A_1)}=\frac{\sin b_1}{\sin a}:\frac{\sin(a-a_1)}{\sin b}=\frac{\sin b\sin b_1}{\sin a\sin(a-a_1)}$$

ist, und setzt man in diese Formel aus (3) für $\frac{\sin b}{\sin a}$ den Werth $\frac{\sin h_1}{\sin h_2}$, so folgt:

$$\frac{\sin B_1}{\sin(A-A_1)}=\frac{\sin h_1}{\sin h_2}\cdot\frac{\sin b_1}{\sin(a-a_1)},$$

und endlich dieses Resultat in die erste Gleichung in (4) gesetzt, giebt:

$$\frac{\cos h_1}{\cos h_3}=\frac{\sin h_1}{\sin h_2}\cdot\frac{\sin b_1}{\sin(a-a_1)}$$

oder

$$\left.\begin{aligned}\frac{\operatorname{tg} h_2}{\operatorname{tg} h_1}&=\frac{\sin b_1}{\sin(a-a_1)},\\ \text{ebenso}\qquad \frac{\operatorname{tg} h_3}{\operatorname{tg} h_1}&=\frac{\sin c_1}{\sin a_1},\\ \frac{\operatorname{tg} h_3}{\operatorname{tg} h_2}&=\frac{\sin c_1}{\sin b_1}.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(5)$$

Die Gleichungen (4) und (5) enthalten die Relationen zwischen den Höhenperpendikeln, den von ihnen gebildeten Winkeln und Segmenten der Seiten eines sphärischen Dreieckes.

Sehr einfach ergeben sich noch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\sin a_1}{\sin(b-b_1)}&=\frac{\sin A_1}{\sin(B-B_1)},\\ \frac{\sin b_1}{\sin c_1}&=\frac{\sin B_1}{\sin C_1}\ \ldots\ \text{u. s. w.}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(6)$$

Aus der bekannten Formel

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}$$

folgt:

$$\cos a \sin B \sin C - \cos A = \cos B \cos C,$$

und wenn man diese Gleichung quadrirt, so ist:

$$\cos^2 a \sin^2 B \sin^2 C - 2\cos a \cos A \sin B \sin C + \cos^2 A = \cos^2 B \cos^2 C,$$

welche Gleichung sich leicht auf folgende reducirt:

$$\sin^2 B \sin^2 C \sin^2 a + 2\cos a \cos A \sin B \sin C + \sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C.$$

Verbindet man diese Gleichung mit jenen, die in (1) und (2) vorkommen, so ergiebt sich:

$$\frac{\sin^2 h_3}{\sin^2 a} \cdot \sin^2 h_2 + 2\cos a \cos A \cdot \frac{\sin h_2 \sin h_3}{\sin^2 a} + \frac{\sin^2 h_2 \sin^2 h_3}{\sin^2 h_1 \sin^2 a} = \frac{\sin^2 h_2 + \sin^2 h_3}{\sin^2 a},$$

und daraus ist:

$$\cos a \cos A = \frac{\sin^2 h_1 (\sin^2 h_2 + \sin^2 h_3) - \sin^2 h_2 \sin^2 h_3 (1 + \sin^2 h_1)}{2\sin^2 h_1 \sin h_2 \sin h_3};$$

ferner folgt aus (2):

$$\sin a \sin A = \frac{\sin h_2 \sin h_3}{\sin h_1}. \qquad (7)$$

Wird diese Gleichung von der vorhergehenden subtrahirt, so erhält man:

$$\cos a \cos A - \sin a \sin A = \cos(a + A)$$

$$= \frac{\sin^2 h_1 (\sin^2 h_2 + \sin^2 h_3) - (1 + \sin^2 h_1)\sin^2 h_2 \sin^2 h_3 - 2\sin h_1 \sin^2 h_2 \sin^2 h_3}{2\sin^2 h_1 \sin h_2 \sin h_3}.$$

Substituirt man diesen Werth von $\cos(a + A)$ in die Formel

$$\cos^2 \frac{a + A}{2} = \frac{1 + \cos(a + A)}{2},$$

so ist nach einer leichten Reduction:

$$\cos^2 \frac{a + A}{2} = \frac{\sin^2 h_1 (\sin^2 h_2 + \sin^2 h_3)^2 - \sin^2 h_2 \sin^2 h_3 (1 + \sin h_1)^2}{4\sin^2 h_1 \sin h_2 \sin h_3}.$$

Auch kann man in diese Gleichung anstatt $1+\sin h_1 = 2\sin^2(45^0+\frac{h_1}{2})$ setzen, also:

$$\left.\begin{array}{l}\cos\frac{a+A}{2}\\ =\frac{1}{2\sin h_1}\sqrt{\frac{[\sin h_1(\sin h_2+\sin h_3)]^2-[2\sin h_2\sin h_3.\sin^2(45^0+\frac{h_1}{2})]}{\sin h_2\sin h_3}}.\end{array}\right\}(8)$$

Addirt man die beiden Gleichungen (7), so kann nach demselben Verfahren, wie $\cos\frac{a+A}{2}$ gefunden wurde, die Gleichung für $\cos\frac{a-A}{2}$ gefunden werden; dieselbe ist folgende:

$$\left.\begin{array}{l}\cos\frac{a-A}{2}\\ =\frac{1}{2\sin h_1}\sqrt{\frac{[\sin h_1(\sin h_2+\sin h_3)]^2-[2\sin h_2\sin h_3\sin^2(45^0-\frac{h_1}{2})]^2}{\sin h_2\sin h_4}}.\end{array}\right\}(8')$$

Auf dieselbe Weise entwickelt man auch die Gleichungen für $\cos\frac{b\pm B}{2}$ und $\cos\frac{c\pm C}{2}$.

Somit ergeben sich folgende Formeln:

$$\left.\begin{array}{l}\cos\frac{a\pm A}{2}\\ =\frac{1}{2\sin h_1}\sqrt{\frac{[\sin h_1(\sin h_2+\sin h_3)]^2-[2\sin h_2\sin h_3\sin^2(45^0\pm\frac{h_1}{2})]^2}{\sin h_2\sin h_3}}.\end{array}\right\}(9)$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\frac{b\pm B}{2}\\ =\frac{1}{2\sin h_2}\sqrt{\frac{[\sin h_2(\sin h_1+\sin h_3)]^2-[2\sin h_1\sin h_3\sin^2(45^0\pm\frac{h_2}{2})]^2}{\sin h_1\sin h_3}}.\end{array}\right\}(10)$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\frac{c\pm C}{2}\\ =\frac{1}{2\sin h_3}\sqrt{\frac{[\sin h_3(\sin h_1+\sin h_2)]^2-[2\sin h_1\sin h_2\sin^2(45^0\pm\frac{h_3}{2})]^2}{\sin h_1\sin h_2}}.\end{array}\right\}(11)$$

Ist das Dreieck gleichschenklig, so dass z. B. $b=c$, alsdann auch $B=C$ ist, so ist:

$$\sin h_1=\frac{1}{\sin A}\sqrt{-\cos\tfrac{1}{2}(A+2B)\cos\tfrac{1}{2}(2B-A).\cos^2\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{1}{\sin a}\sqrt{\sin\tfrac{1}{2}(2b+a)\sin\tfrac{1}{2}(2b-a).\sin^2\frac{a}{2}},$$

oder

$$\sin h_1=\frac{1}{2\sin\frac{A}{2}}\sqrt{-\cos(B+\frac{A}{2})\cos(B-\frac{A}{2})} \qquad (16)$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{a}{2}}\sqrt{\sin(b+\frac{a}{2})\sin(b-\frac{a}{2})}.$$

In diesem Falle ist $h_2=h_3$, und daher auf dieselbe Art:

$$\sin h_2=\sin h_3 \qquad (17)$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{B}{2}}\sqrt{-\cos(B+\frac{A}{2})\cos(B-\frac{A}{2})}=\frac{1}{2\sin\frac{b}{2}}\sqrt{\sin(b+\frac{a}{2})\sin(b-\frac{a}{2})}.$$

Sei noch $a=b=c$, alsdann ist auch $A=B=C$; mithin ergiebt sich:

$$\sin h_1=\sin h_2=\sin h_3=\frac{1}{2\sin\frac{A}{2}}\sqrt{-\cos\frac{3A}{2}}=\frac{1}{2\sin\frac{a}{2}}\sqrt{\sin\frac{3a}{2}}. \qquad (18)$$

Setzt man $A=90^\circ$, so übergeht h_3 in b und h_2 in c; dann ist die zur Hypotenuse gehörige Höhe h_1 noch zu bestimmen, wofür man erhält:

$$(19)$$

$$\sin h_1=\sqrt{-\cos(45^\circ+\frac{B+C}{2})\cos(45^\circ+\frac{B-C}{2})\cos(45^\circ-\frac{B-C}{2})\cos(45^\circ-\frac{B+C}{2})}$$

$$=\tfrac{1}{2}\sqrt{-\sin(B+C)\sin(B-C)}$$

$$=\tfrac{1}{2}\sqrt{\sin(b+c)\sin(b-c)}.$$

Was nun die Entfernung des Punktes O von den drei Seiten anbelangt, so setze ich $OE=\mu_1$, $OF=\mu_2$, $OG=\mu_3$; alsdann wird:

$$\operatorname{tg}\mu_1=\operatorname{tg}B_1\sin a_1.$$

Da aber

$$\operatorname{tg} B_1 \sin a_1 = \frac{\operatorname{cotg} C}{\cos a} \cdot \operatorname{cotg} B \operatorname{tg} h_1$$

ist, so folgt:

$$\operatorname{tg} \mu_1 = \frac{\operatorname{tg} h_1}{\cos a} \cdot \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C, \qquad (20)$$

und eben so:

$$\operatorname{tg} \mu_2 = \frac{\operatorname{tg} h_2}{\cos b} \cdot \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} C, \qquad (21)$$

$$\operatorname{tg} \mu_3 = \frac{\operatorname{tg} h_3}{\cos c} \cdot \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B. \qquad (22)$$

Setzt man in diese Gleichungen anstatt der Cosinusse der Seiten die ihnen angehörigen Winkelfunctionen, so ist nach der gehörigen Reduction:

$$\operatorname{tg} h_1 \operatorname{cotg} \mu_1 = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\cos B \cos C} \text{ oder } \operatorname{tg} h_1 \operatorname{cotg} \mu_1 - 1 = \frac{\cos A}{\cos B \cos C}$$

und daraus:

$$\frac{\sin (h_1 - \mu_1)}{\sin \mu_1} = \frac{\cos A \cos h_1}{\cos B \cos C}; \qquad (23)$$

ebenso:

$$\frac{\sin (h_2 - \mu_2)}{\sin \mu_2} = \frac{\cos B \cos h_2}{\cos A \cos C}, \qquad (24)$$

$$\frac{\sin (h_3 - \mu_3)}{\sin \mu_3} = \frac{\cos C \cos h_3}{\cos A \cos B}. \qquad (25)$$

§. 2.

Halbirt man die Seiten a, b, c des sphärischen Dreiecks ABC (Taf. VI. Fig. 9.) und errichtet in den Halbirungspunkten D, E, F die Normalbögen $OD = p_1$, $OE = p_2$, $OF = p_3$; so ist der Durchschnittspunkt dieser Normalbögen, O', der Mittelpunkt des um das Dreieck ABC_1 beschriebenen Kreises, wobei $O'B = O'C = O'A = \varrho$ ist.

Setzt man

$$\angle O'BC = \angle O'CB = B_1, \quad \angle O'AC = \angle O'CA = A_1$$

und

$$\angle BO'C = \varphi, \quad \angle AO'B = \psi, \quad \angle AO'C = \chi;$$

so ist leicht zu erweisen, dass

$$B_1 = \frac{B+C-A}{2}, \quad B-B_1 = A-A_1 = \frac{A+B-C}{2} \qquad (26)$$

und

$$C-B_1 = A_1 = \frac{A+C-B}{2}$$

ist. Wenn man aus dieser Gleichung in die bekannte Formel

$$\sin\frac{a}{2}\,\mathrm{tg}\,B_1 = \mathrm{tg}\,p_1$$

den Werth für B_1 substituirt und dann $\sin\frac{a}{2}$ mittelst der drei Winkel des Dreieckes ausdrückt, so folgt:

$$\mathrm{tg}\,p_1 = \mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}(B+C-A)\sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}{\sin B\sin C}}. \qquad (27)$$

Nach demselben Verfahren gelangt man zu den Gleichungen:

$$\mathrm{tg}\,p_2 = \mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}(A+C-B)\sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\cos\frac{1}{2}(A+C-B)}{\sin A\sin C}}, \qquad (28)$$

$$\mathrm{tg}\,p_3 = \mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}(A+B-C)\sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\cos\frac{1}{2}(A+B-C)}{\sin A\sin B}}. \qquad (29)$$

Hieraus ist ersichtlich, dass aus den drei Winkeln des sphärischen Dreieckes die Abstände des Mittelpunktes des umgeschriebenen Kreises berechnet werden können.

Es lassen sich folgende Gleichungen ganz einfach ableiten:

$$\cos\frac{\varphi}{2} = \cos\frac{a}{2}\sin B_1, \quad \cos\frac{\psi}{2} = \cos\frac{c}{2}\sin(B-B_1), \quad \cos\frac{\chi}{2} = \cos\frac{b}{2}\sin A_1;$$

verbindet man diese Formeln mit jenen in (26) und substituirt für die Cosinusse der Seiten die bekannten Winkel-Ausdrücke, so ergiebt sich nach gehöriger Reduction:

$$\cos\frac{\varphi}{2} = \sin\tfrac{1}{2}(B+C-A)\sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B-C)\cos\frac{1}{2}(A+C-B)}{\sin B\sin C}}, \qquad (30)$$

$$\cos\frac{\psi}{2} = \sin\tfrac{1}{2}(A+B-C)\sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(A+C-B)\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}{\sin A\sin B}}, \qquad (31)$$

$$\cos\frac{\chi}{2} = \sin\tfrac{1}{2}(A+C-B)\sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B-C)\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}{\sin A\sin C}}. \qquad (32)$$

Wie man nun aus den gegebenen Winkeln des Dreieckes die Entfernungen des Punktes O' von den Seiten bestimmt hat, so lassen sich auch die drei gleichen Entfernungen des Punktes O' von den Ecken A, B, C des Dreieckes sowohl durch die Winkel, als auch durch die Seiten ausdrücken. Denn es ist:

$$\operatorname{cotg}\varrho = \operatorname{cotg} p_1 \cos\frac{\varphi}{2} = \operatorname{cotg} p_2 \cos\frac{\chi}{2} = \operatorname{cotg} p_3 \cos\frac{\psi}{2}, \qquad (33)$$

und wenn man aus den früheren Gleichungen für p_1 und $\frac{\varphi}{2}$ die Werthe substituirt, so ergiebt sich nach einer leichten Reduktion die Formel:

$$(34)$$

$$\operatorname{tg}\varrho = \frac{\cos\frac{1}{2}(A+B+C)}{\sqrt{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\cos\frac{1}{2}(A+B-C)\cos\frac{1}{2}(A+C-B)\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}}.$$

Sind die Seiten des sphärischen Dreieckes gegeben, so lässt sich diese Formel mit Hülfe bekannter Gleichungen der sphärischen Trigonometrie leicht auf folgende bringen:

$$(35)$$

$$\operatorname{tg}\varrho = \frac{2\sin\frac{a}{2}.\sin\frac{b}{2}.\sin\frac{c}{2}}{\sqrt{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(a+c-b)\sin(b+c-a)}}.$$

Wenn die drei Abstände p_1, p_2, p_3 nebst einem Winkel des Dreieckes bekannt sind, so lässt sich das Dreieck auflösen. Denn es ist:

$$\sin p_3 = \sin\varrho \sin(A - A_1),$$

$$\sin p_2 = \sin\varrho \sin A_1;$$

woraus folgt:

$$\frac{\sin(A-A_1)}{\sin A_1} = \frac{\sin p_3}{\sin p_2}$$

oder

$$\frac{\sin A \cos A_1 - \sin A_1 \cos A}{\sin A_1} = \frac{\sin p_3}{\sin p_2},$$

so auch

$$\operatorname{cotg} A_1 = \frac{\sin p_2 \cos A + \sin p_3}{\sin p_2 \sin A};$$

weil aber $\operatorname{cotg} A_1 = \sin\frac{b}{2}\operatorname{cotg} p_2$ ist, so muss auch

$$\operatorname{tg} p_1 = \operatorname{tg}\left(\frac{B+C}{2} - 45^0\right)\sqrt{\frac{-\cos(45^0 + \frac{B+C}{2}).\cos(45^0 - \frac{B+C}{2})}{\sin B \sin C}},$$

oder:

$$\operatorname{tg} p_1 = \operatorname{tg}\left(\frac{B+C}{2} - 45^0\right)\sqrt{\frac{-\cos(B+C)}{2\sin B \sin C}}. \tag{41}$$

Ferner folgt aus (28) und (29):

(42)

$$\operatorname{tg} p_2 = \operatorname{tg}(45^0 - \frac{B-C}{2})\sqrt{\frac{-\cos(45^0 + \frac{B+C}{2})\cos(45^0 - \frac{B-C}{2})}{\sin C}},$$

$$\operatorname{tg} p_3 = \operatorname{tg}(45^0 + \frac{B-C}{2})\sqrt{\frac{-\cos(45^0 + \frac{B+C}{2})\sin(45^0 - \frac{B-C}{2})}{\sin B}}.$$

Die Gleichungen (34) und [α] gestalten sich zu nachfolgenden:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tang}\varrho &= \frac{2.\cos(45^0 + \frac{B+C}{2})}{\sqrt{-\cos(B+C)\cos(B-C)}},\\ \sin\frac{b}{2} &= \frac{\sin p_3}{\cos p_2}.\end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Endlich folgt aus der Gleichung (37) die Gleichung für die Hypotenuse, nämlich:

$$\cos\frac{a}{2} = \frac{1}{\cos p_1}\sqrt{\sin(90^0 + p_2 + p_3)\sin(90^0 + p_2 - p_3)} \tag{44}$$

$$= \frac{1}{\cos p_1}\sqrt{\cos(p_2 + p_3)\cos(p_2 - p_3)}.$$

Da im gleichseitigen sphärischen Dreiecke $p_1 = p_2 = p_3$ ist, so folgt aus der Formel (27) wegen $A = B = C$:

$$\operatorname{tg} p_1 = \operatorname{tg}\frac{A}{2}\sqrt{\frac{-\cos\frac{3A}{2}.\cos\frac{A}{2}}{\sin^2 A}} = \frac{1}{2\cos^2\frac{A}{2}}\sqrt{-\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{3A}{2}}. \tag{45}$$

Aus (30) erhält man:

$$\left.\begin{aligned}\cos\frac{\varphi}{2} &= \sin\frac{A}{2}\sqrt{\frac{\cos^2\frac{A}{2}}{\sin^2 A}} = \tfrac{1}{2},\\ \text{daher}\qquad \varphi &= 120^0.\end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Aus (33), (34) und (35) folgt, mit Berücksichtigung der letzten Formel:

$$\cot g\,\varrho=\tfrac{1}{2}\cot g\,p_1$$

oder

$$\operatorname{tg}\varrho=2.\operatorname{tg}p_1,$$

also auch:

$$\operatorname{tg}p_1:\operatorname{tg}\varrho=1:2, \tag{47}$$

$$\operatorname{tg}\varrho=\frac{\cos\frac{3A}{2}}{\cos\frac{A}{2}\sqrt{-\cos\frac{3A}{2}.\cos\frac{A}{2}}}=\frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}}\sqrt{-\cos\frac{3A}{2}.\cos\frac{A}{2}}, \tag{48}$$

$$\operatorname{tg}\varrho=\frac{2\sin^2\frac{a}{2}}{\sqrt{\sin\frac{a}{2}\,.\,\sin\frac{3a}{2}}}. \tag{49}$$

Endlich erhält man aus (37):

$$\cos\frac{a}{2}=\frac{2\cos\frac{A}{2}}{\cos p_1\sin A}\sqrt{\sin\left(\frac{A}{2}+p_1\right)\sin\left(\frac{A}{2}-p_1\right)} \tag{50}$$

$$=\frac{1}{\cos p_1\sin\frac{A}{2}}\sqrt{\sin\left(\frac{A}{2}+p_1\right)\sin\left(\frac{A}{2}-p_1\right)}.$$

Ist in einem Dreiecke $a=b=c=90^0$, so ergiebt sich aus (49):

$$\operatorname{tg}\varrho=\frac{2.\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}(4.\frac{1}{2}-1)}}=\sqrt{2},$$

und aus (47):

$$\operatorname{tg}p_1=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}.$$

§. 3.

Wenn man die Winkel A, B, C des Dreieckes ABC (Taf. VI. Fig. 10.) halbirt, und die halbirenden Transversalen AO'', BO'', CO'' mit v_1, v_2, v_3 bezeichnet, so ist bekanntlich O'' der Mittelpunkt des in das Dreieck eingeschriebenen Kreises. Daher sind auch die Abstände $O''D$, $O''F$, $O''E$ des gemeinschaftlichen Durchschnittspunktes O'' der Transversalen von den Seiten unter einander gleich. Setzt man nun:

$O''D = O''F = O''E = r$, $AF = m_1$, $BD = m_2$; $CE = m_3$,

so sind auch folgende Gleichungen bekannt:

$$\left.\begin{aligned} AF = AE = m_1 &= \tfrac{1}{2}(b+c-a),\\ BD = BF = m_2 &= \tfrac{1}{2}(a+c-b),\\ CE = CD = m_3 &= \tfrac{1}{2}(a+b-c).\end{aligned}\right\} \qquad (51)$$

Wenn man in die Gleichung $\operatorname{cotg} v_1 = \operatorname{cotg} m_1 . \cos\frac{A}{2}$ für m_1 aus (51) den Werth setzt, nebst dem auch $\cos\frac{A}{2}$ mittelst den drei Seiten des Dreieckes ausdrückt, so folgt:

$$\operatorname{cotg} v_1 = \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(b+c-a)\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin b \sin c}}; \quad (52)$$

ebenso ergiebt sich:

$$\operatorname{cotg} v_2 = \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(a+c-b)\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin a \sin c}}, \quad (53)$$

$$\operatorname{cotg} v_3 = \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(a+b-c)\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin a \sin b}}. \quad (54)$$

Hiermit ist die Aufgabe gelöst, aus den drei Seiten des sphärischen Dreieckes die winkelhalbirenden Transversalen zu finden.

Wird in der Gleichung $\operatorname{cotg} r = \frac{\operatorname{cotg}\frac{A}{2}}{\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}$ die $\operatorname{cotg}\frac{A}{2}$ durch die drei Seiten des sphärischen Dreieckes ausgedrückt, so gelangt man nach einer leichten Reduktion zu der Formel:

$$\operatorname{cotg} r = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}{\sqrt{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(a+c-b)\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}}; \quad (55)$$

nun ist aber auch

$$\sin\tfrac{1}{2}(b+c-a)$$

$$= \frac{\sqrt{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\cos\frac{1}{2}(A+B-C)\cos\frac{1}{2}(A+C-B)\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}};$$

mithin kann man aus der obigen Formel ebenso erhalten:

$$\operatorname{cotg} r \quad (56)$$

$$= \frac{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sqrt{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\cos\frac{1}{2}(A+B-C)\cos\frac{1}{2}(A+C-B)\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}}.$$

Diese Formeln stellen die Relationen vor zwischen den Seiten oder Winkeln und dem Abstande des Mittelpunktes eines in das sphärische Dreieck eingeschriebenen Kreises.

Bezeichnet man die Winkel $AO''F$, $O''BD$, $CO''E$ mit ω_1, ω_2, ω_3, so ist:

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 180^0.$$

Da nun

$$\cos\omega_1 = \operatorname{cotg} v_1 \operatorname{tg} r \quad \text{und} \quad \cos(\omega_2 + \omega_3) = \frac{\cos a - \cos v_2 \cos v_3}{\sin v_2 \sin v_3}$$

ist, ebenfalls aber

$$\cos\omega_1 = \cos[180^0 - (\omega_2 + \omega_3)] = -\cos(\omega_2 + \omega_3),$$

so muss auch

$$\operatorname{cotg} v_1 \operatorname{tg} r = \frac{\cos v_2 \cos v_3 - \cos a}{\sin v_2 \sin v_3}$$

sein. Daraus erhält man nach einer leichten Reduktion die Gleichung:

$$\cos a = \sin v_2 \sin v_3 \operatorname{cotg} v_1 [\operatorname{tg} v_1 \operatorname{cotg} v_2 \operatorname{cotg} v_3 - \operatorname{tg} r]. \tag{57}$$

Setzt man hier $\operatorname{tg} v_1 \operatorname{cotg} v_2 \operatorname{cotg} v_3 = \operatorname{tg} \xi_1$, so übergeht die Formel in:

$$\cos a = \frac{\sin v_2 \sin v_3 \operatorname{cotg} v_1}{\cos r \cos \xi_1} . \sin(\xi_1 - r). \tag{58}$$

Nach demselben Verfahren gelangt man zu den Gleichungen:

$$\cos b = \frac{\sin v_1 \sin v_3 \operatorname{cotg} v_2}{\cos r \cos \xi_2} . \sin(\xi_2 - r), \tag{59}$$

wobei $\operatorname{tg}\xi_2 = \operatorname{tg} v_2 \operatorname{cotg} v_1 \operatorname{cotg} v_3$ ist; endlich

$$\cos c = \frac{\sin v_1 \sin v_2 \operatorname{cotg} v_3}{\cos r \cos \xi_3} . \sin(\xi_3 - r), \tag{60}$$

und hier ist $\operatorname{tg}\xi_3 = \operatorname{tg} v_3 \operatorname{cotg} v_1 \operatorname{cotg} v_2$.

Mit diesen Formeln lassen sich die drei Seiten des sphärischen Dreieckes berechnen, wenn ausser den drei winkelhalbirenden Transversalen noch der Abstand des Mittelpunktes des in das Dreieck eingeschriebenen Kreises gegeben ist.

Ist das Dreieck gleichschenklig, wobei $a = b$ wäre, so muss auch $v_1 = v_2$ sein; dann erhält man aus (57):

$$\cos a = \frac{\cos v_1}{\sin r} . \cos(v_3 - r), \tag{61}$$

und aus (60) folgt:

$$\cos c = \operatorname{cotg} v_3 [\operatorname{tg} v_3 - (1 + \operatorname{tg} r) \sin^2 v_1]; \qquad (62)$$

ebenso erhält man aus (52), (54) und (55) die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{cotg} v_1 &= \frac{1}{\sin\frac{c}{2}} \sqrt{\frac{\cos\frac{c}{2}\sin(a+\frac{c}{2})}{2\sin a}}, \\ \operatorname{cotg} v_3 &= \operatorname{cotg}(a-\tfrac{c}{2}) \sqrt{\frac{\sin(a+\frac{c}{2})\sin(a-\frac{c}{2})}{\sin a \sin c}}. \end{aligned}\right\} \qquad (63)$$

$$\operatorname{cotg} r = \frac{\sin(a+\frac{c}{2})}{\sin\frac{c}{2}\sqrt{\sin(a+\frac{c}{2})\sin(a-\frac{c}{2})}}. \qquad (64)$$

In einem gleichseitigen Dreiecke, wo $a = b = c$ ist, muss auch $v_1 = v_2 = v_3$ sein, wofür sich die zuletzt entwickelten Formeln (61), (63) und (64) in nachfolgende umwandeln:

$$\cos a = \frac{\cos v_1}{\sin r} . \cos(v_1 - r), \qquad (65)$$

$$\operatorname{cotg} v_1 = \frac{1}{2\sin^2\frac{a}{2}} \sqrt{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{3a}{2}}; \qquad (66)$$

woraus noch folgt: $\sin v_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} . \sin\frac{a}{2}$, somit $\sin v_1 : \sin\frac{a}{2} = 2 : \sqrt{3}$.

(67)

$$\operatorname{cotg} r = \frac{\sin\frac{3a}{2}}{\sin\frac{a}{2}\sqrt{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{3a}{2}}} = \frac{1}{\sin\frac{a}{2}} \sqrt{\frac{\sin\frac{3a}{2}}{\sin\frac{a}{2}}} = \frac{1}{\sin^2\frac{a}{2}} \sqrt{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{3a}{2}}.$$

Vergleicht man diese Formel mit der (66), so ist:

$$\frac{\operatorname{cotg} v_1}{\operatorname{cotg} r} = \tfrac{1}{2} \text{ oder } \operatorname{tg} v_1 = 2 \operatorname{tg} r,$$

also

$$\operatorname{tg} r : \operatorname{tg} v_1 = 1 : 2. \qquad (68)$$

Ebenso findet man leicht $\sin r = \frac{1}{\sqrt{3}} . \operatorname{tg}\frac{a}{2}$ oder

$$\sin r : \operatorname{tg}\frac{a}{2} = 1 : \sqrt{3}. \qquad (69)$$

Die Winkel ω_1, ω_2, ω_3 sind in einem gleichseitigen Dreiecke einander gleich, daher beträgt jeder 60°.

Wenn das sphärische Dreieck rechtwinklig ist, wobei $A = 90^\circ$ gesetzt, alsdann erhält man aus den früheren Formeln folgende:

$$\operatorname{cotg} v_1 = \cos\frac{A}{2} . \operatorname{cotg} m_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} . \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(b+c-a)$$

oder

$$\operatorname{tg} v_1 = \sqrt{2} . \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(b+c-a), \tag{70}$$

welches die Formel für die den rechten Winkel halbirende Transversale ist. Ebenso erhält man aus der Gleichung $\operatorname{tg} r = \operatorname{tg}\frac{A}{2} . \sin\frac{1}{2}(b+c-a)$:

$$\operatorname{tg} r = \sin \tfrac{1}{2}(b+c-a), \tag{71}$$

und aus (52) ergiebt sich ganz einfach:

$$\operatorname{cotg} r = \frac{2\sqrt{2} . \cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sqrt{-\cos(B+C)\cos(B-C)}} . \tag{72}$$

§. 4.

Vergleicht man nun alle in §. 2. und §. 3. entwickelten Gleichungen, so ergeben sich noch einige Relationen zwischen den Bestimmungsgrössen des Mittelpunktes sowohl eines eingeschriebenen, wie auch des umgeschriebenen Kreises, für dasselbe sphärische Dreieck.

Betrachtet man zuerst die Seitenabstände, sowohl des Punktes O' wie auch O'', für welche die Formeln (27) bis (29) und (55), (56) aufgestellt wurden, so erhält man aus (27) und (56) nach einer leichten Reduktion:

$$\operatorname{tg} p_1 \operatorname{cotg} r = \frac{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} . \operatorname{tg}\frac{1}{2}(B+C-A)}{\sqrt{\sin B \sin C . \cos\frac{1}{2}(A+B-C)\cos\frac{1}{2}(A+C-B)}} . \tag{73}$$

Ist das Dreieck rechtwinklig und $A = 90^\circ$, so ist:

$$\operatorname{tg} p_1 \operatorname{cotg} r = \frac{2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{B+C}{2} - 45^\circ\right)}{\sqrt{\sin B \sin C . \sin\left(45^\circ + \frac{B-C}{2}\right)}};$$

und für ein gleichseitiges Dreieck, wo also $A = B = C$ ist:

$$\operatorname{tg} p_1 \operatorname{cotg} r = \frac{2\cos^2\frac{A}{2}.\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{\sin A.\cos\frac{A}{2}} = 1,$$

folglich

$$\operatorname{tg} p_1 = \operatorname{tg} r, \tag{74}$$

oder $p_1 = r$, was für das gleichseitige Dreieck vorauszusehen war. Da nun in (68) $\operatorname{tg} v_1 = 2\operatorname{tg} r$ ist, somit muss auch $2\operatorname{tg} p_1 = \operatorname{tg} v_1$ sein.

Bezüglich der Abstände der Punkte O' und O'' von den Ecken des Dreieckes erhält man aus (35) und (52) nach einer leichten Reduktion:

$$\operatorname{tg}\varrho \operatorname{cotg} v_1 = \frac{2\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\operatorname{cotg}\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sqrt{\sin b \sin c \sin\frac{1}{2}(a+c-b)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}}. \tag{75}$$

In einem gleichseitigen Dreiecke, wo $a = b = c$ ist, ergiebt sich:

$$\operatorname{tg}\varrho \operatorname{cotg} v_1 = 1, \tag{76}$$

also $\varrho = v_1$, was für das gleichseitige Dreieck evident ist.

Bildet man das Produkt aus den Gleichungen (34) und (56), so gelangt man zu der Gleichung:

$$\operatorname{tg}\varrho \operatorname{tg} r = \frac{\cos\frac{1}{2}(A+B+C)}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}. \tag{77}$$

Ferner folgt aus der Formel (55) und (35):

$$\operatorname{tg}\varrho \operatorname{tg} r = \frac{2\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}}{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}. \tag{78}$$

Ist $a = b = c$, so folgt:

$$\operatorname{tg}\varrho \operatorname{tg} r = \frac{2\sin^2\frac{a}{2}}{\sin\frac{3a}{2}}. \tag{79}$$

Endlich sei noch $a = b = c = 90^\circ$, so ist:

$$\operatorname{tg}\varrho \operatorname{cotg} r = \sqrt{2}. \tag{80}$$

§. 5.

Verbindet man die Mittelpunkte der Seiten a, b, c des sphärischen Dreieckes ABC (Taf. VI. Fig. 11.) mit den gegenüberliegenden Ecken dieses Dreieckes, so schneiden sich bekanntlich diese Transversalen gemeinschaftlich in einem Punkte O.

Setzt man nun:

$$AD = t_1, \quad BE = t_2, \quad CF = t_3;$$

$$OD = \eta_1, \quad OE = \eta_2, \quad OF = \eta_3;$$

so auch:

$$\angle CFB = \varphi_1, \quad \angle ADC = \varphi_2, \quad \angle AEB = \varphi_3;$$

$$\angle CAD = A_1, \quad \angle CBE = B_1, \quad \angle BCF = C_1;$$

alsdann ist im $\Delta\, CFB$:

$$\cos\varphi_1 = \frac{\cos a - \cos t_3 \cos\frac{c}{2}}{\sin t_3 \sin\frac{c}{2}},$$

und im $\Delta\, AFC$:

$$\cos(180^0 - \varphi_1) = -\cos\varphi_1 = \frac{\cos b - \cos t_3 \cos\frac{c}{2}}{\sin t_3 \sin\frac{c}{2}}.$$

Durch Gleichsetzung dieser Formeln erhält man:

$$\cos a - \cos t_3 \cos\frac{c}{2} = \cos t_3 \cos\frac{c}{2} - \cos b$$

oder

$$2\cos t_3 \cos\frac{c}{2} = \cos a + \cos b,$$

mithin:

$$\cos t_3 = \frac{\cos a + \cos b}{2\cos\frac{c}{2}} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{c}{2}}; \qquad (81)$$

ebenso folgt:

$$\cos t_2 = \frac{\cos a + \cos c}{2\cos\frac{b}{2}} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a+c)\cos\frac{1}{2}(a-c)}{\cos\frac{b}{2}}, \qquad (82)$$

$$\cos t_1 = \frac{\cos b + \cos c}{2\cos\frac{a}{2}} = \frac{\cos\frac{1}{2}(b+c)\cos\frac{1}{2}(b-c)}{\cos\frac{a}{2}}. \qquad (83)$$

Mittelst diesen Gleichungen lassen sich aus den drei Seiten a, b, c die diese Seiten halbirenden Transversalen berechnen.

Ferner ergiebt sich aus den bekannten Gauss'schen Gleichungen:

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{c}{2}}=\frac{\cos\frac{c}{2}.\sin(A+B)}{\sin C},$$

und substituirt man diese Formel in (81), wobei noch anstatt $\cos\frac{c}{2}$ dessen bekannter Winkelausdruck gesetzt wird, so folgt:

$$\cos t_3=\frac{\sin(A+B)}{\sin C}\sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(B+C-A)\cos\frac{1}{2}(A+C-B)}{\sin A\sin B}}, \quad (84)$$

ebenfalls:

$$\cos t_2=\frac{\sin(A+C)}{\sin B}\sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(B+C-A)\cos\frac{1}{2}(A+B-C)}{\sin A\sin C}}, \quad (85)$$

$$\cot t_1=\frac{\sin(B+C)}{\sin A}\sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B-C)\cos\frac{1}{2}(A+C-B)}{\sin B\sin C}}. \quad (86)$$

Nun ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\sin A_1=\frac{\sin\frac{a}{2}\sin C}{\sin t_1} \quad \text{und} \quad \sin(A-A_1)=\frac{\sin\frac{a}{2}\sin B}{\sin t_1},$$

woraus folgt:

$$\sin A_1:\sin(A-A_1)=\sin C:\sin B; \quad (87)$$

auf ähnliche Art findet man:

$$\sin B_1:\sin(B-B_1)=\sin C:\sin A, \quad (88)$$

$$\sin C_1:\sin(C-C_1)=\sin B:\sin A. \quad (89)$$

Es wird daher jeder Dreieckswinkel mittelst der seitenhalbirenden Transversale in zwei solche Winkel getheilt, deren Sinusse sich zu einander so verhalten, wie die Sinusse der auf derselben Dreiecksseite mit ihnen anliegenden anderen Dreieckswinkel.

Multiplizirt man (87) mit (89) und vergleicht die so entstandene Proportion mit (88), so gelangt man zu der Gleichung:

$$\sin A_1\sin C_1\sin(B-B_1)-\sin B_1\sin(C-C_1)\sin(A-A_1)=0, \quad (90)$$

welche bloss die Relationen zwischen den Winkeln enthält, die von den Transversalen aus den Dreieckswinkeln gebildet wurden.

Aus (87) ist auch:

$$\frac{\sin(A-A_1)}{\sin A_1}=\frac{\sin B}{\sin C}$$

oder

$$\operatorname{cotg} A_1=\operatorname{cotg} A+\frac{\sin B}{\sin C}, \tag{91}$$

ebenso:

$$\operatorname{cotg} B_1=\operatorname{cotg} B+\frac{\sin A}{\sin C}, \tag{92}$$

$$\operatorname{cotg} C_1=\operatorname{cotg} C+\frac{\sin A}{\sin B}. \tag{93}$$

Sind daher die drei Winkel des Dreieckes bekannt, so kann man mit diesen Formeln auch die Winkel A_1, B_1, C_1 finden.

Es lässt sich aus den Dreiecken BOD und OAE sehr einfach die Gleichung

$$\frac{\sin(t_1-\eta_1)}{\sin\eta_1}=\frac{\sin\frac{b}{2}\sin\varphi_3}{\sin\frac{a}{2}\sin B_1}$$

ableiten; da jedoch $\sin\varphi_3=\frac{\sin a\sin B}{\sin\frac{b}{2}}$ ist, so wird auch:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\sin(t_1-\eta_1)}{\sin\eta_1}&=2\cos\frac{a}{2},\\ \frac{\sin(t_2-\eta_2)}{\sin\eta_2}&=2\cos\frac{b}{2},\\ \frac{\sin(t_3-\eta_3)}{\sin\eta_3}&=2\cos\frac{c}{2}.\end{aligned}\right\} \tag{94}$$

Aus diesen Gleichungen erhält man leicht folgende:

$$\operatorname{cotg}\eta_1=\frac{\cos t_1+2\cos\frac{a}{2}}{\sin t_1}, \tag{95}$$

$$\operatorname{cotg}\eta_2=\frac{\cos t_2+2\cos\frac{b}{2}}{\sin t_2}, \tag{96}$$

$$\operatorname{cotg}\eta_3 = \frac{\cos t_3 + 2\cos\frac{c}{2}}{\sin t_3}. \tag{97}$$

Endlich ergiebt sich noch:

$$\frac{\sin\eta_1}{\sin\eta_2} = \frac{\sin t_1}{\sin t_2}, \quad \frac{\sin\eta_1}{\sin\eta_3} = \frac{\sin t_1}{\sin t_3}, \quad \frac{\sin\eta_2}{\sin\eta_3} = \frac{\sin t_2}{\sin t_3}. \tag{98}$$

Ist das Dreieck gleichschenklig, so verwandeln sich ganz einfach die hier entwickelten Formeln in nachstehende, wenn $a = b$ gesetzt wird:

$$\cos t_3 = \frac{\cos a}{\cos\frac{c}{2}}, \quad \cos t_2 = \cos t_1 = \frac{\cos a + \cos c}{2\cos\frac{a}{2}}, \tag{99}$$

ebenfalls

$$\sin C_1 : \sin(C - C_1) = \sin A : \sin A,$$

daher

$$C_1 = C - C_1,$$

mithin fällt die basishalbirende Transversale mit dem zur Basis gehörigen Perpendikel zusammen. Weiter ist auch aus (93):

$$\operatorname{cotg} C_1 = 1 + \operatorname{cotg} C = \frac{\sqrt{2}.\sin(45^0 + C)}{\sin C}.$$

Wenn aber $a = b = c$ ist, so folgt aus den obigen Formeln ganz einfach:

$$\cos t_1 = \cos t_2 = \cos t_3 = \frac{\cos a}{2\cos\frac{a}{2}} = \frac{\cos A}{\sin\frac{A}{2}}. \tag{100}$$

Endlich ergiebt sich für ein rechtwinkliges Dreieck, wenn etwa $A = 90^0$ gesetzt wird, da $\cos a = \cos b \cos c$ ist:

$$\cos t_3 = 2\cos b\cos\frac{c}{2}, \quad \cos t_2 = 2\cos c\cos\frac{b}{2}, \tag{101}$$

welches die Gleichungen sind für die Transversalen den Katheten angehörig. Ebenso ist

$$\operatorname{tg} A_1 = \frac{\sin C}{\sin B}.$$

Ist noch $a = b = c = 90^0$, so ist offenbar auch $t_1 = t_2 = t_3 = 90^0$ und $\operatorname{cotg}\eta_1 = \sqrt{2}$.

XXVI.
Miscellen.

Nachstehende Notiz ist mir zur Veröffentlichung zugesandt worden. G.

New Orleans, February 16, 1856.

The undersigned would respectfully invite the attention of experimentors to the following

Interesting electrical experiment.

From the conductor of an electrical machine suspend by a wire, or chain, a small metallic ball (one of wood covered with tin-foil), and under the ball place a rather wide metallic basin containing some oil of turpentine, at the distance of about ¾ inch. If the handle of the machine be now turned slowly, the liquid in the basin will begin to move in different directions, and form whirlpools. As the electricity on the conductor accumulates, the troubled liquid will elevate itself in the centre, and, at last, become attached to the ball. Draw off the electricity from the conductor to let the liquid resume its position: a portion of the turpentine remains attached to the ball. Turn the handle again very slowly, and observe now the few drops adhering to the ball assume a conical shape with the apex downwards, while the liquid under it assumes also a conical shape, the apex upwards, until both meet. As the liquid does not accumulate on the ball, there must necessarily be as great a current downwards as upwards, giving the column of liquid a rapid circular motion, which continues until the electricity from the conductor is nearly all discharged, silently, or until it is discharged by a spark descending into the liquid. The same phenomena take place with oil or water. Using the latter liquid, the ball must be brought much nearer, or a much greater quantity of electricity is necessary to raise it.

Those who had occasion to observe the sublime phenomenon of a water-spout, will at once perceive in this experiment a faithful minature representation of the gradual formation, progress, and breaking up of that grand phenomenon.

If, in this experiment, we let the ball swing to and fro, the little water-spout will travel over its minature sea, carrying its whirlpools along with it. When it breaks up, a portion of the liquid, and with it anything it may contain, remains attached to the ball. The fish, seeds, leaves, etc. etc., that have fallen to the earth in rain squalls, may have owed their elevation to the clouds to the same cause that attaches a few drops of the liquid, with its particles of impurities, to the ball.

It is well known that water-spouts generally form on hot summer days in southern climates, and in so-called, dead calms; they never form on rainy days, nor in windy weather. If, in our experiment, we blow upon the surface of the liquid, the discharge of the electricity from the ball is thereby so much facilitated, as

to prevent the elevation of the liquid entirely, or, at least, to retard it very much. By holding a pointed conductor near the liquid, the elevation of it is entirely prevented. It seems not a forced deduction that lightning-rods, and not the firing of cannon are the proper safeguards against the formation and the disastrous effects of water-spouts. When we contemplate the effects of electrical attraction on liquids, our attention is naturally drawn to its effects with regard to gases, and especially atmospheric air. The nonconducting air will, like other fluids, be attracted, electrified, and repelled, to seek its dissimilar electricity, giving rise to currents and counter-currents, and at the electrical machine, to the phenomenon known as the electrical wind, whilst by the operation of the grand electrical machine of the clouds, it produces those fearful and destructive currents known as whirlwinds and tornados.

The table lands of Mexico are never wetted by rain, and but very sparingly by dew. It is in these elevated and dry regions that whirlwinds are most frequent. Water-spouts and whirlwinds seem to be the lightning-rods that nature constructs to afford to the electricity of the clouds a passage to the earth.

Dr. M. F. Bonzano.

Beweise für den Pythagoräischen Lehrsatz.

Von Herrn Hofrath Marx in Braunschweig.

1. Das $\triangle ABC$ (Taf. IV. Fig. 8.) sei an B rechtwinklig. Man lege an A ein Loth AD zu AC und verlängere dasselbe bis es die verlängerte BC in D trifft. Dann ist $DC:AC=AC:BC$, und also

$$\overline{AC}^2=DC\times BC=\overline{BC}^2+DB\times BC.$$

Setzt man hier $\overline{AB}^2$ für $DB\times BC$ an den Platz, so ist

$$\overline{AC}^2=\overline{BC}^2+\overline{AB}^2.$$

2. Das $\triangle DAC$ sei an A rechtwinklig und AB ein Loth von A auf DC. Dann ist

$$\overline{AC}^2=DC\times BC=\overline{BC}^2+DB\times BC,$$

$$\overline{AD}^2=DC\times DB=\overline{DB}^2+DB\times BC,$$

folglich $\overline{AC}^2+\overline{AD}^2=\overline{DB}^2+2DB\times BC+\overline{BC}^2=(DB+BC)^2=\overline{DC}^2.$

Berichtigung.

Thl. XXVIII. S. 117. muss die rechte Seite der Gleichung (15) nicht $-a$, sondern $-a(1-\cos\varphi)$ heissen.

Thl. XXVIII. S. 341. muss der Aufsatz „Uebungsaufgaben" mit XVIII. a. bezeichnet werden, da der vorhergehende Aufsatz aus Versehen auch Nr. XVIII. erhalten hat.

Fig. 3.

Kerz.

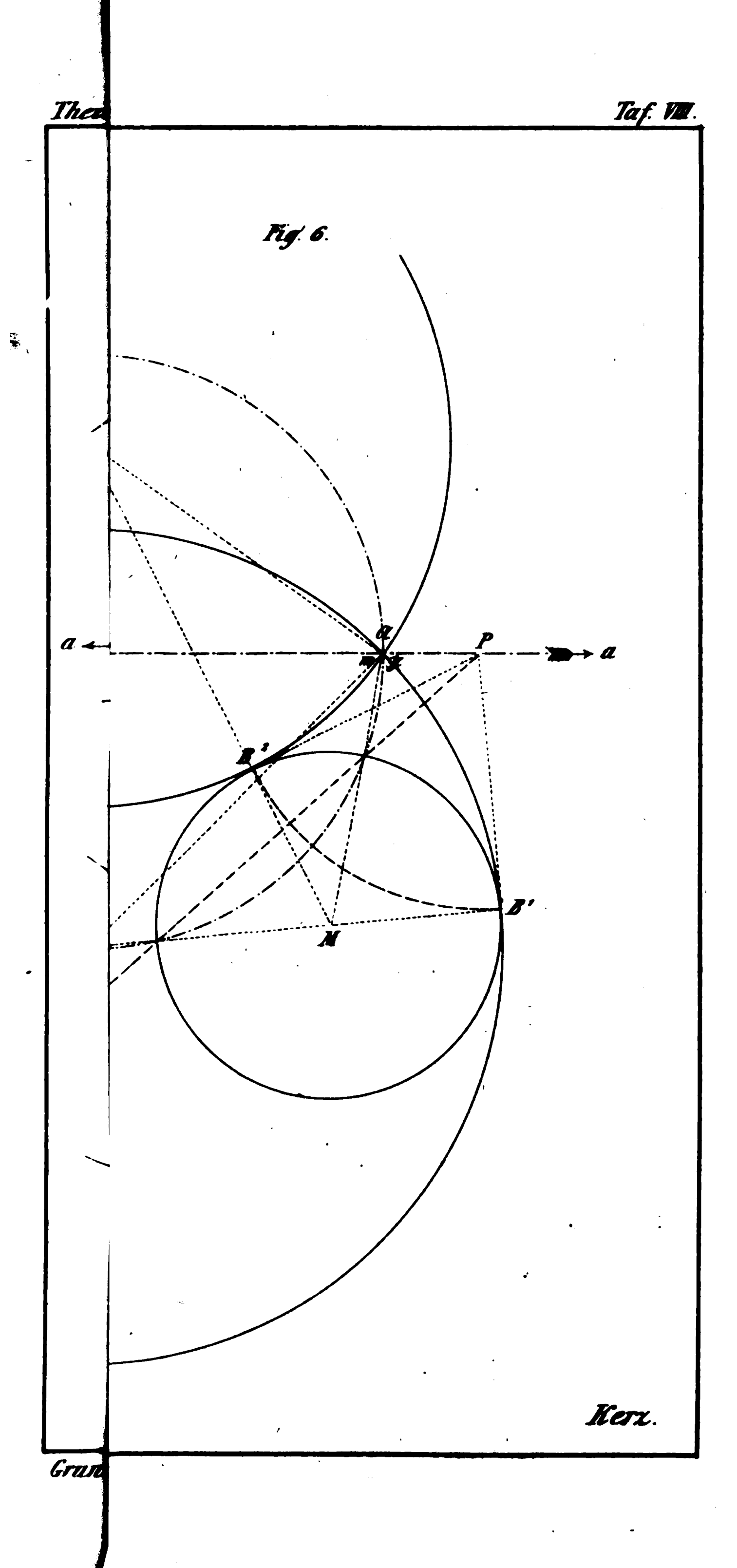


Fig. 6.
a
a
P
a
B²
B'
M
Kerz.

Fig. 9.

a′ a a a P m M′ B B‴ O O″ p

Kerz.

Fig. 12.

p
p I''
p
p'
a'
p'
p''
M'
p I
p
p I''
N
m'
a'
γ
m''
p I
p
a
P''
γ
a
m²

Kerz.

Literarischer Bericht
CX.

Arithmetik.

Georg's Freiherrn von Vega Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch. Vierzigste Auflage. Neue vollständig durchgesehene und revidirte Stereotyp-Ausgabe. Bearbeitet von Dr. C. Bremiker. Berlin. Weidmann. 1856. 8. 1 Thlr. $7\frac{1}{2}$ Sgr.

Als wir im Literar. Ber. Nr. I. die von Herrn Hülsse besorgte neue Ausgabe der „Sammlung mathematischer Tafeln von Vega" anzeigten, bemerkten wir auf S. 4: „Wir bedauern sehr, dass der Herausgeber nicht durch den ganzen Quadranten die Winkel von 10 zu 10 Secunden, wie z. B. in den Callet'schen Tafeln, hat fortschreiten lassen. Wäre dies der Fall, so würden wir seine Tafeln allen übrigen vorziehen"; und wir haben bei allen neuen Ausgaben namentlich auch des „Vega'schen Handbuchs" wiederholt lebhaft bedauert, dass diese von uns schon im Jahre 1840 gemachte Bemerkung bisher ganz unberücksichtigt geblieben, und bei den Tafeln von Vega bisher immer ihre alte und veraltete Einrichtung beibehalten worden ist. Wer wirklich trigonometrische Rechnungen mit Eleganz, Schärfe und Genauigkeit zu führen versteht, eine Fertigkeit, die keineswegs so häufig gefunden wird, wie Mancher wohl glaubt; wem bei diesen Rechnungen immer die Regel vorschwebt, die Gauss sich zur Richtschnur gemacht hatte, jede Rechnung, so klein oder so gross sie auch sein mochte, so scharf zu führen, als es die vorhandenen

Hülfsmittel irgend gestatteten*): der wird sich wohl selbst sagen müssen, dass von 10 zu 10 Secunden fortschreitende trigonometrische Tafeln ein so wichtiges Hülfsmittel zur Erleichterung und zur Erhöhung der Genauigkeit aller betreffenden Rechnungen sind, dass man es geradezu für eine Sünde halten muss, dass man namentlich auch der Jugend bei'm Unterrichte in der Trigonometrie dieses so ungemein wichtige Hülfsmittel mit einem schwer begreiflichen Festhalten an dem Alten und Veralteten in Deutschland bis jetzt vorenthalten hat. Denn in Frankreich z. B. wird seit länger als funfzig Jahre kaum noch eine andere als die treffliche von 10 zu 10 Secunden fortschreitende Callet'sche Tafel**), die bekanntlich auch die erste Veranlassung zur Erfindung der Stereotypen durch Firmin Didot gab, gebraucht, namentlich auch von den Seeleuten und allen übrigen Praktikern. Seit dem Jahre 1840, insbesondere bei dem Anblick jeder von Herrn Hülsse besorgten neuen Ausgabe des guten alten Vega, haben wir Betrachtungen wie die obigen über unser liebes deutsches Vaterland und den mathematischen Unterricht auf dessen Lehranstalten oft angestellt, und wurden daher in der freudigsten und angenehmsten Weise überrascht, als ganz unverhofft die von Herrn Doctor Bremiker in Berlin besorgte vierzigste Auflage des Vega'schen Handbuchs vor Kurzem in unsere Hände gelangte. Jedenfalls hat die ausgezeichnete Verlagshandlung in Herrn Doctor Bremiker ganz den richtigen Mann getroffen, der eine solche Arbeit zu machen verstand, und wir gratuliren Allen, die sich mit trigonometrischen Rechnungen zu beschäftigen haben, und namentlich auch allen höheren Lehranstalten, wahrhaft zu dem trefflichen Geschenk, welches Herr Doctor Bremiker denselben mit dieser neuen Ausgabe des Vega'schen Handbuchs gemacht hat, und bedauern nur lebhaft, dass dies nicht schon weit früher geschehen ist. Alle Vorzüge, welche diese mit Recht dem preussischen Minister für Handel, Gewerbe und öffentliche Arbeiten, Herrn von der Heydt Excellenz, der sich bekanntlich durch Förderung und Veranlassung vieler die Verbesserung des mathematischen Unterrichts auf praktischen Lehranstalten bezweckender wissenschaftlicher Arbeiten schon so sehr verdient gemacht hat, gewidmeten neuen Tafeln vor allen älteren anzugeben, würde hier zu weit füh-

*) M. s. Literar. Ber. Nr. CIV. S. 2. in der Anzeige der hübschen Schrift: Gauss zum Gedächtniss von W. Sartorius v. Waltershausen.

**) Die erste Ausgabe wird vom Jahre 1795 sein. Die uns vorliegende Ausgabe trägt wenigstens diese Jahreszahl mit dem Beisatze: „Tirage 1829.“

ren, und ist auch unnöthig, da das den Tafeln vorausgeschickte Vorwort und die Einleitung zu denselben darüber alle erforderliche Auskunft geben. Wir begnügen uns daher mit folgenden Bemerkungen. Der wichtigste Vorzug ist unstreitig der, dass in der ganzen trigonometrischen Tafel die Winkel von 10 zu 10 Secunden fortschreiten. Wie sehr dadurch die Berechnung der Proportionaltheile erleichtert wird, wird wohl Jeder wissen, wer nur einmal eine trigonometrische Rechnung mit solchen Tafeln gemacht hat. Durch die Bremiker'sche Tafel ist aber die Mühe, welche diese Berechnung macht, geradezu fast auf Null reducirt, nämlich dadurch, dass Herr Doctor Bremiker noch kleine Multiplicationstäfelchen beigefügt hat, welche die auszuführenden Multiplicationen in hohem Grade erleichtern, Alles zugleich in solcher Weise, dass die höchste mit Tafeln von sieben Decimalstellen überhaupt zu erreichende Genauigkeit auch wirklich erreicht wird. Für das Intervall von 0° bis 4° schreiten die Winkel durch die einzelnen Secunden fort. Aber nicht bloss die trigonometrische Tafel, sondern auch die Tafel der Logarithmen der Zahlen hat vor den älteren Tafeln mancherlei Vorzüge, in welcher Beziehung wir nur hervorheben wollen, dass die Bremiker'schen Logarithmentafeln bei ziemlich weitläufigen astronomischen Rechnungen, die wir mit Hülfe derselben kürzlich auszuführen Gelegenheit gehabt haben, uns nie über die bei Berechnung der Proportionaltheile zu nehmende Differenz in Zweifel gelassen haben, was in den älteren Vega'schen Tafeln leider so häufig der Fall ist. Eine kleine Tafel zur Verwandlung der natürlichen Logarithmen in gemeine, und umgekehrt; Tafeln zur Verwandlung der Sternzeit in mittlere Zeit, und umgekehrt; Tafeln der astronomischen Refraction; und ein sehr werthvolles Verzeichniss der in der reinen Mathematik, Geographie und Astronomie zur Anwendung kommenden Constanten, welches wir im Interesse der Gymnasien, Real- und Gewerbschulen gern noch mit den wichtigsten physikalischen Constanten, die in der gewiss bald erscheinenden 41sten Ausgabe noch nachzutragen sein dürften, vermehrt gesehen hätten, sind beigefügt. In dem Vorwort hat der Herr Herausgeber sich in lehrreicher Weise über die früheren Ausgaben logarithmisch-trigonometrischer Tafeln und deren verschiedene Vorzüge verbreitet. Wir erlauben uns, dazu nur zu bemerken, dass die von William Gardiner bearbeitete dritte Ausgabe der schönen Sherwin'schen Tafeln nicht vom Jahre 1741, wie die Meinung des Vorworts zu sein scheint, sondern vom Jahre 1742 und zugleich die correcteste Ausgabe dieser schönen Tafeln ist, da die im Jahre 1770 von Clark besorgte fünfte und letzte Ausgabe sehr fehlerhaft gedruckt sein soll. Die gleichfalls in unserem Besitze befindliche grosse und prächtige

Gardiner'sche Tafel in Quart, die, wie wir vor langer Zeit einmal in des bekannten früheren Berliner Astronomen Johann Bernoulli astronomischen Briefen gelesen zu haben glauben, von der Berliner Sternwarte schon zu damaliger Zeit zu einem ungemein hohen Preise erstanden wurde, ist gleichfalls vom Jahre 1742, wie auch das Vorwort richtig angiebt, und die schöne Avignon'sche Ausgabe derselben vom Jahre 1770, wobei wir nur bemerken wollen, dass man selbst in Frankreich zugiebt, dass diese letztere Ausgabe nicht so correct sei wie die englische; die in den ersten vier Geraden beigefügten logarithmischen Sinus und Tangenten für die einzelnen Secunden sind in derselben von Mouton berechnet, der sonstige Herausgeber hat sich aber nicht genannt. — Druck und Papier sind ganz den neueren Ansprüchen, welche man jetzt an die Ausgaben solcher Tafeln macht, gemäss, und der frühere sehr geringe Preis von 1 Thlr. $7\frac{1}{2}$ Sgr. ist nicht erhöht worden. — Sollen wir nun hiernach noch Etwas zur besonderen Empfehlung dieser trefflichen Tafeln hinzufügen? Gewiss nicht. Aber wünschen wollen wir, dass namentlich bei dem mathematischen Unterrichte auf Schulen der bisherige Schlendrian bei dem Gebrauche der älteren Tafeln endlich aufhöre, und diese neuen ausgezeichneten Tafeln unverzüglich Eingang finden. Wir wünschen dies; ob wir es aber auch in der erforderlichen Ausdehnung hoffen dürfen, müssen wir nach den bisherigen Erfahrungen sehr dahin gestellt sein lassen. Daher wünschen wir, dass auch die höheren Unterrichtsbehörden das Ihrige thun mögen, um der trefflichen Bremiker'schen Tafel recht bald möglichst allgemein Eingang zu verschaffen. G.

Geometrie.

R°. Instituto Tecnico di Torino. Sui principii geometrici de Disegno e specialmento dell' axonometrico dalle lezioni di Geometria applicate alle arti di **Quintino Sella**.

Dieses lithographirte und deshalb wohl nicht in den Buchhandel gekommene Memoire über die Principien des geometrischen Zeichnens, welches, wie es scheint (m. s. pag. 1.), dem Unterrichte auf dem Königlichen technischen Institute zu Turin zur Grundlage dient, scheint uns sehr zu verdienen, in einem weiteren Kreise bekannt zu werden; denn dasselbe enthält in sehr bündiger Kürze eine sehr deutliche, ganz elementare Darstellung der

wichtigsten Arten des geometrischen Zeichnens, theils bloss mit Hülfe der synthetischen Geometrie, theils, wo es die grössere Kürze gebot, mit Hülfe der analytischen Geometrie. Alles, was zur erfolgreichen praktischen Anwendung erforderlich ist, ist nach unserer Meinung in diesem Memoire enthalten, und an erläuternden Beispielen fehlt es in demselben gleichfalls nicht, weshalb wir dieser Schrift wohl eine Uebertragung in's Deutsche wünschen möchten, da wir dieselbe, wie gesagt, namentlich sehr zweckmässig für Praktiker halten, um in möglichst kurzer Zeit eine genügende Uebersicht der verschiedenen Arten der graphischen Darstellung zu gewinnen. Um dieses unser Urtheil näher zu begründen, geben wir im Folgenden eine Uebersicht der einzelnen Hauptabschnitte: **Parte 1a. Determinazione della forma e posizione di un corpo.** Capo 1°. Posizione di un punto sovra un piano. Capo 2°. Posizione di un punto o di un corpo nello spazio. **Parte 2a. Disegno dei corpi delle cui linee e delle cui superficie si conosce la posizione e la forma.** Capo 1°. Piani quotati. Capo 2°. Geometria descrittiva. Capo 3°. Prospettiva. Capo 4°. Disegno axonometrico. Diese zweite Abtheilung ist mit besonderer Sorgfalt, Deutlichkeit und bündiger Kürze behandelt, im vierten Kapitel mit sehr zweckmässiger Anwendung einiger allgemein bekannten Formeln der analytischen Geometrie, und erläutert durch die Darstellungen einiger Maschinen, insbesondere auch eines Planimeters. Wir glauben nicht, dass man alle oben genannten Methoden der graphischen Darstellung an einem anderen Orte zusammen so kurz und deutlich, aber hinlänglich ausführlich für die praktische Anwendung, erläutert findet, wie in diesem verdienstlichen Memoire des Herrn Quintino Sella, weshalb wir dasselbe zur Beachtung wiederholt empfehlen.

Physik.

Chronologischer Katalog der Nordlichter bis zum Jahre 1856, sammt einer Bibliographie über diese Erscheinung. Von Dr. **Ami Boué**, wirklichem Mitgliede der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien. Aus dem Octoberhefte des Jahrgangs 1856 der Sitzungsberichte der mathematisch-naturw. Klasse.

Dieser chronologische Katalog der Nordlichter bis zum Jahre 1856 ist jedenfalls eine äusserst verdienstliche Arbeit, für welche

die Wissenschaft dem Herrn Verfasser zu Dank verpflichtet ist, wenn man namentlich bedenkt, wie unendliche Mühe die Anfertigung desselben gemacht haben muss, und welche Unzahl der verschiedenartigsten Schriften der Herr Verfasser dabei einzusehen genöthigt war. Deshalb halten wir uns für verpflichtet, einen Jeden, wer sich für die Erscheinungen des Nordlichts besonders interessirt oder sich der weiteren Ausbildung der Theorie dieses so überaus merkwürdigen Phänomens zu widmen gedenkt, auf diesen vom Jahre 500 v. Chr. Geb. bis zum Jahre 1856 reichenden, mit der kleinsten Nonpareil-Schrift auf 74 Seiten in gross Octav gedruckten Katalog dringend aufmerksam zu machen, für dessen Publication wir im Namen der Wissenschaft dem Herrn Verfasser nochmals unsern Dank aussprechen.

Vermischte Schriften.

Annali di scienze matematiche e fisiche, compilati da Barnaba Tortolini. (Vergl. Literarischer Bericht Nr. CVI. S. 9.)

Agosto 1856. Calcul des expressions générales, qui donnent la valeur des divers éléments de la parabole. Par Georges Dostor. (Continuazione e fine.) p. 289. — Teoremi intorno all' attrazione di alcune superficie, e solidi omogenei sopra un punto materiale situato sul loro asse. Nota di B. Santini. p. 293. — Sul principio di reciprocità nella teoria delle forme. Nota di F. Brioschi. p. 304. — Sopra i resti di Sturm. Nota di F. Faà di Bruno. p. 314. — Moto del doppio cono lungo due direttrici rettilinee poste in piani verticali tra loro convergenti. Nota di Mattia Azzarelli. p. 318.

Settembre 1856. Moto del doppio cono lungo due direttrici rettilinee poste in piani verticali tra loro convergenti. Nota di Mattia Azzarelli. (Continuazione e fine.) p. 321. — Sur l'induction électrostatique. Troisième lettre de M. P. Volpicelli à M. Regnault. p. 335. — Elogio di Carlo Gustavo Jacob Jacobi. Traduzione dal Tedesco di G. Novi. p. 342.

Ottobre 1856. Elogio di Carlo Gustavo Jacob Jacobi. Traduzione dal Tedesco di G. Novi. (Continuazione e fine.) p. 369. — Sulla quadratura della superficie parallela ad una superficie di

quest' ordine conosciuta sotto il nome di superficie di elasticità. Memoria di B. Tortolini. p. 378. — Lettre de Mr. le Professeur J. J. Sylvester à le Redacteur. p. 398.

Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien. (Siehe Literarischer Bericht Nr. CVI. S. 10.)

Jahrgang 1856. Band XX. Heft 2 und 3. Littrow: Drei Quellen über den Kometen von 1556. S. 301. — Reslhuber: Ueber Professor Stampfer's Lichtpunkt-Mikrometer im Fernrohre des Meridiankreises der Sternwarte zu Kremsmünster. S. 314. — Stampfer: Zusatz zu vorstehender Abhandlung. S. 327. — Kreil: Ueber die Bestimmung der Seehöhe aus dem beobachteten Luftdrucke. S. 353. — Stark: Ueber die Methode des Doppeltsprechens in derselben Richtung auf einem Drahte. S. 531. — Belli: Ueber das am 22. März zu Pavia beobachtete Meteor. S. 540. — Härtenberger: Bestimmung analytischer Gleichungen für die Seiten von Kegelschnitts-Vielecken und Anwendung derselben. S. 541.

Jahrgang 1856. Band XXI. Heft 1. Struve: Ueber die Breitengradmessung zwischen der Donau und dem Eismeer. S. 3. — Oeltzen: Nachweis des Vorkommens von Sternen aus den Argelander'schen nördlichen Zonen in anderen Quellen. S. 19. — Ebner: Ueber die Anwendung der Reibungs-Electricität zum Zünden von Sprengladungen. S. 85. — Kreil: Erste Ergebnisse der magnetischen Beobachtungen in Wien. S. 157. — Fialkowski: Rotation ohne Grundriss. S. 181.

Jahrgang 1856. Band XXI. Heft 2. Zantedeschi: Del moto rotatorio dell' arco luminoso dell' elettromotore voltiano. S. 236. — Zantedeschi e Borlinetto: Delle differenze che intercedono fra gli effetti prodotti dalla luce e dal calorico sopra i cloruri e joduri d'argento. S. 243. — Reslhuber: Untersuchungen über das atmosphärische Ozon (sehr interessant). S. 351. — Allé: Opposition der Calliope im Jahre 1857. S. 379. — Winkler: Neue Theoreme zur Lehre von den bestimmten Integralen (sehr beachtenswerth). S. 389. — Grailich: Ueber eine Mittheilung Professor A. Beer's, die graphische Darstellung der Amplituden- und Phasen-Verhältnisse der Reflexion geradlinig polarisirten Lichtes enthaltend. Auf Veranlassung des Herrn Sectionsrathes W. Haidinger. S. 427. — Brücke: Object-Träger von Canarienglas. S. 430. — Pohl: Ueber die Ver-

wendbarkeit des **Mitscherlich**'schen Polarisations-Saccharimeters zu chemisch-technischen Proben. S. 492. — **Zantedeschi** e **Borlinetto**: Della irradiazioni chimiche, e della necessità del loro foco separato da quello delle irradiazioni calorifiche e luminose al conseguimento della purezzo e perfezione delle prove fotografiche negative ottenute coi ioduri d'argento. S. 521. — **Heger**: Ueber die Auflösung eines Systems von mehreren unbestimmten Gleichungen des ersten Grades in ganzen Zahlen, welche eine grössere Anzahl von Unbekannten in sich schliessen, als sie zu bestimmen vermögen. (Sehr beachtenswerth.) S. 550.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

X.

Geometrie.

W. Wedemann, Das Unentbehrlichste und Interessanteste aus der Längen-, Flächen- und Körperrechnung. (Lehrerbuch.) 3. Aufl. 8°. $7\frac{1}{2}$ Ngr.

W. Wedemann, Fragen und Aufgaben aus der Raumlehre. (Schülerbuch.) 4. Aufl. 8°. Weimar. 5 Ngr.

Geodäsie.

Fr. Müller, Tabellen der wirklichen Längen der Sinuse und Cosinuse für den Halbmesser von 1 bis 10 Klafter. Entworfen und berechnet. Wien. Fol. 20 Ngr.

Praktische Mechanik.

Ch. Armengaud jun., L'Ouvrier mécanicien. Guide de mécanique pratique etc. 5. edit. In-12. avec 4 pl. Paris. 4 fr.

Astronomie.

Annuario del Reale Osservatorio di Napoli per l'anno 1857 o sia Almanaco annuale, che contiene inoltre particolari tavole utili e necessarie alla Nautica, Gnomonica, Geographia e scienze affini. 8°. Neapel.

A. F. Dittmann, Die Erde ein Himmelskörper. Ein kritischer Hinblick auf die Geschichte und Wissenschaft der Astronomie. gr. 8°. geh. Kiel. 1 Thlr.

E. Flashar, Ob die astronomische Weltanschauung der christlichen widerspricht? Ein Vortrag. gr. 8°. Berlin. geh. $\frac{1}{6}$ Thlr.

Gst. Adf. Jahn, General-Register der Bände 21 bis 40 der astronomischen Nachrichten. Hamburg. 6 Thlr.

C. Moesta, Informe sobre las observaciones hechas durante el eclipse solar de 30 de Noviembre de 1853, presentado al Sennor Ministro de Instruccion pública. Santiago de Chile, 1854. 4°. Mit 1 Taf.

Physik.

Annalen der Physik und Chemie. Herausgegeb. von J. C. Poggendorff. 100—102. Bd. od. Jahrg. 1857. No. 1. gr. 8°. Leipzig. Preis für den Jahrg. 9 Thlr. 10 Ngr.

P. Ant. Cap, Études biographiques pour servir à l'histoire des sciences. Première série. Chimistes — Naturalistes. Paris, 1857. 8⁰. 1 Thlr.

Paracelse. — Bernard Palissy. — Pierre Belon. — Nic. Houël. — Van Helmont. — Moïse Charas. — Robert Boyle. — Nic. Lémery. — Rouelle aîné. — Van Mons. — Labarraque. — Bernard Courtois. — Al. Dupasquier. — Benj. Delessert. — M. Bonafous, etc.

C. Gst. Carus, Ueber Lebensmagnetismus und über die magischen Wirkungen überhaupt. Leipzig. 8⁰. 1 Thlr. 15 Ngr.

Allgemeine Encyklopädie der Physik. Bearb. von C. W. Brix, G. Decher, F. C. O. v. Feilitzsch, F. Grashof, F. Harms etc. Herausg. von Gst. Karsten. 2. Lief. Leipzig. 8⁰. 2 Thlr. 20 Ngr.

Inhalt: 2. Bd. Krystallographie, von H. Karsten. p. 49—96. Mit eingedr. Holzschn. — 5. Bd. Angewandte Mechanik, von F. Grashof. p. 1—128. Mit eingedr. Holzschn. u. 1 Kpfrtaf. — 19. Bd. Fernewirkungen des galvanischen Stroms, von F. v. Feilitzsch. p. 1—80. Mit eingedr. Holzschn. u. 2 Kpfrtaf.

J. Gavarret, Traité d'électricité. Tome I., avec 280 figures dans le texte. In-18 jésus. Paris. 8 fr.

J. Müller, Lehrbuch der Physik und Meteorologie. Theilweise nach Pouillet's Lehrbuch der Physik selbstständig bearbeitet. 5. Aufl. 1. Bd. 5. u. 6. Lief. gr. 8⁰. geh. Braunschweig. à ⅓ Thlr.

Fr. v. Schwind, Der Wasserdampf. Mit 32 Tabellen. Wien und Leipzig. 8⁰. 20 Ngr.

D. M. Warren, System of Physical Geography: containing a Description of the Natural Features of the Land and Water, the Phenomena of the Atmosphere, and the Distribution of Vegetable and Animal Life: to which is added a Treatise on the Physical Geography of the United States. With numerous engravings, maps and charts, drawn expressly for this work by James H. Young. 4⁰. Philadelphia and London. half-bound. 7 s. 6 d.

Vct. Weber, Licht und strahlende Wärme in ihren Beziehungen zu einander mit Rücksicht auf die Identitätstheorie, zugleich als Einleitung in die Wellentheorie des Aethers dargestellt. Mit 5 lith. Taf. Berlin. 8⁰. 1 Thlr. 10 Ngr.

Vermischte Schriften.

Abhandlungen der k. Sächs. Gesellsch. der Wissenschaften. V. Bd. A. u. d. T.: Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe etc. III. Bd. hoch 4⁰. geh. Leipzig. 6 Thlr. 12 Ngr.

Literarischer Bericht
CXI.

Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

Mathematisches Wörterbuch. Alphabetische Zusammenstellung sämmtlicher in die mathematischen Wissenschaften gehörender Gegenstände in erklärenden und beweisenden, synthetisch und analytisch bearbeiteten Abhandlungen. Von Ludwig Hoffmann, Baumeister in Berlin. Verlag von Gustav Bosselmann in Berlin. 1857. 8. (Erstes Heft. α bis Antikaustische Linie.)

Eine so schwache Production, wie sie in Bezug auf das Ziel, welches das Buch sich selbst zu stecken scheint, auf dem Felde der mathematischen Literatur uns seit lange nicht zu Gesicht gekommen ist, und derselben, namentlich dem Auslande gegenüber, wenn dieses irgendwie davon Notiz nehmen sollte, was wir übrigens weder hoffen noch wünschen, keineswegs zur Ehre gereichen kann. Man lese z. B. den so ungemein wichtigen Artikel: „Algebraische Gleichung." Kein Wort von dem Fundamentalsatze der Algebra, ohne den jede Gleichungstheorie nichts ist; von dem Verhalten der Wurzeln zu den Coefficienten der Gleichung; von dem Newton'schen Satze; von der Anzahl der reellen und imaginären Wurzeln, dass nämlich die letzteren immer nur in gerader Anzahl und paarweise vorhanden sein können; kein Wort über den Satz von Harriot oder Decartes über das Verhalten der Anzahl der positiven und negativen reellen Wurzeln zu den Zeichenfolgen und Zeichenwechseln in der Function der Gleichung; kein Wort über den herrlichen Satz von Sturm; über Fourier's, Gräffe's und Anderer Auflösungsmethoden der höheren Gleichungen, u. s. w. u. s. w. Also nichts, was eine Einsicht in die eigentliche Natur der algebraischen Gleichungen gewährt. Dagegen die allertrivialsten Dinge, die berühmten Courier-Aufgaben, die Aufgabe über die beiden Bomben werfenden Artilleristen u. s. w. aus Meier-Hirsch, und dergleichen Schulfuchsereien mehr, die an sich und für ihren Zweck ganz gut sind, aber nur nicht den fast alleinigen Inhalt eines solchen Artikels ausmachen können und dürfen. Oder man muss sich, wie wahrscheinlich dieses Wörterbuch, Schul-

knaben oder Handwerksburschen als sein Publikum denken. Nun lese man aber namentlich die astronomischen Artikel und staune!! Bei der völligsten Unkenntniss der Astronomie als Wissenschaft, und theilweise sehr unklaren Vorstellungen, geben diese durchweg nichts mehr und nichts weniger, als die allergemeinsten populären astronomischen Schriften, worunter wir freilich nicht die trefflichen Werke dieser Art von Littrow, Lamont, Pontecoulant, Quetelet, u. s. w. rechnen, die mit diesem Wörterbuche keine Gemeinschaft haben und haben mögen. Dabei kommen aber doch auch manche philosophisch sein- und scheinen sollende Redensarten vor. Wenigstens klingt z. B. der Artikel: „Angewandte Mathematik" in der That sehr philosophisch, indem derselbe in seinem ersten Theile also lautet: „Während die reine Mathematik in ihrem arithmetischen Theile die Einheit und die Vielheit, in ihrem geometrischen Theile die Ausdehnung im Raume zu Elementen aller ihrer Untersuchungen und Erkenntnisse hat, so sind für die a. M. ebenfalls zwei Elemente, auf welche die Erkenntnisse der reinen Mathematik übertragen werden: 1) das Belebende und Bewegende der Natur, die Kraft, und 2) das Leidende, das Raum-Erfüllende, der Stoff, an welchem die Kräfte ihre Wirkungen ausüben." — Fürchteten wir nicht, mit solcher Miserabilität zu viel Raum zu verschwenden, so hätten wir über diese letztere hohle Phrase sehr Viel zu sagen. Bei aller dieser Philosophie versteht der Herr Verfasser aber noch nicht die Benennung der dem rechten Winkel gegenüberstehenden Seite eines rechtwinkligen Dreiecks richtig zu schreiben; denn überall findet sich „Hypothenuse" statt „Hypotenuse". — Der Ehre der deutschen mathematischen Literatur war bei einem solchen Buche das Archiv es schuldig, das obige, vielleicht etwas hart zu sein scheinende Urtheil auszusprechen, namentlich und ganz besonders der Anmaassung gegenüber, mit welcher gleich zu Anfang das Vorwort sich: „an die geehrten Leser" in folgender Weise wendet: „Bei dem Wörterbuche, dessen erstes Heft vorliegt, soll es mein Bestreben sein", u. s. w., „die mathematischen Wissenschaften nicht nur an sich, sondern auch in ihrer Anwendung auf andere Wissenschaften abzuhandeln und zugleich die Theorie mit der Praxis zu verbinden." Wer aus diesem Buche seine Kenntniss der mathematischen Wissenschaften und ihrer praktischen Anwendung zu schöpfen belieben sollte, den würden wir aufrichtigst bedauern! Hätte der Herr Verfasser oder Verleger dem Buche den Titel: „Mathematisch-physikalisches Conversations-Lexicon" gegeben, so möchte das allenfalls angehen; dies würde aber auch die höchste, dem Buche etwa gebührende Bezeichnung sein, und wir möchten in der That dem Herrn Verleger den wirklich wohlgemein-

ten Rath geben, dasselbe schleunigst gleich vom zweiten Hefte an in der angegebenen Weise umzutaufen, wenn er noch auf einigen Ersatz seines Schadens rechnen zu dürfen die Hoffnung haben will; denn, wer nur irgend sich einen Mathematiker nennt, wird es nicht kaufen und zur Seite werfen, und mathematische Anfänger müssen von ihren Lehrern vor dem Ankauf und dem Gebrauch, wozu dieselben der jetzige Titel leicht verleiten könnte, dringend gewarnt werden.

Geometrie.

Sammlung von Lehrsätzen und Aufgaben aus der Planimetrie. Für den Schulgebrauch sachlich und methodisch geordnet und mit Hülfsmitteln zur Bearbeitung versehen von J. O. Gandtner und Dr. K. F. Junghans. Erster Theil, die Anwendung der Proportionen nicht erfordernd. Mit sechs Figurentafeln. Berlin. Weidmann. 1856. 8.

Diese neue Sammlung vorzugsweise durch Construction zu lösender geometrischer Aufgaben und eben so zu beweisender geometrischer Lehrsätze scheint uns jedenfalls in sehr verständiger Weise angelegt zu sein und vielen Stoff zu sehr zweckmässigen geometrischen Uebungen darzubieten. Zuerst sind die Sätze zusammengestellt, welche als bekannt angenommen werden, und mit denen der Schüler bei allen folgenden Uebungen vollständig auszukommen vermag, die er sich also, ehe er zu diesen Uebungen schreitet, vollständig zu eigen gemacht haben muss, was auch durchaus keine Schwierigkeit hat und von jedem Schüler verlangt werden kann und muss, da deren Anzahl im Ganzen nur gering ist. Dann folgen Lehrsätze, die zu beweisen sind, und hierauf vorzugsweise durch Construction zu lösende Aufgaben, wobei jedoch auch eine Anzahl algebraisch zu lösender, auf Gleichungen des ersten Grades oder reine quadratische Gleichungen führender Aufgaben nicht fehlt. Der Stoff ist überall in natürliche Gruppen vertheilt, nicht nur, wie es der Schulgebrauch erfordert, nach den Beweis- und Auflösungsmitteln geordnet. Jede Gruppe von Sätzen und Aufgaben, d. h. jeder Paragraph der Sammlung, behandelt eine bestimmte Figur. Mehrere Gruppen zusammen bilden einen Abschnitt, alle Sätze oder Aufgaben eines Abschnitts entsprechen einer Stufe des geometrischen Unterrichts und setzen das auf den früheren Stufen Erlernte voraus. Innerhalb einer jeden Gruppe sind die Sätze methodisch und nach ihrem Zusammenhange geordnet, und die meisten Gruppen enthalten nament-

lich im Anfange eine Anzahl leichterer Sätze oder Aufgaben. Andererseits fehlt es aber auch schon im vorliegenden Theile, namentlich am Ende der einzelnen Paragraphen, nicht an Nummern, die selbst dem Schüler der obersten Stufe noch Stoff zum Nachdenken bieten. Die Beweise und Auflösungen sind nirgends vollständig gegeben, wobei aber kurze Andeutungen dazu durch zweckmässige Hinweisungen auf Früheres nicht fehlen. Eine grössere Anzahl ganz kurzer, oft sehr zu Belehrung und Erläuterung dienender Fragen ist den einzelnen Nummern häufig beigefügt. Namentlich unter den Lehrsätzen finden sich manche den Herren Verfassern jedenfalls eigenthümliche interessante geometrische Beziehungen, wie sie sich bei einer solchen sorgfältigen und mühevollen Arbeit immer von selbst zu ergeben pflegen, was in dem ungemeinen Reichthum der Geometrie, der nie zu erschöpfen ist, seinen natürlichen Grund hat. Ausser der grossen Reichhaltigkeit dieser Sammlung finden wir ihr Hauptverdienst in der äusserst sorgfältigen methodischen, stets in folgerechter Weise vom Leichteren zum Schwereren, dem Einfacheren zum Zusammengesetzteren fortschreitenden Anordnung der Lehrsätze und Aufgaben, so dass wir überzeugt sind, dass das Buch nicht bloss in der Hand eines geschickten Lehrers bei'm Unterrichte Nutzen stiften, sondern selbst auch von einem gut vorbereiteten Anfänger bei'm Selbststudium vortheilhaft benutzt werden kann. Das Buch ist zu reichhaltig, als dass wir seinen Inhalt hier auch nur in seinen Hauptumrissen anzugeben im Stande wären. Möge es daher allen Lehrern nochmals zur Beachtung empfohlen sein und der zweite, die Lehre von den Proportionen voraussetzende Theil bald erscheinen.

Physik.

Jahresbericht über die höhere Bürgerschule zu Frankfurt an der Oder von Ostern 1857. Hiebei die Abhandlung: **Ueber verschiedene mathematisch-physikalische Probleme. Von Dr. G. Emsmann.** Frankfurt a. d. O. 1857. 4°.

Wir billigen die Wahl des Inhalts zu diesem Schulprogramm ganz und wünschen, dass andere Lehranstalten bei Abfassung ihrer Programme öfters gleiche Gesichtspunkte verfolgen möchten. Der Herr Verfasser behandelt nämlich verschiedene wichtige physikalisch-mathematische Probleme, die in den gewöhnlichen physikalischen Elementarbüchern nur sehr oberflächlich behandelt werden, in eingehender gründlicher Weise so, dass dieselbe kei-

neswegs über den Gesichtskreis der Schüler hinausgeht und diese Probleme sehr zweckmässig zur Uebung derselben benutzt werden können, wodurch er zugleich seine mit der unsrigen völlig übereinstimmende Ansicht über die besondere Wichtigkeit der mathematischen Seite des physikalischen Schulunterrichts an den Tag gelegt hat. Wir haben es schon oft hervorgehoben, und wiederholen es auch bei dieser Gelegenheit, dass auf Schulen der höhere physikalische Unterricht vorzugsweise mathematisch ertheilt werden, und das Experiment zwar keineswegs ganz vernachlässigen, aber sich dabei nur auf das Nothwendigste beschränken muss, wenn er seinen Zweck erfüllen und wahrhaft befruchtend und anregend wirken soll, wozu eine so grosse Anzahl der trefflichsten Elemente in demselben liegen. Auf den Universitäten, wo der physikalische Unterricht leider!! oft nur zu sehr, ja nicht selten ganz und gar im Dienste der Medicin steht und derselben als seiner Gebieterin huldigt, wird die mathematische Seite der Physik in den gewöhnlichen Vorlesungen über diese herrliche Wissenschaft, — einige sehr rühmliche Ausnahmen, auf die der Kundige nicht besonders hingewiesen zu werden braucht, natürlich abgerechnet, — oft ganz vernachlässigt, was dann aber auch meistens nur zu bedauerlichen Resultaten führt. Auch deshalb haben die höheren Lehranstalten, auf denen wahre Gründlichkeit und Strenge, die mit einer elementaren Betrachtungsweise sehr wohl zu vereinigen ist, das erste Haupt- und Grundelement alles Unterrichts sein muss, um so mehr die Verpflichtung, die in Rede stehende Seite des so bildenden physikalischen Unterrichts hauptsächlich hervorzuheben, und jede Schrift, welche dazu fördernd zu wirken sucht, wird von uns jederzeit mit besonderer Freude und Anerkennung begrüsst werden. Deshalb auch das vorliegende, ganz elementar in sehr gründlicher, völlig für den Schulunterricht geeigneter Weise verfasste Programm! Die Auswahl der betreffenden Lehren ist sehr zweckmässig getroffen, und überall hat der Herr Verfasser, wie z. B. bei der Bestimmung der Brechungsverhältnisse, auf die neuesten Methoden, die sich noch nicht in den Lehrbüchern finden, Rücksicht genommen, wodurch die Schrift auch für Lehrer, denen eine grössere Bibliothek nicht zu Gebote steht, lehrreich ist. Der Inhalt ist folgender: I. Die spezifische Wärme. Allgemeine Theorie und dann 1. Die Mischungsmethode. 2. Die Eisschmelzungsmethode. 3. Die Erkaltungsmethode. Endlich: Beachtenswerthe Anmerkungen über die Ermittelung der spezifischen Wärme der Gase mit besonderer Rücksicht auf die neuesten Arbeiten von von Seydlitz, Krönig, Kremers u. s. w. — II. Die Constanten galvanischer Rheomotoren. Von dem Ohm'schen Gesetze ausgehend: Tangenten-

boussole, elektromotorische Kraft, Widerstand, Einheit des Leitungswiderstandes, Leitungswiderstand der Drähte, spezifischer Leitungswiderstand, u. s. w. — III. Die Declination der Magnetnadel *). — IV. Der Brechungsexponent, mit Rücksicht auf die Methode und das Instrument von Meyerstein. — V. Das Bild bei sphärischen Spiegeln und Linsen. Die gewöhnlichen einfachsten optischen Formeln als bekannt voraussetzend, hauptsächlich über Lage der Bilder in Bezug auf die Objecte, Vergrösserung u. s. w.

Wir empfehlen dieses Programm den Lesern zur Beachtung und haben es namentlich deshalb etwas näher als sonst gewöhnlich besprochen, weil es die wichtigste Seite des physikalischen Unterrichts in geeigneter Weise hervorhebt und die Förderung dieses wichtigen Unterrichts, der, nach richtigen Grundsätzen ertheilt, so viele treffliche Bildungsmittel enthält, aber bei unrichtiger Behandlung seinen Zweck auch ganz verfehlen kann, nach dieser Seite hin sich angelegen sein lässt.

Optische Instrumente.

Je mehr die neuen Steinheil'schen Fernröhre und übrigen optischen Apparate bei ihrer grossen Vortrefflichkeit, die wir aus dem Gebrauch eines in unserem Besitze befindlichen solchen Fernrohrs vollständig verbürgen können, und ihrem verhältnissmässig sehr niedrigen Preise die allgemeinste und wärmste Empfehlung zur Anschaffung, namentlich auch für die Apparate der Schulen verdienen: desto mehr halten wir es für unsere Pflicht, den neuesten Preis-Courant der Steinheil'schen Werkstätte in München, für dessen Zusendung wir ihrem berühmten Vorsteher verbindlichst danken, nachstehend unseren Lesern sogleich mitzutheilen. (Den früheren Preis-Courant s. m. Thl. XXV. Literar. Ber. Nr. XCVII. S. 8.) G.

---

*) Die hier entwickelte Methode zur Bestimmung der Declination ist ganz die leichte und genaue Methode, welche der Herausgeber im Archiv. Thl. XXIV. S. 135.—S. 137. mit Berücksichtigung des Excentricitätsfehlers des Instruments angegeben hat, was natürlich auch in der vorliegenden Schrift bemerkt ist. Der Herausgeber erlaubt sich nur zu bemerken, dass in neuerer Zeit von Herrn Breithaupt und Sohn in Cassel sehr schöne und genaue Feldmesser-Boussolen, bei denen das Fernrohr sich ganz durchschlagen lässt, verfertigt werden, zu dem verhältnissmässig geringen Preise von 80 Rthlr., welche sich zur Ausführung seiner Methode zur Bestimmung der Declination der Magnetnadel vortrefflich eignen. Da diese trefflichen Instrumente sehr vielen Zwecken zugleich entsprechen, und als Feldmesser-Boussolen, magnetische Declinatorien u. s. w. benutzt werden können, so verdienen sie sehr, in die physikalischen Kabinette der höheren Lehranstalten aufgenommen zu werden. G.

Preis - Courant der optischen und astronomischen Werkstätte von C. A. Steinheil in München pro 1857.

Die Dimensionen sind im Pariser Duodecimalmaasse, die Preise im Münzvereins-Guldenfusse franco München angesetzt. Einzelne Preiserhöhungen gegen den Courant von 1855 haben in Constructionsverbesserungen ihren Grund. Die Werkstätte arbeitet nur auf Bestellungen. Diese wolle man direct an die Anstalt richten. Verpackungskosten werden besonders berechnet. Auf allen Objectivfassungen ist die Firma u. das Productions-Numero gravirt.

№	I. Abtheilung. Fernröhren.	Gld.
	a. Tuben ohne Stativ, mit fournirtem Holzrohr.	
1.	**Refractor** von 108‴ Oeffnung, $13\frac{1}{3}$ Fuss Brennweite, mit 6 Okularen von 80. 107. 160. 213. 320. 480mal. Vergr. u. Sonnenglas, dann Sucher v. 33‴ Oeffn. u. 42″ Brennw.	2800
2.	**Refractor** von 96‴ Oeffnung und $11\frac{1}{2}$ Fuss Brennweite, 6 Okulare von 69. 92. 138. 184. 276. 414mal. Vergr., Sonnenglas, dann Sucher von 27‴ Oeffn. u. 27 Zoll Brennw.	2000
3.	**Refractor** von 84‴ Oeffn., $9\frac{2}{3}$ Fuss Brennw., 6 Okulare von 58. 77. 116. 155. 232. 348mal. Vergr., dann Sucher von 24‴ Oeffn. u. 24 Zoll Brennw.	1600
4.	**Refractor** von 78‴ Oeffn., 9 Fuss Brennw., mit 6 Okularen von 54. 72. 108. 144. 216. 324mal. Vergr., dann Sucher von 24‴ Oeffn. und 24 Zoll Brennw.	1100
5.	**Refractor** von 72‴ Oeffn. und 8 Fuss Brennw., mit 5 Okularen von 64. 96. 128. 192. 288mal. Vergr., dann Sucher von 21‴ Oeffn. und 21 Zoll Brennw.	900
	Zu diesen Refractoren werden auf Bestellung entsprechende parallaktische Aufstellungen mit und ohne Stunden und Deklinationskreise geliefert. Der Preis richtet sich nach der Grösse und nach dem Grade der Eleganz, die verlangt wird, worüber man sich verständigen wird.	
6.	**Tubus** von 60‴ Oeffn. und 78 Zoll Brennw., die 5 astron. Okulare vergrössern 52. 78. 104. 156. 234mal, das terr. Okular 78mal, Sucher von $\frac{18'''}{18''}$	600
7.	**Tubus** von 48‴ Oeffn., 60″ Brennw., astr. 60. 80. 120. 180. 240, terr. 60, Sucher $\frac{12'''}{9''}$	350
8.	**Tubus** von 42‴ Oeffn., 60″ Brennw., astr. 60. 80. 120. 180, terr. 60, Sucher $\frac{9'''}{6''}$	270
9.	**Tubus** von 36‴ Oeffn., 60″ Brennw., astr. 80. 120. 180, terr. 60, Sucher $\frac{9'''}{6''}$	220
10.	**Tubus** v. 33‴ Oeffn., 42″ Brennw., astr. 56. 86. 126, terr. 54	130
11.	**Tubus** von 27‴ Oeffn., 27″ Brennw., astr. 54. 81, terr. 34	75
12.	**Tubus** von 24‴ Oeffn., 24″ Brennw., astr. 48. 72, terr. 30	60
	Zu den Tuben № 6—12 werden auf Bestellung entsprechende Pyramidalstative mit und ohne Kreise, von einfacher oder eleganter Arbeit, oder auch parallakt. Aufstellungen um vereinbarte Preise geliefert.	

№	b. Tuben. Rohr und Stativ Messing; in polirtem Kasten.	Gld.
13.	**Tubus** 33‴ Oeffn., 42″ Brennw., terr. 50. 70, astr. 54. 84. 126mal. Vergr., Sonnenglas Triebstange	220
14.	**Tubus** 27‴ Oeffn., 27″ Brennw., terr. 34., astr. 54. 81mal. Vergr., Sonnenglas	110
15.	**Tubus** 21‴ Oeffn., 21″ Brennw., terr. 31, astr. 42. 63mal. Vergr., Sonnenglas	66
16.	**Tubus** 15‴ Oeffn., 12″ Brennw., terr. 28, astr. 36. 60mal. Vergr., Sonnenglas	44
	c. Sucher, Helligkeit und Gesichtsfeld gross.	
17.	**Kometensucher** von 27‴ Oeffn. und 27″ Brennw., mit 13½mal. Vergr., parallaktisch montirt. Das Stativ mit 3 Fussschrauben und aus Messingröhren gebildet zum Stellen auf den Tisch. Die Höhe kann geändert, jede Axe geklemmt und das Ganze auch als Horizontal-Stativ benützt werden	125
18.	**Besonderer Okularstutzen** mit Trieb um № 17 auch als Tubus zu benutzen. Beigegeben sind terr. Okulare von 34 und astr. von 54 u. 81mal. Vergr. nebst Sonnenglas	33
19.	**Sucher** von 15‴ Oeffn., 12″ Brennw., mit 9mal. Vergr.	30
20.	**Sucher kleiner**, von 9‴ Oeffn. und 6mal. Brennw., mit 6mal. Vergr.	16
	d. Zugfernröhren.	
21.	**Zugfernröhre** 33‴ Oeffn., 42″ Brennw., terr. Vergr. 54	110
22.	„ 27‴ „ 27″ „ „ „ 34	60
23.	„ 24‴ „ 24″ „ „ „ 30	46
24.	„ 21‴ „ 21″ „ „ „ 31	36
25.	„ 18‴ „ 18″ „ „ „ 22½	32
26.	„ 15‴ „ 12″ „ „ „ 15	28
27.	„ 12‴ „ 9″ „ „ „ 11	21
28.	„ 9‴ „ 6″ „ „ „ 7½	
	Okular zusammenschiebbar	22
29.	„ 15‴ „ 15″ Brennw., terr. Vergr. 35	22
30.	„ 15‴ „ 12″ „ „ „ 24	22
31.	„ 12‴ „ 12″ „ „ „ 24	16
32.	„ 12‴ „ 9″ „ „ „ 18	15
33.	„ 9‴ „ 6″ „ „ „ 14	12
34.	„ 6‴ „ 4″ „ „ „ 9	10
	Sollen diese Zugfernröhre ein Sonnenblendrohr erhalten, so erhöht sich der Preis von No. 21—24 um	3
	No. 25—28 um	2
	No. 29—34 um	1
	Baumschrauben, Futterale oder Ledersäcke werden auf Verlangen beigegeben und besonders verrechnet.	
	e. Marine-Fernröhren mit Holzrohr und Sonnenblende, nur Okularzug.	
35.	**Marinefernrohr** 24‴ Oeffn., 24″ Brennw., 30m. Vergr.	46
36.	„ 21‴ „ 21″ „ 26m. „	36
37.	„ 18‴ „ 18″ „ 22m. „	30
38.	„ 15‴ „ 12″ „ 15m. „	24

Januar 1857. *C. A. Steinheil.*

Literarischer Bericht
CXII.

Interessante Notiz über eine grosse mathematische Bibliothek in England.

Mein Freund, der so verdiente Director der Realschule zu Posen, Herr Dr. Brennecke, hat mir folgende allgemein interessante Notiz mitgetheilt: G.

„Wissen Sie, wo die vollständigste Bibliothek für reine Mathematik zu finden ist? Ich habe es zufällig erfahren. Ich war im vorigen Sommer in England in Cheltenham und wurde unbekannter Weise von einem Mr. Grave eingeladen zu Tische. Derselbe bat mich am folgenden Tage, seine kleine mathematische Bibliothek anzusehen. Ich kam seiner Aufforderung nach. Er führte mich in ein von seinem Wohnhause (wo seine Frau wohnt und er seine Gesellschaften giebt) entlegenes Stadtviertel. Dort hat er ein anderes Haus, das von dem Parterre bis zum Boden nur mit rein mathematischen Büchern in schönster Ordnung (über 9000 Bände) angefüllt ist. Ich fand auch Ihre Werke, z. B. auch das ganze Archiv, vollständig. Er hält sich einen eigenen Bibliothekar."

Arithmetik.

Auflösungsmethode für algebraische Buchstabengleichungen mit einer einzigen unabhängigen Buchstabengrösse. Von Dr. Ignaz Heger. Mit einer Tafel. Aus dem XII. Bande der Denkschriften der mathem.-naturw. Classe der k. Akademie der Wissenschaften

besonders abgedruckt. Wien. Aus der kaiserlich-königlichen Hof- und Staatsdruckerei. 1856. 4.

Diese Abhandlung enthält die Darlegung einer allgemeinen Auflösungsmethode für algebraische Gleichungen von der Form $F(x, a) = 0$, welche nebst der Unbekannten x noch eine zweite Buchstabengrösse a in sich schliessen, so dass $F(x, a)$ eine algebraische Function der zwei Buchstabengrössen x und a von der Gestalt $S[Ha^{\alpha}x^{\mathfrak{r}}]$ ist und folglich ein Polynom von Gliedern von der Form $Ha^{\alpha}x^{\mathfrak{r}}$ darstellt, wofür die Gleichung

$$(a+1)x^4 + x^3 + (a^3-1)x^2 - (a^2-2a)x + a^3 - a = 0$$

ein Beispiel liefert. Nachdem der Herr Verfasser in den Vorbemerkungen der früheren Arbeiten von Newton mit besonderer Rücksicht auf dessen analytisches Parallelogramm *), von Stirling, Cramer, Lagrange und Anderen kurz Erwähnung gethan hat, fährt er auf S. 3. in folgender Weise fort:

„Später beschäftigte sich Fourier sehr angelegentlich mit diesem Gegenstande und wir haben, gewissen Andeutungen in seinem Werke nach, allen Grund zu glauben, dass er eine allgemeine Auflösungsmethode für solche Gleichungen und zwar nicht blos für eine einzelne Gleichung mit einer einzigen überschüssigen Buchstabengrösse, sondern auch mit einer beliebig grossen Anzahl von solchen, und auch für Systeme von mehreren solchen Gleichungen gefunden habe. Leider sind die Ergebnisse dieser Untersuchungen, gleichwie viele andere von ihm aufgefundenen Schätze des Wissens für uns verloren gegangen. Aber auch in seinem Werke findet sich keine Andeutung jener eben früher erwähnten Untersuchungen über die Unstetigkeit der Genüge leistenden Functionen.“

„Endlich wurde derselbe Gegenstand von Petzval genauer behandelt. Bei seinen Untersuchungen über die linearen Differentialgleichungen gelangte derselbe nicht nur zu einer Reihe von Integrationsmethoden für dieselben, sondern fand auch Auflösungsmethoden für eine algebraische Gleichung, welche nebst der Unbekannten x noch andere constante Parameter beherbergt. Dieser Fund war auch einmal der Gegenstand seiner öffentlichen Vorträge an der Wiener Universität, und die Grundzüge dieser Methode finden sich in seinem Werke: „Integration der linearen Differentialgleichungen“ niedergelegt. Diesen zuletzt erwähnten

*) M. s. Mathematisches Wörterbuch. Thl. III. S. 676.

Arbeiten verdankt diese Abhandlung ihr Entstehen. Es wurde mir nämlich erst später kund, dass schon Fourier, wiewohl auf einem andern Wege, denselben Gegenstand behandelt hatte, wie sich dies in seinem Werke: „Analyse des équations déterminées" angedeutet findet, in welches dieser grosse Mathematiker seine Untersuchungen über Gleichungen niederlegen wollte. Leider ist der grösste Theil hiervon für uns verloren gegangen, weil die Herausgabe des zweiten Bandes durch seinen Tod vereitelt wurde. Der erschienene erste Band enthält glücklicher Weise eine kurze übersichtliche Darstellung: „Exposée synoptique" des Gesammtinhaltes. Hieraus nun ist ersichtlich, dass das vierte Buch dieses Werkes eine allgemeine Auflösungsmethode für Buchstabengleichungen und Systeme von solchen enthalten sollte. Daselbst sind in gedrängter Kürze die Grundzüge dieser Methode auseinandergesetzt; allein sie scheinen bisher selbst gelehrten Lesern ganz und gar unverständlich geblieben zu sein, vermuthlich wegen der ganz eigenthümlichen Behandlungsweise dieses Gegenstandes, und wären es vielleicht auch für mich geblieben, wenn ich nicht durch die auf einem ähnlichen Gedankengange gegründeten Untersuchungen Petzval's über die linearen Differentialgleichungen zu ihrem Verständnisse geleitet worden wäre. Es ist mir auch gelungen, die Methode Fourier's zur Auflösung von Buchstabengleichungen und Systeme von solchen genau in derselben Weise wieder aufzufinden, wie sie einst dieser grosse Analyst selbst, seinen eigenen Andeutungen nach, gehabt haben mochte. Es lag dies zwar so eigentlich nicht in der ursprünglichen Absicht; ich ging vielmehr, so wie jeder andere an meiner Stelle, auch darauf aus, auf diesem wenig betretenen Felde wo möglich einiges Eigenthum zu gewinnen und glaube wirklich einiges gefunden zu haben; in der Mehrzahl der Fälle jedoch geschah es, dass ich zwar meinte, einen eigenen Fund gethan zu haben und dann, Fourier's Exposée synoptique zur Hand nehmend, zu meiner Ueberraschung gewahr ward, wie derselbe darin bereits angedeutet war, mit wenigen, aber so bezeichnenden Worten, dass kein Zweifel übrig bleiben konnte, Fourier habe dasselbe bereits selbst besessen. Ich fand mich dadurch nur noch mehr bestimmt, in dieser Abhandlung, welche einen Theil dieses Fundes zum Gegenstande hat, genau den von Fourier eingeschlagenen Weg beizubehalten. Es ist dies keineswegs blos ein Opfer, welches man den Manen dieses grossen Mannes bringt, ich hege vielmehr die Ueberzeugung, dass diese Darstellungsweise zugleich die allgemeinste von allen sei, indem sie nicht blos auf eine einzige Buchstabengleichung mit einer einzigen überschüssigen Buchstabengrösse Anwendung verstattet, son-

dern allgemeine Giltigkeit besitzt, wie gross auch die Anzahl der Gleichungen und der überschüssigen Buchstabengrössen sein mag."

„Das in dieser Abhandlung gelöste Problem stellt, wie aus diesen Bemerkungen ersichtlich ist, nur den einfachsten Fall dar. Die darin auseinandergesetzte Auflösungsmethode verstattet aber eine allgemeine Anwendung auf beliebig gestaltete algebraische Buchstabengleichungen und Systeme von solchen mit beliebig vielen überschüssigen Buchstabengrössen. Dieser Abhandlung sollen auch mehrere andere nachfolgen, welche die complicirteren Probleme behandeln, wodurch die Theorie der algebraischen Buchstabengleichungen eine erschöpfende Darstellung gewinnen wird. Diese Reihe von Abhandlungen wird, wie schon erwähnt, zum grössten Theile als eine Wiederherstellung der von Fourier zuerst aufgefundenen, aber durch seinen Tod leider verloren gegangenen allgemeinen Auflösungsmethode für Buchstabengleichungen anzusehen sein; ob und wie weit mir dies wirklich gelungen ist oder nicht, mag jeder Leser durch Vergleichung meiner Arbeit mit dem oberwähnten Exposée synoptique selbst entscheiden."

Je sehnlicher jeder Mathematiker die Wiederherstellung der verloren gegangenen Arbeiten Fourier's über die Auflösung der Gleichungen wünschen muss: desto grösser und allgemeiner ist das Interesse, welches die vorliegende Abhandlung erregt, und desto mehr müssen wir dieselbe der Aufmerksamkeit aller Mathematiker, welche sich für diesen Gegenstand interessiren, empfehlen, wobei wir zugleich dem Herrn Verfasser für seine mühevollen und scharfsinnigen Untersuchungen unseren wärmsten Dank auszusprechen nicht unterlassen können, eben so wie dem Herrn Professor Petzval, dessen Untersuchungen mit die Veranlassung zu dieser verdienstlichen Arbeit, von der wir mit dem grössten Vergnügen genaue Kenntniss genommen, gegeben haben. Auf eine nähere Darlegung der Methoden des Herrn Verfassers können wir hier begreiflicher Weise nicht eingehen, sondern unsere Leser nur dringend auffordern, sich die Kenntniss derselben aus der Abhandlung selbst so bald als möglich zu verschaffen. Im Allgemeinen wollen wir jedoch bemerken, dass die Methode auf die Entwickelung in absteigende oder aufsteigende Reihen zurückkommt, dass aber hiebei die Kunst hauptsächlich darin besteht, diese Entwickelungen so vorzunehmen und anzuordnen, dass sowohl den betreffenden Reihen die nöthige Convergenz verschafft wird, als auch Unterbrechungen der Stetigkeit streng und sorgfältig vermieden werden, was Alles auch an mehreren sehr zweckmässigen und lehrreichen Beispielen erläutert wird.

Aus den folgenden Ueberschriften der Hauptabschnitte werden die Leser den Gang des Herrn Verfassers in seinen allgemeinsten Umrissen erkennen: **Vorbemerkung. — Entwicklung der Wurzeln in Form einer nach absteigenden Potenzen der unabhängigen Buchstabengrösse *) geordneten Reihe.** Einleitung. I. Bestimmung des Anfangsgliedes. II. Bestimmung der Folgeglieder. — **Entwicklung der Wurzeln einer Gleichung in eine nach aufsteigenden Potenzen von $a-\alpha$ geordnete Reihe.** I. Bestimmung des Anfangsgliedes. II. Bestimmung der Folgeglieder.

Indem wir noch besonders auf die mit grosser Deutlichkeit und Präcision auf S. 38. 42. 74. 92. 99. ausgesprochenen allgemeinen Sätze oder Regeln aufmerksam machen, wünschen wir sehr, dass der Herr Verfasser die Wissenschaft recht bald mit der Fortsetzung seiner so interessanten und wichtigen Arbeit erfreuen möge.

Geometrie.

Lehrbuch der Stereometrie von Ernst Essen (Lehrer der Mathematik und Physik am Gymnasium zu Stargard.) Stargard i. P. Gustav Weber. 1856. 8.

Dieses Lehrbuch der Stereometrie lässt in Bezug auf Einfachheit, Strenge und Vollständigkeit nichts zu wünschen übrig, und bekundet überall den gewandten, seinem Gegenstande mit der grössten Liebe ergebenen Lehrer, wobei zugleich eine grössere Anzahl eigenthümlicher Darstellungen nicht fehlt, die alle zunächst den verdienstlichen Zweck haben, der Stereometrie eine grössere Einfachheit zu verleihen, und dadurch den Unterricht in derselben zwar zu erleichtern, aber auch das grosse in demselben liegende bildende Element stets festzuhalten und zu wahren. Wir können daher dieses Lehrbuch allen Lehrern zur sorgfältigsten Beachtung aus vollkommenster Ueberzeugung recht sehr empfehlen.

Physik.

Aufgaben aus der Physik nebst ihren Auflösungen und einem Anhange, physikalische Tabellen enthaltend.

---

*) Das obige a.

Zum Gebrauche für Lehrer und Schüler in höheren Unterrichtsanstalten und besonders zum Selbstunterricht bearbeitet von Dr. C. Fliedner, Hauptlehrer an der Realschule zu Hanau. Mit 50 in den Text eingedruckten Holzschnitten. Zweite verbesserte und vermehrte Auflage. Braunschweig. Vieweg. 1856. 8.

Die erste Auflage dieser sehr guten Sammlung physikalischer Aufgaben ist im Literar. Bericht Nr. LXIV. S. 635. angezeigt und empfohlen worden. Das baldige Erscheinen einer zweiten Auflage zeigt, wie sehr das verdienstliche Buch diese Empfehlung verdiente. Der dort angegebene Hauptinhalt ist im Wesentlichen derselbe geblieben, mit der einzigen Abänderung, dass die Abschnitte XXIV. und XXV. jetzt in den einen Abschnitt XXIV. über die Brechung des Lichts zusammengezogen worden sind, und der Abschnitt XXV. über die früher nicht besonders berücksichtigte Farbenzerstreuung des Lichts jetzt neu hinzugekommen ist. Der, eine Anzahl sehr zweckmässiger physikalischer Tabellen enthaltende Anhang ist schon auf dem Titel besonders bemerkt worden. Die Hauptveränderung aber, welche mit dieser neuen Auflage vorgenommen worden ist, besteht darin, dass jetzt die Aufgaben und Auflösungen in zweckmässiger Weise von einander gesondert und in zwei besondere Hefte gebracht worden sind. Je mehr im Interesse des Gedeihens des physikalischen Unterrichts wir wünschen, dass die mathematische Seite desselben immer mehr hervorgehoben werden möge, weil derselbe nur dann den grossen Nutzen, den er zu stiften so sehr viel treffliche Elemente enthält, wirklich stiften wird: desto freudiger haben wir die neue Auflage dieses Büchleins begrüsst, welches gerade in dieser Richtung sehr wohlthätig zu wirken geeignet ist. Papier, Druck und Figuren sind so vorzüglich, wie man es von der Verlagshandlung gewohnt ist.

Erste Ergebnisse der magnetischen Beobachtungen in Wien von Karl Kreil, wirklichem Mitgliede der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. Aus dem XII. Bande der Denkschriften der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften besonders abgedruckt. Wien. Aus der kaiserlich-königlichen Hof- und Staatsdruckerei. 1856. 4.

Magnetische und geographische Ortsbestimmungen an den Küsten des adriatischen Golfes im Jahre 1854.

Von Karl Kreil, wirklichem Mitgliede der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. Aus dem X. Bande der Denkschriften der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften besonders abgedruckt. Wien. Aus der kaiserlich-königlichen Hof- und Staatsdruckerei. 1855. 4.

Diese Früchte der Arbeiten der kaiserlich-österreichischen Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus in Wien, welcher Herr Professor Kreil mit so grossem Eifer und tiefer Kenntniss des betreffenden Gegenstandes vorsteht, sind jedenfalls für die Wissenschaft von der grössten Wichtigkeit, und liefern von Neuem den Beweis, mit welcher Grossartigkeit und immer grösserer Ausdehnung das meteorologisch-magnetische Netz über den ganzen österreichischen Kaiserstaat ausgespannt wird. Die magnetischen und astronomisch-geographischen Arbeiten an den Küsten des adriatischen Golfes liefern die betreffenden Constanten für die folgenden Punkte: Triest, Venedig, Parenzo, Pola, Fiume, Lussin Piccolo, Zara, Spalato, Curzola, Lagosta, Lissa, Lesina, Gravosa bei Ragusa, Megline bei Cattaro, Antivari, Durazzo, Valona, Korfu, Brindisi, Molfetta, Ancona; und eine der Abhandlung beigefügte Karte der magnetischen Linien an den Küsten des adriatischen Meeres liefert eine sehr deutliche und interessante Uebersicht des Verhaltens der magnetischen Kraft in jener in so vielen Beziehungen merkwürdigen Gegend der Erde. Aus der Abhandlung über die magnetischen Verhältnisse Wiens theilen wir unseren Lesern die folgenden der Epoche 1854,5 entsprechenden Resultate ihrer grossen Wichtigkeit wegen mit:

Declination	=	13°.2′,05,
jährliche Abnahme	=	9′,15,
horizontale Intensität . . .	=	2,00174,
jährliche Zunahme	=	0,00290,
Inclination	=	64°.16′,35,
jährliche Abnahme	=	2′,18,
Intensität der Gesammtkraft	=	4,61048,
jährliche Zunahme	=	0,00195.

Vermischte Schriften.

Annali di scienze matematiche e fisiche, compilati da Barnaba Tortolini. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CX. S. 6.)

Novembre 1856. Varie cose astronomiche. Nota di Giuseppe Bianchi. p. 401. — Intorno alle superficie le quali deformandosi ritengono le stesse linee di curvatura. Di Codazzi Delfino. p. 423. — Sull' opera del sig. Flourens. Della longevità umana e della quantità della vita sul globo. Articolo del prof. G. Ponzi. p. 437. — Sulla forza centrifuga terrestre in quanto sturba la direzione della gravità. Formole e sperienze del dott. B. Santini. p. 445.

Aus dem Octoberhefte 1856 dieser Annalen ist von des Herrn Herausgebers trefflicher Abhandlung:

Sulla quadratura della superficie parallela ad una superficie di quart' ordine conosciuta sotto il nome di superficie di elasticità,

ein besonderer Abdruck (Roma. Tipografia delle belle arti. 1856.) veranstaltet worden, so dass ein Jeder sich leicht in den Besitz dieser ausgezeichneten Abhandlung setzen kann.

Decembre 1856. Sulla forza centrifuga terrestre in quanto sturba la direzione della gravità. Formole e sperienze dell dott. B. Santini. (Continuazione e fine.) p. 449. — Note sur un theorème général par rapport à l'élimination. Par M. A. Cayley. p. 454. — L'occultazione di Giove nella sera 2 Gennajo 1857 osservata a Modena. Del Sig. G. Bianchi. p. 459. — Intorno al teorema di Budan. Nota di Angelo Genocchi. p. 462.

Berichtigung.

In dem Literar. Ber. Nr. CXI. Seite 1 Zeile 7 v. u. schalte man hinter „Dagegen" die folgenden Worte ein: „hauptsächlich in dem hiermit unmittelbar zusammenhängenden Artikel: Ansetzen der Gleichungen."

Mathematische und physikalische Bibliographie.

XI.

Geschichte der Mathematik.

A. Poppe, Chronologische Uebersicht der Erfindungen und Entdeckungen auf dem Gebiete der Physik, Chemie, Astronomie etc. 2. Aufl. gr. 8°. geh. Frankfurt a. M. 10 Ngr.

Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

F. Haller von Hallerstein, Lehrbuch der Elementarmathematik. 3. Aufl. gr. 8°. geh. Berlin. 2⅔ Thlr.

L. Hoffmann, Mathematisches Wörterbuch. Alphabetische Zusammenstellung sämmtlicher in die mathematischen Wissenschaften gehörender Gegenstände in erklärenden und beweisenden synthetisch bearbeiteten Abhandlungen. 1. Lief. Mit 68 Holzschn. Berlin. 20 Ngr.

E. H. Richter, Lehrbuch der Mathematik. 2. Thl. A. u. d. T.: Lehrbuch der Aehnlichkeitslehre und der Flächenraumlehre. gr. 8°. Frankfurt a. d. O. 16 Ngr.

Arithmetik.

Duhamel, Éléments de calcul infinitésimal. Tome II. Paris. 8°. Mit 1 Taf. Schluss. Preis vollst. 4 Thlr.

J. Heger, Auflösungsmethode für algebraische Buchstabengleichungen mit einer einzigen unabhängigen Buchstabengrösse. gr. 4°. geh. Wien. 1⅓ Thlr.

P. Huther, Sammlung von arithmetischen Aufgaben. 3. Aufl. gr. 8⁰. Sulzbach. 12 Ngr.

F. Mocnik, Manuale di aritmetica. Tradotto da G. Zampieri. Edizione III. Parte I. gr. 8⁰. geh. Wien. 18 Ngr.

A. Steinhauser, Anhang zu allen deutschen Ausgaben von Logarithmentafeln. Nach Borda's Anhang erweitert. hoch 4⁰. geh. Wien. 24 Ngr.

v. Teirich, Lehrbuch der Algebra. 2. Aufl. 1. Hälfte. gr. 8⁰. geh. Wien. Preis für das vollständige Werk $1\frac{1}{3}$ Thlr.

Geometrie.

Fleischhauer und E. Fleischhauer, Der practische Geometer oder Anleitung zur gewerblichen Geometrie. 2. Aufl. 8⁰. geh. Langensalza. 1 Thlr.

F. Mocnik, Geometria intuitiva per il ginnasio inferiore. Parte I. Edizione II. gr. 8⁰. geh. Wien. 15 Ngr.

Ch. Schwenk, Grundzüge der darstellenden Geometrie für technische Schulen. gr. 8⁰. geh. Stuttgart. 28 Ngr.

Trigonometrie.

L. Kambly, Die Elementar-Mathematik für den Schulunterricht bearbeitet. 3. Thl.: Ebene und sphärische Trigonometrie. 3. Aufl. gr. 8⁰. geh. Breslau. $12\frac{1}{2}$ Ngr.

Mechanik.

G. Decher, Handbuch der rationellen und technischen Mechanik. 1. Abth. A. u. d. T.: Handbuch der rationellen Mechanik. 3. Bd.: Mechanik veränderlicher Systeme. 3. Lief. Augsburg. 8⁰. Mit 2 Taf. 1 Thlr.

Thiroux, Essai sur le mouvement des projectiles dans les milieux résistants. 2ᵉ cahier. Partie pratique. Paris. 8⁰.

Thiroux, Essai sur les projectiles allongés. Paris. 8⁰.

Optik.

W. A. F. Zimmermann, Optik oder die Lehre vom Licht. gr. 8⁰. geh. Berlin. $1\frac{1}{6}$ Thlr.

Astronomie.

Astronomische Beobachtungen auf der königl. Sternwarte zu

Berlin. Herausgegeben von J. F. Encke. IV. Bd. Fol. cart. Berlin. 4 Thlr.

J. Dienger, Ausgleichung der Beobachtungsfehler nach der Methode der kleinsten Quadratsummen. gr. 8°. geh. Braunschweig. $1\frac{1}{6}$ Thlr.

Handatlas der Erde und des Himmels in 70 Lief. Neu red. Ausg. 7. Lief. qu. Imp.-Fol. Weimar. 10 Ngr.

Memorie del nuovo osservatorio del collegio Romano. Roma. 4°. Mit 5 Taf.

A. Quetelet, Annuaire de l'Observatoire royal de Bruxelles.

A. Steinhauser, Grundzüge der mathematischen Geographie und der Landkarten-Projection. Lex. 8°. geh. Wien. $2\frac{1}{4}$ Thlr.

Physik.

F. C. Bakewell, A Manual of Electricity, Practical and Theoretical. Second edition, revised. Illustrated by noumerous Engravings. London and Glasgow. 8°. 2 Thlr.

P. H. Boutigny, Études sur les corps à l'état sphéroïdal, nouvelle branche de physique. 3e édition, considérablement augmentée. Paris. 8°. Mit 26 Abbild. 2 Thlr.

H. W. Dove, Ueber die Rückfälle der Kälte im Mai. gr. 4°. cart. Berlin. 24 Ngr.

Fr. Heinen, Ueber einige Rotationsapparate, insbesondere die Fessel'schen. gr. 8°. geh. Braunschweig. 20 Ngr.

J. Lamont, Magnetische Ortsbestimmungen, ausgeführt an verschiedenen Punkten des Königreichs Bayern. 2. Thl. Lex. 8°. München. $2\frac{1}{3}$ Thlr.

Ph. Spiller, Grundriss der Physik nach ihrem gegenwärtigen Standpunkte. 2. Aufl. gr. 8°. geh. Wien. $1\frac{1}{3}$ Thlr.

O. Ule, Physikalische Bilder im Geiste kosmischer Anschauung. Allen Freunden der Natur gewidmet. 2. Bd. mit eingedr. Holzschn. A. u. d. T.: Die Erscheinungen der Wellenbewegung oder die Lehre vom Schall, Licht und Wärme. Halle. 8°. 1 Thlr.

Verzeichniss der neuesten chemischen, physikalischen und pharmaceutischen Apparate, Geräthschaften und Instrumente der Handlung W. Batka in Prag. gr. 8°. Leipzig. 16 Ngr.

J. Weiser, Lehrbuch der Fisik. 1. u. 2. Lief. gr. 8°. geh. Wien. Preis des vollständ. Werks $2\frac{1}{3}$ Thlr.

J. Weiser, Anfangsgründe der Fisik. 2. Aufl. gr. 8°. geh. Wien. $1\frac{1}{6}$ Thlr.

J. M. Ziegler, Hypsometrischer Atlas. Mit Erläuterungen und Höhenverzeichnissen. qu. fol. geh Winterthur. $2\frac{2}{3}$ Thlr.

Vermischte Schriften.

F. Arago's sämmtliche Werke. Deutsche Original-Ausgabe. Herausgegeben von G. W. Hankel. 6 Bd. gr. 8°. geh. Leipzig. 1⅚ Thlr.

Sitzungsberichte der k. k. Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe. XXII. Bd. 2. Hft. Lex. 8°. Wien. geh. 2 Thlr.

Zeitschrift für Mathematik und Physik von O. Schlömilch und B. Witzschel. 2. Jahrg. 1. Hft. Lex. 8°. Vollständig 5 Thlr.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

XII.

Arithmetik.

Cardanus Formel, deren Verwandlung zur Berechnung der Wurzeln von Zahlengleichungen von der Gestalt: $x^3 - Px - Q = 0$, und eine allgemeine aus jener abgeleitete Form der Wurzeln der letzteren. Lösung des dreihundertjährigen Problems von Doctor E. Büchner. Hildburghausen. 12 Ngr.

J. W. F. Gronau, Ueber die allgemeine und volle Gültigkeit mathematischer Formeln. 1. Thl. gr. 4°. geh. Danzig. $\frac{1}{2}$ Thlr.

Keil, Gemeine oder Briggische Logarithmen mit 3 und 4 bis zu 6 Decimalen. gr. 8°. geh. Eisenberg. 2 Ngr. Tabellen einzeln $1\frac{1}{4}$ Ngr.

Meyer, A., Démonstration de deux propositions nouvelles sur le calcul des probabilités, précédée de la réfutation des objections formulées contre elles au sein de l'Académie de Belgique. Liége. 4°. 18 Ngr.

Meyer, A., Nouveaux éléments du calcul des variations. Liége. 8°. 1 Thlr. 10 Ngr.

J. Rogner, Materialien zum Gebrauche bei und nach dem Unterrichte aus der Arithmetik an Unter-Realschulen. 1. Thl. geb. gr. 8°. Wien. $\frac{2}{3}$ Thlr.

Th. Spieker, Leitfaden für den arithmetischen Unterricht in höheren Lehranstalten. 1. u. 2. Cursus. gr. 8°. geh. Potsdam. $12\frac{1}{2}$ Ngr.

Winckler, Ant., Neue Theoreme zur Lehre von den bestimmten Integralen. Wien. 8°. Mit 2 Taf. 6 Ngr.

Geometrie.

F. Mocnik, Geometrische Anschauungslehre für die Unter-Gymnasien. 1. Abth. 3. Aufl. gr. 8°. geh. Wien. $\frac{1}{3}$ Thlr.

A. Boué, Parallele der Erdbeben, der Nordlichter und des Erdmagnetismus. Lex. 8°. geh. Wien. $^1/_2$ Thlr.

Dienger, J., Ausgleichung der Beobachtungsfehler nach der Methode der kleinsten Quadratsummen. Mit zahlreichen Anwendungen, namentlich auf geodätische Messungen. Mit in den Text eingedruckten Holzschn. Braunschweig. 8°. 1 Thlr. 5 Ngr.

Die Fortschritte der Physik im Jahre 1854. Dargestellt von der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin. X. Jahrg. Redig. von A. Krönig. 1. Abtheilung. gr. 8°. geh. Berlin. 2 Thlr.

Gavarret, Jul., Traité d'électricité. Tome Ier. Paris. 8°. Mit Abbildungen im Text. 2 Thlr. 20 Ngr.

Heinen, Fr., Ueber einige Rotations-Apparate, insbesondere den Fesselschen. Mit in den Text eingedr. Holzschnitten. Braunschweig. 8°. 20 Ngr.

Jolly, Ueber die Physik der Molekularkräfte. gr. 4°. geh. München. $6^3/_4$ Ngr.

Physikalisches Lexicon. 2. Aufl. Von O. Marbach. Fortges. von C. S. Cornelius. 53. 54. Lief. Lex. 8°. Leipzig. à $^1/_2$ Thlr.

Vct. Meurein, Observations météorologiques faites à Lille pendant l'année 1854—55. Lille. 8°. Mit 4 Taf.

Noad, H. M., A Manual of Electricity; including Galvanism, Magnetism, Dia-Magnetism, Electro Dynamics, Magneto-Electricity, and the Electric Telegraph. Part 2. London. 8°. 4 Thlr. 6 Ngr.

E. Reichardt, Die Theorie der Wärme, ein Versuch zur Erklärung der Erscheinungen von Wärme, Licht und Electricität. gr. 8°. geh. Jena. $^1/_2$ Thlr.

Agst. Reslhuber, Untersuchungen über das atmosphärische Ozon. Wien. 8°. Aus den „Sitzungsberichten der mathem.-naturw. Classe der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften." 5 Ngr.

Schmidt, J. F. Jul., Die Eruption des Vesuv in ihren Phänomenen im Mai 1855, nebst Ansichten und Profilen der Vulkane des phlegräischen Gebietes Roccamonfina's und des Albaner Gebirges. Nach der Natur aufgenommen und durch Winkelmessungen berichtigt. 9 Taf. nebst erklär. Text. Olmütz. Fol. 5 Thlr.

v. Sonklar, K., Ein Condensations-Hygrometer. Mit 1 Tafel. 8°. Wien. Aus den „Sitzungsberichten 1856 der k. k. Akademie der Wissenschaften." 6 Ngr.

Vermischte Schriften.

Sitzungsberichte der k. k. Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftl. Classe. XXIII. Bd. (Jahrg. 1857.) 1. Hft. Lex. 8°. Wien. geh. $2^1/_3$ Thlr.





